Métodos matemáticos para físicos

George Arfken

BYK

George Arfken

Métodos matemáticos para físicos

EDITORIAL DIANA
MEXICO

BYK

PRIMERA EDICIÓN, ABRIL DE 1981

ISBN 968-13-0633-3

Título original: MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS — Traductora: María Guadalupe Memije — DERECHOS RESERVADOS © — Copyright ©, by Academic Press, Inc — Edición original en inglés publicada por Academic Press, New York, N. Y., U.S.A. — Copyright ©, 1981, por EDITORIAL DIANA, S. A. — Roberto Gayol 1219, Esq. Tlacoquemécatl, México 12, D. F. — *Impreso en México — Printed in Mexico.*

Prohibida la reproducción total o parcial
sin autorización por escrito de la casa editora

SCANEADO POR

BYK

George Arfken

Métodos matemáticos para físicos

EDITORIAL DIANA
MEXICO

BYK

Para Carolyn
Para Carolyn
Para Carolyn

CONTENIDO

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICIÓN 15
PREFACIO A LA PRIMERA EDICIÓN 17
INTRODUCCIÓN 19

Capítulo 1. ANÁLISIS VECTORIAL

1.1 Definiciones, procedimiento elemental 21
1.2 Rotación de coordenadas 26
1.3 Producto escalar o puntal 33
1.4 Producto vectorial 38
1.5 Producto escalar triple, producto vectorial triple 45
1.6 Gradiente, ∇ 51
1.7 Divergencia, $\nabla\cdot$ 55
1.8 Rotacional, $\nabla\times$ 59
1.9 Aplicaciones sucesivas de ∇ 65
1.10 Integración de vectores 68
1.11 Teorema de Gauss 74
1.12 Teorema de Stokes 77
1.13 Teoría potencial 81
1.14 Ley de Gauss, ecuación de Poisson 90
1.15 Teorema de Helmholtz 94
Referencias 100

Capítulo 2. SISTEMAS COORDENADOS

2.1 Coordenadas curvilíneas 10
2.2 Operaciones con vectores diferenciales 10
2.3 Sistemas coordenados especiales. Coordenadas cartesianas rectangulares 10
2.4 Coordenadas polares esféricas (r, θ, φ) 11
2.5 Separación de variables 11
2.6 Coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z) 12
2.7 Coordenadas cilíndricas elípticas (u, v, z) 12
2.8 Coordenadas cilíndricas parabólicas (ξ, η, z) 12
2.9 Coordenadas bipolares (ξ, η, z) 12
2.10 Coordenadas esferoidales prolatas (u, v, φ) 13
2.11 Coordenadas esferoidales oblatas (u, v, φ) 13
2.12 Coordenadas parabólicas (ξ, η, φ) 14
2.13 Coordenadas toroidales (ξ, η, φ) 14

2.14 Coordenadas biesféricas (ξ, η, φ) 147
2.15 Coordenadas elipsoidales confocales (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 149
2.16 Coordenadas cónicas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 150
2.17 Coordenadas parabólicas confocales (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 151
Referencias 152

Capítulo 3. ANÁLISIS DE TENSORES

3.1 Introducción, definiciones 153
3.2 Contracción, producto directo 159
3.3 Regla del cociente 161
3.4 Pseudotensores, tensores dobles 163
3.5 Diádica 170
3.6 Teoría de la elasticidad 174
3.7 Covariancia de Lorentz para las ecuaciones de Maxwell 183
Referencias 191

Capítulo 4. DETERMINANTES, MATRICES Y TEORIA DE GRUPO

4.1 Determinantes 192
4.2 Matrices 199
4.3 Matrices ortogonales 211
4.4 Coordenadas oblicuas 222
4.5 Matrices hermitianas, matrices unitarias 226
4.6 Diagonalización de matrices 233
4.7 Introducción a la teoría de grupos 243
4.8 Grupos discretos 248
4.9 Grupos continuos 255
4.10 Generadores 264
4.11 SU(2), SU(3) y partículas nucleares 270
4.12 Grupo de Lorentz homogéneo 275
Referencias 279

Capítulo 5. SERIES INFINITAS

5.1 Conceptos fundamentales 280
5.2 Pruebas de convergencia 283
5.3 Serie alternante 294
5.4 Algebra de las series 296
5.5 Series de funciones 300
5.6 Desarrollo de Taylor 305
5.7 Series de potencias 313
5.8 Integrales elípticas 320
5.9 Números de Bernoulli 325
5.10 Productos infinitos 334
5.11 Series asintóticas o semiconvergentes 338
Referencias 344

Capítulo 6. FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA I. PROPIEDADES ANALÍTICAS; REPRESENTACIÓN CONFORMAL

6.1 Álgebra compleja 346
6.2 Condiciones de Cauchy-Riemann 352
6.3 Teorema de la integral de Cauchy 356
6.4 Fórmula de la integral de Cauchy 362
6.5 Desarrollo de Laurent 368
6.6 Representación 375
6.7 Representación conformal 384
6.8 Transformación de Schwarz-Christoffel 395
Referencias 400

Capítulo 7. FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA II. CÁLCULO DE RESIDUOS

7.1 Singularidades 401
7.2 Cálculo de residuos 406
7.3 Aplicaciones del cálculo de residuos 423
7.4 El método de los descendentes de gran pendiente 431

Capítulo 8. ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

8.1 Ecuaciones diferenciales parciales de la física teórica 440
8.2 Separación de variables. Ecuaciones diferenciales ordinarias 442
8.3 Puntos singulares 447
8.4 Soluciones de series. Método de Frobenius 451
8.5 Una segunda solución 463
8.6 Ecuación no homogénea. Función de Green 475
8.7 Soluciones numéricas 485
Referencias 488

Capítulo 9. TEORÍA DE STURM-LIOUVILLE. FUNCIONES ORTOGONALES

9.1 Ecuaciones diferenciales de unión independiente o autoadjuntas 488
9.2 Operadores hermitianos (autoadjuntos) 498
9.3 Ortogonalización de Schmidt 504
9.4 Plenitud de las funciones propias 510
Referencias 518

Capítulo 10. LA FUNCIÓN GAMMA (FUNCIÓN FACTORIAL)

10.1 Definiciones, propiedades simples 519
10.2 Funciones digamma y poligamma 529

10.3 Serie de Stirling 533
10.4 La función beta 538
10.5 Funciones gamma incompletas y funciones relacionadas 543
Referencias 549

Capítulo 11. FUNCIONES DE BESSEL

11.1 Funciones de Bessel de primera clase, $J_\nu(x)$ 550
11.2 Ortogonalidad 566
11.3 Funciones de Neumann, Funciones de Bessel de segunda clase, $N_\nu(x)$ 572
11.4 Funciones de Hankel 579
11.5 Funciones de Bessel modificadas, $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ 585
11.6 Desarrollos asintóticos 592
11.7 Funciones de Bessel esféricas 599
Referencias 613

Capítulo 12. FUNCIONES DE LEGENDRE

12.1 Función generadora 614
12.2 Relaciones de recurrencia y propiedades especiales 621
12.3 Ortogonalidad 627
12.4 Definiciones alternativas de los polinomios de Legendre 636
12.5 Funciones de Legendre asociadas 641
12.6 Armónicos esféricos 654
12.7 Momento angular y operadores sucesivos 658
12.8 El teorema de adición para armónicos esféricos 667
12.9 Integrales del producto de tres armónicos esféricos 673
12.10 Funciones de Legendre de segunda clase, $Q_n(z)$ 676
12.11 Aplicación de los sistemas coordenados esferoidales 688
12.12 Armónicos esféricos vectoriales 694
Referencias 699

Capítulo 13. FUNCIONES ESPECIALES

13.1 Funciones de Hermite 700
13.2 Funciones de Laguerre 708
13.3 Polinomios de Chebyshev (Tschebyscheff) 717
13.4 Funciones hipergeométricas 726
13.5 Funciones hipergeométricas confluentes 731
Referencias 738

Capítulo 14. SERIES DE FOURIER

14.1 Propiedades generales 739
14.2 Ventajas usos de la serie de Fourier 744
14.3 Aplicaciones de la Serie de Fourier 747

14.4 Propiedades de la serie de Fourier 754
14.5 Fenómeno de Gibbs 761
Referencias 766

Capítulo 15. TRANSFORMADAS INTEGRALES

15.1 Transformadas integrales 767
15.2 Desarrollo de la integral de Fourier 770
15.3 Transformadas de Fourier. Teorema de la inversión 773
15.4 Transformada de Fourier de las derivadas 779
15.5 Teorema de la convolución 782
15.6 Representación del momento 785
15.7 Transformadas de Laplace elementales 790
15.8 Transformada de Laplace de derivadas 796
15.9 Otras propiedades 804
15.10 Teorema de Faltung o Convolución 815
15.11 Transformación Inversa de Laplace 822
Referencias 831

Capítulo 16. ECUACIONES INTEGRALES

16.1 Introducción 832
16.2 Transformadas integrales, funciones generadoras 841
16.3 Serie de Neumann, Núcleos Separables (Degenerados) 846
16.4 Teoría de Hilbert-Schmidt 853
16.5 Funciones de Green. Una dimensión 860
16.6 Funciones de Green. Dos y tres dimensiones 871
Referencias 884

Capítulo 17. CÁLCULO DE VARIACIONES

17.1 Una variable dependiente y una independiente 885
17.2 Aplicaciones de la ecuación de Euler 890
17.3 Generalizaciones, diversas variables dependientes 900
17.4 Diversas variables independientes 904
17.5 Más de una variable dependiente, más de una variables independiente 907
17.6 Multiplicadores Lagrangianos 908
17.7 Variación sujeta a restricciones 913
17.8 Técnica variacional de Rayleigh-Ritz 920
Referencias 923

REFERENCIAS GENERALES 924
INDICE 925

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICION EN INGLES

Esta segunda edición de *Métodos matemáticos para físicos* incorpora diversos cambios, adiciones y mejoras realizadas con base en la experiencia con la primera edición y de acuerdo con las sugerencias útiles de diversas personas. Las principales revisiones se han efectuado en las secciones relacionadas con las variables complejas, funciones delta de Dirac y funciones de Green. Se han incluido nuevas secciones relacionadas con las coordenadas oblicuas, las series de Fourier-Bessel y los operadores escalonados de momento angular. La principal adición se refiere a una serie de secciones acerca de la teoría de grupos. Aun cuando estas podrían haberse presentado como un capítulo separado de la teoría de grupos, se consideró más ventajoso incluirlas en el Capítulo 4, Matrices. Ya que la teoría de grupos se ha desarrollado en términos de las matrices, tal arreglo puede considerarse razonable.

PREFACIO A LA PRIMERA EDICION EN INGLES

Métodos matemáticos para físicos, está basado sobre dos cursos en matemáticas para físicos dados por el autor durante los pasados dieciocho años, uno a primer nivel de escuela superior y otro al principio del nivel de graduados. El propósito de este libro es *proporcionar al estudiante* los conceptos de matemáticas que necesita en sus estudios avanzados de *no graduado* así como de *principiante de graduado* relacionado con la ciencia física, además de adiestrar a fondo, para un buen desarrollo, con una base consistente, a aquellos que pretenden continuar en las matemáticas de la física teórica avanzada. Se da por sentado la existencia de dominio del cálculo y buena voluntad en cuanto a la construcción de estos fundamentos matemáticos.

Este texto ha sido organizado considerando dos principios básicos. El primero, se ha escrito en una forma que se espera aliente el estudio personal. Frecuentemente se incluyen referencias, aunque no se requiere un estudio de secuencia fija y rígida del tipo página por página o capítulo por capítulo.

El lector podrá observar que las matemáticas constituyen un lenguaje bello y elegante. Desafortunadamente, la elegancia con demasiada frecuencia también significa: *elegancia para el experto* y *oscuridad para el principiante.* Aun cuando también se ha tratado de conservar la belleza intrínseca de las matemáticas, la elegancia ha sido ocasional pero deliberadamente sacrificada con la esperanza de lograr una mayor flexibilidad y claridad *para el estudiante.*

El rigor matemático ha sido tratado con el mismo espíritu. No se ha sujetado, hasta el punto de convertirse en un bloque mental, el uso de las matemáticas. No obstante, las limitaciones se explican y se proporcionan advertencias acerca de la aplicación ciega y falta de comprensión de las relaciones matemáticas.

El segundo principio básico consiste en dar énfasis y recalcar los ejemplos físicos en el texto y los ejercicios para ayudar a motivar al estudiante, para ilustrar la importancia de las matemáticas en esta ciencia y en la ingeniería.

Este principio también ha tenido una intervención importante en la selección y desarrollo del material. El tema de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, ya no consiste de una serie de soluciones artificiosas de enigmas abstractos y relativamente sin significado sino más bien la resolución y propiedades generales de las ecuaciones diferenciales que el estudiante encontrará con mayor frecuencia en la descripción de nuestro verdadero mundo físico.

INTRODUCCION

Muchos de los ejemplos físicos que se utilizan para ilustrar las aplicaciones de las matemáticas han sido tomados de la teoría electromagnética y la mecánica cuántica. Por conveniencia, las principales ecuaciones se incluyen más adelante y se identifican los símbolos. También se proporcionan referencias relacionadas con estos campos.

Teoría Electromagnética

ECUACIONES DE MAXWELL (UNIDADES MKS-VACIO)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

En este caso, $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico definido en términos de la fuerza en una carga estática y $\mathbf{B}$ es la inducción magnética definida en términos de la fuerza en una carga móvil. Los campos relacionados $\mathbf{D}$ y $\mathbf{H}$ están dados (al vacío) por

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

La cantidad ρ representa la densidad de carga libre mientras que $\mathbf{J}$ es la corriente correspondiente. Para detalles adicionales, véase: J. M. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, Nueva York: Academic Press (1965); W. K. H. Panofsky y M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*,

Reading, Mass.: Addison-Wesley (1955); J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics,* Nueva York: Wiley (1962).

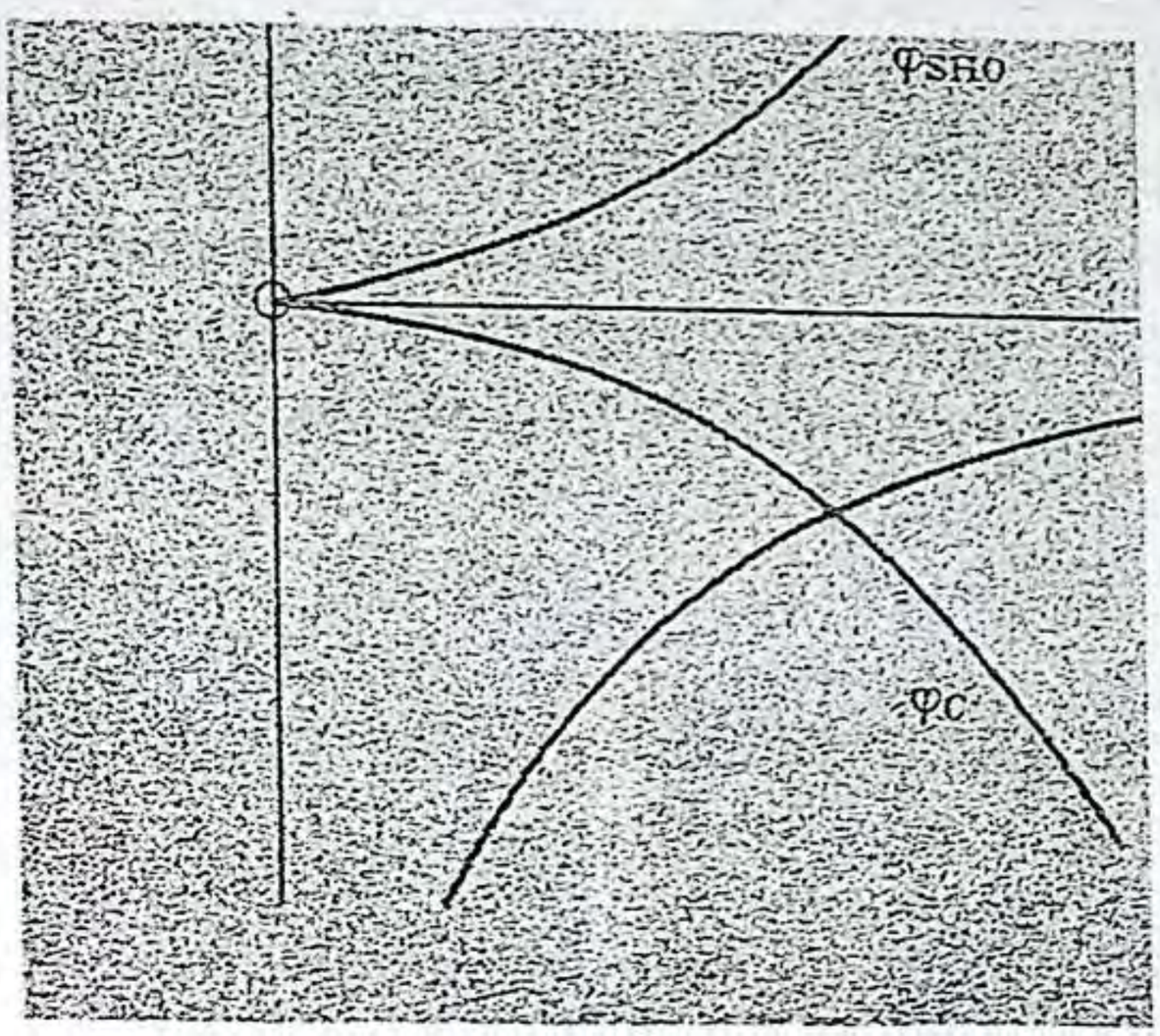
Es de hacerse notar que Marion y Jackson prefieren las unidades gaussianas. Considerando en términos generales los dos últimos textos y las grandes demandas que requieren de la competencia matemática de los estudiantes, se debe lograr una gran motivación hacia el estudio de este libro.

Mecánica Cuántica

ECUACION DE ONDA DE SCHRÖDINGER (INDEPENDIENTE DEL TIEMPO)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

ψ es la función de onda (desconocida). La energía potencial, que frecuentemente es función de la posición, se designa como V mientras que E es la energía total del sistema. La masa de la partícula que se describe mediante ψ es m. $\hbar$ es la constante de Planck dividida entre 2π. Dentro del número extremadamente grande de libros de iniciación o intermedios, son de mencionarse: A. Messiah, *Quantum Mechanics* (2 volúmenes), Nueva York: Wiley (1961); R. H. Dicke y J. P. Wittke, *Introduction to Quantum Mechanics,* Reading, Mass.: Addision-Wesley (1960); E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* (segunda edición), Nueva York: Wiley (1970).



CAPITULO 1

ANÁLISIS VECTORIAL

1.1 Definiciones, Procedimiento Elemental

En la ciencia y la ingeniería frecuentemente se pueden encontrar cantidades que tienen magnitud y tan solo magnitud: la masa, el tiempo y la temperatura. Estas se denominan cantidades escalares. En contraste, muchas de las cantidades físicas interesantes tienen magnitud y además una dirección asociada. Este segundo grupo incluye el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el momento y el momento angular. Las cantidades con magnitud y dirección se denominan cantidades vectoriales. Normalmente, en los tratamientos elementales, un vector se define como una cantidad que tiene magnitud y dirección. Para distinguir los vectores de los escalares, las cantidades vectoriales se identifican con un tipo en negrita, es decir **V**.

Desde el punto de vista histórico, es interesante hacer notar que las cantidades vectoriales indicadas se han obtenido íntegramente de la mecánica, pero el análisis vectorial no fue utilizado en el desarrollo de la mecánica y, de hecho, no fue creado por la misma. La necesidad del análisis vectorial se hizo evidente tan solo con el desarrollo de la teoría electromagnética de Maxwell y considerando la importancia de la naturaleza vectorial inherente de las cantidades tales como el campo eléctrico y el campo magnético.

Nuestro vector puede representarse convenientemente por medio de una flecha cuya longitud es proporcional a la magnitud. La dirección de la flecha indica la dirección del vector, de modo que el sentido positivo de dirección está indicado por el punto. En esta representación, la adición vectorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{1.1}$$

consiste en colocar el extremo posterior del vector **B** en el punto del vector **A**. El vector **C** se representa luego por medio de una flecha trazada desde la parte posterior de **A** hasta el punto de **B**. Este procedimiento del triángulo de adición proporciona significado a la Ec. 1.1 y se ilustra en la Fig. 1.1. Completando el paralelogramo, se observa que

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \tag{1.2}$$

tal como se muestra en la Fig. 1.2. De manera similar,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

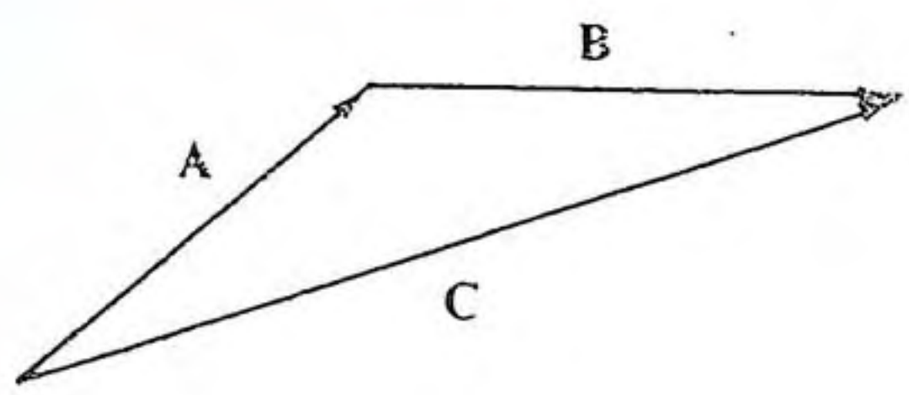


Fig. 1.1 Ley del triángulo para la adición de vectores

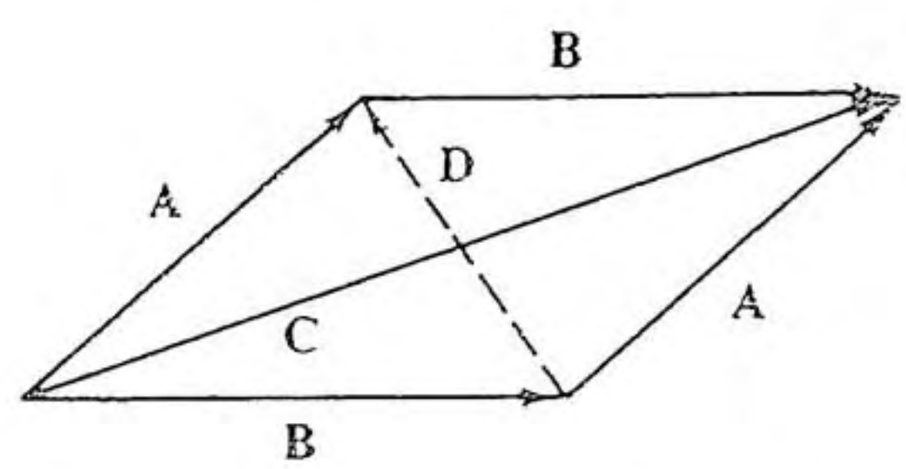


Fig. 1.2 Ley del paralelogramo para la adición de vectores

Un ejemplo físico directo de esta ley de adición del paralelogramo es el de un peso suspendido por dos cuerdas. Si el punto de junta (*O* en la Fig. 1.3) se encuentra en equilibrio, la suma vectorial de las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ debe cancelar la fuerza de gravedad hacia abajo, $\mathbf{F}_3$. En este caso, la ley de

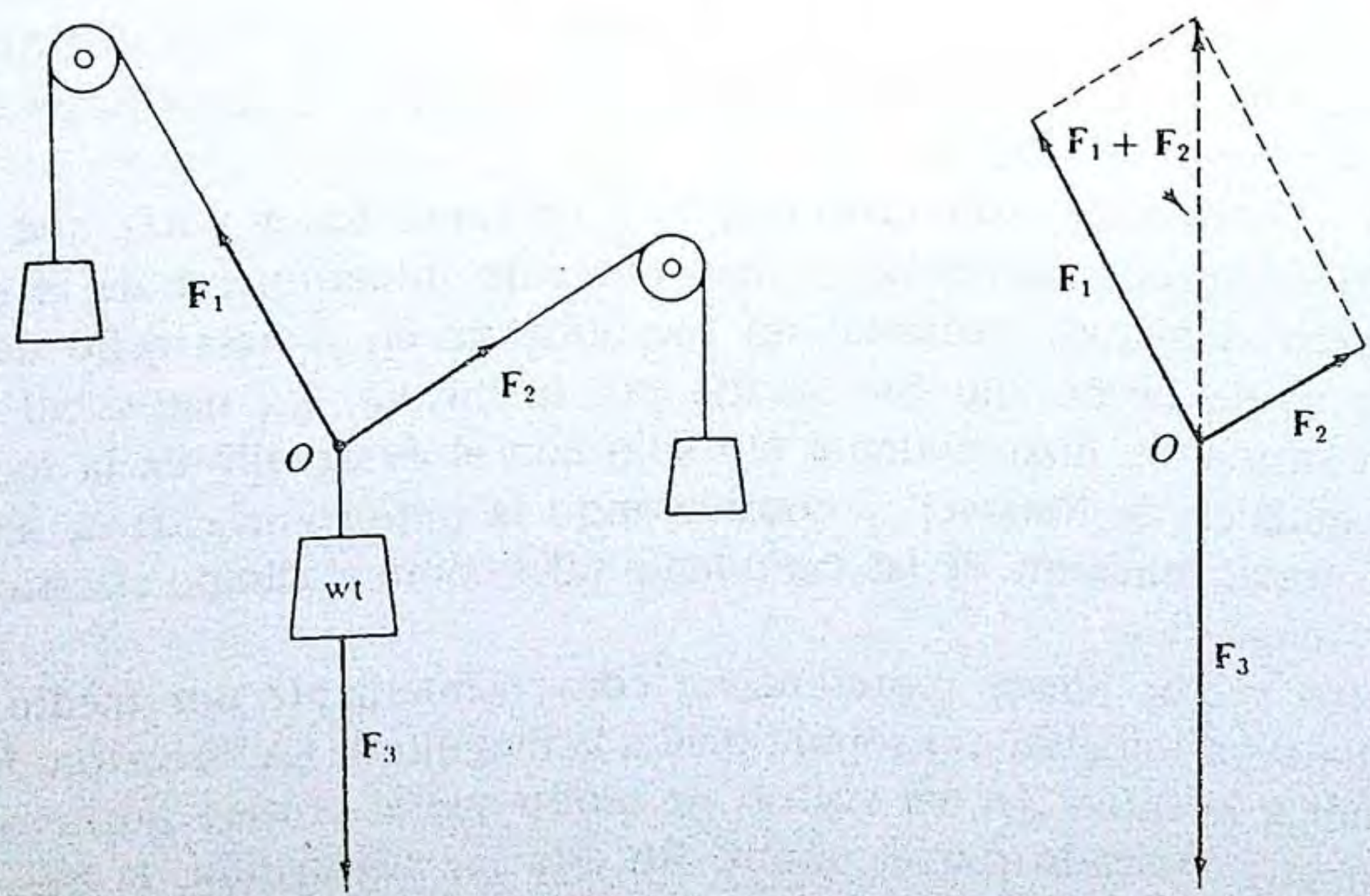


Fig. 1.3 Equilibrio de fuerzas. $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3$

adición del paralelogramo está sujeta a la verificación experimental inmediata.[1]

Observe que los vectores se tratan como objetos geométricos que son independientes de cualquier sistema de coordenadas. De hecho, aún no hemos introducido un sistema de coordenadas. Este concepto de independencia con relación a un sistema de coordenadas preferido se desarrolla con detalle considerable en la siguiente sección.

La representación de un vector **A** por medio de una flecha sugiere una segunda posibilidad. La flecha **A** (Fig. 1.4), que se inicia desde el origen,[2] termina en el punto (x_1, y_1, z_1). Siendo así, si se acuerda que el vector debe comenzar en el origen, el extremo positivo debe especificarse al proporcionar las coordenadas cartesianas (x_1, y_1, z_1) de la cabeza de flecha.

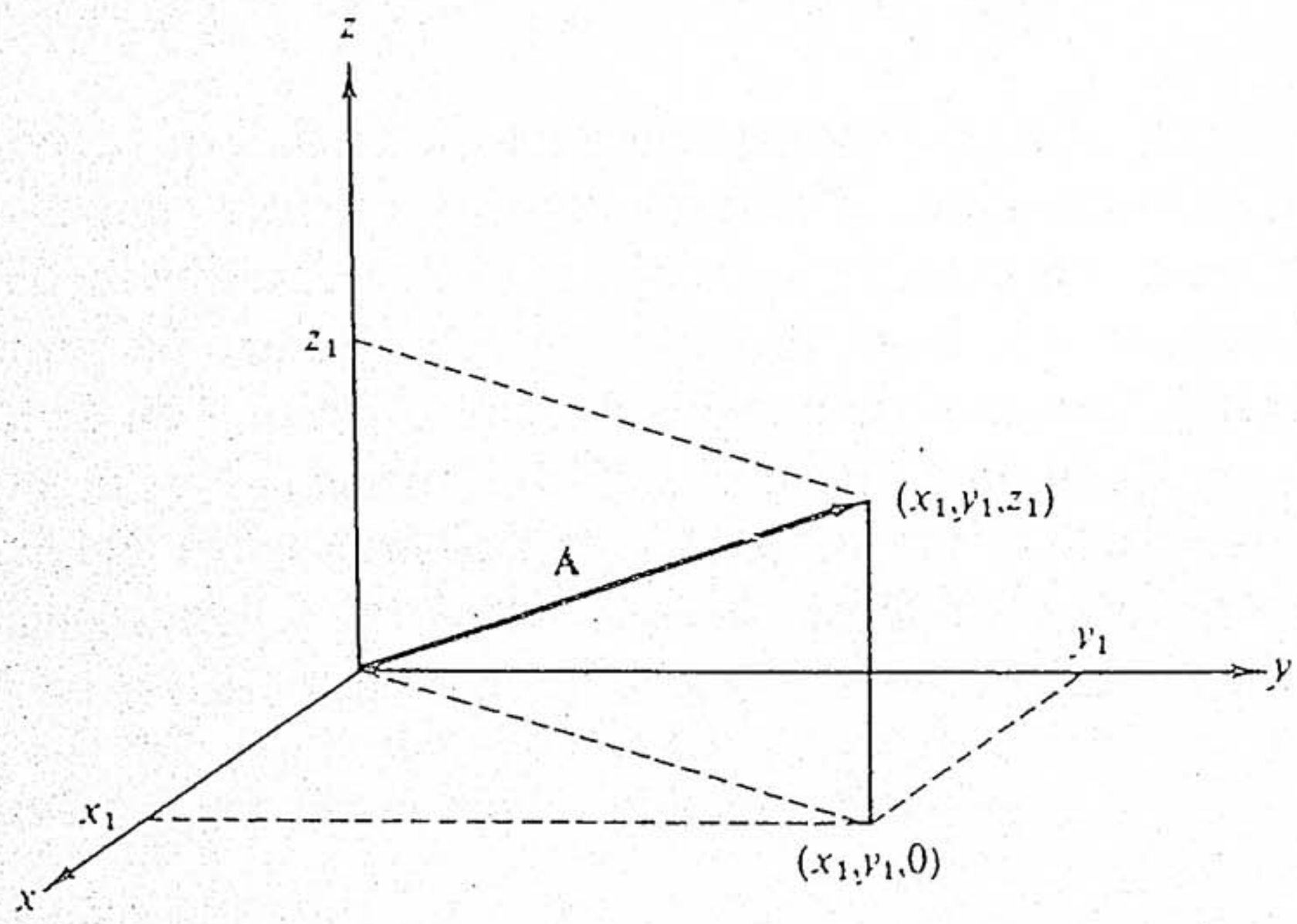


Fig. 1.4 Componentes cartesianos

Aun cuando **A** podría haber representado cualquier cantidad vectorial (momento, campo eléctrico, etc.), cualquier cantidad vectorial de importancia particular, el desplazamiento desde el origen hasta el punto (x_1, y_1, z_1) se designa por medio del símbolo especial **r**. En esta forma se tiene la posibilidad de referir el desplazamiento ya sea al vector **r** o como una colección (x_1, y_1, z_1), es decir las coordenadas del punto final.

$$\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1). \tag{1.3}$$

[1] Desde un punto de vista estricto, la adición de paralelogramo fue introducida por definición. Los experimentos demuestran que al suponerse que las fuerzas son cantidades vectoriales y al combinarlas mediante la adición de paralelogramo, la condición de equilibrio de una fuerza resultante cero se satisface.

[2] El lector podrá observar que existe la posibilidad de empezar en cualquier punto de la estructura de referencia cartesiana. Se ha escogido el origen con propósitos de simplificación.

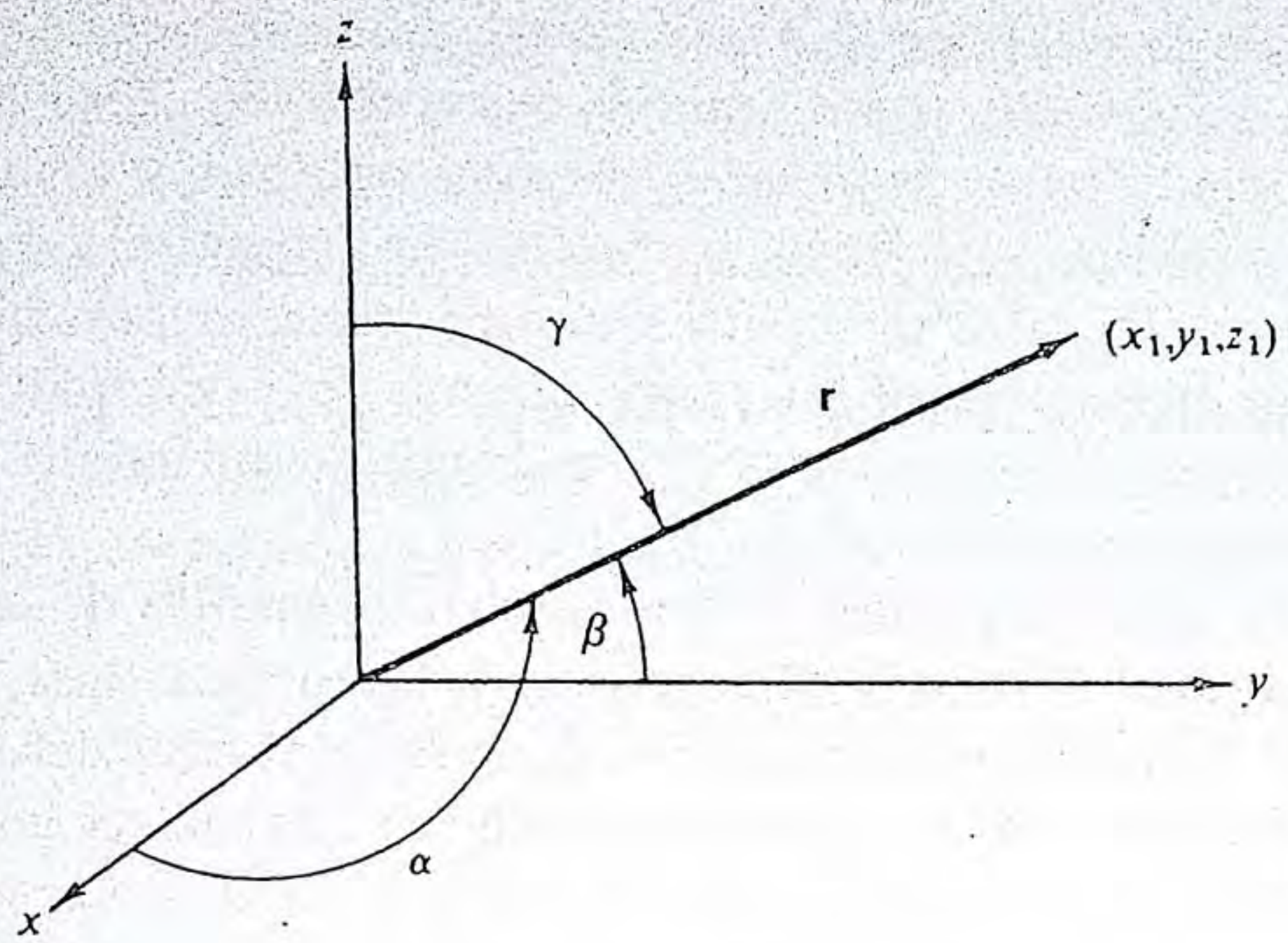


Fig. 1.5 Cosenos de dirección

Utilizando r para la magnitud del vector **r**, la Fig. 1.5 muestra que las coordenadas del punto final y la magnitud están relacionadas por

$$x_1 = r \cos \alpha, \qquad y_1 = r \cos \beta, \qquad z_1 = r \cos \gamma. \tag{1.4}$$

Cos α, cos β, y cos γ se denominan los *cosenos de dirección,* siendo α el ángulo entre el vector dado y el eje x positivo, y así sucesivamente. Otro fragmento adicional de vocabulario es: las cantidades x_1, y_1, y z_1 se conocen como *componentes* (cartesianos) de **r** o las *proyecciones* de **r**.

Si procedemos de la misma forma, cualquier vector **A** puede resolverse en sus componentes (o proyectarse en los ejes coordenados) para resultar en

$$A_x = A \cos \alpha, \tag{1.5}$$

en donde α es el ángulo entre **A** y el eje x positivo. Nuevamente, se puede seleccionar el referirse al vector como una cantidad simple **A** o a sus componentes (A_x, A_y, A_z). Observe que el subíndice x en A_x define el componente x y no una dependencia en la variable x. A_x puede ser función de x, y y z en la forma $A_x(x, y, z)$.

En esta etapa, es conveniente introducir los vectores unitarios a lo largo de cada uno de los ejes coordenados. Sea **i** un vector de magnitud unitaria apuntando hacia la dirección de x positiva, **j** un vector de magnitud unitaria en la dirección y positiva y **k** un vector de magnitud unitaria en la dirección z positiva. Entonces, $\mathbf{i}A_x$ es un vector con magnitud igual a A_x y en la dirección x positiva. Mediante la suma vectorial

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z, \tag{1.6}$$

la cual establece que un vector es igual a la suma vectorial de sus componentes. Observe que al desaparecer **A**, todos sus componentes deben

desaparecer individualmente; es decir, cuando

$$\mathbf{A} = 0, \quad \text{entonces} \quad A_x = A_y = A_z = 0.$$

Finalmente, mediante el teorema de Pitágoras, la magnitud del vector **A** es

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}. \tag{1.7a}$$

Esta resolución de un vector en sus componentes puede realizarse por medio de diversos sistemas coordenados, tal como se demuestra en el Capítulo 2. Aquí nos limitaremos a las coordenadas cartesianas.

La Ec. 1.6 realmente es una afirmación de que los tres vectores unitarios, **i**, **j** y **k**, se *extienden* sobre nuestro espacio tridimensional: cualquier vector constante puede indicarse como una combinación lineal de **i**, **j** y **k**. Ya que **i**, **j** y **k** son independientes linealmente (ninguno de estos es una combinación de otros dos), forman la *base* del verdadero espacio tridimensional.

Como sustituto de la técnica gráfica, la adición y resta de vectores puede realizarse ahora en términos de sus componentes. Para $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z$,

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_x \pm B_x) + \mathbf{j}(A_y \pm B_y) + \mathbf{k}(A_z \pm B_z). \tag{1.7b}$$

EJEMPLO 1.1.1

Sea

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Mediante la Ec. 1.7*b*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 8\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

EJERCICIOS

1.1.1 Demuestre la forma de encontrar **A** y **B** teniendo **A** + **B** y **A** − **B**.

1.1.2 El vector **A** cuya magnitud es de 10 unidades forma ángulos iguales con los ejes coordenados. Encuentre A_x, A_y, y A_z.

1.1.3 Calcule los componentes de un vector unitario localizado en el plano *xy* y que forma ángulos iguales con las direcciones positivas de los ejes *x* y *y*.

1.1.4 Una ecuación vectorial puede reducirse a la forma **A** = **B**. A partir de esto, demuestre que la ecuación vectorial es equivalente a tres ecuaciones *escalares*.
Suponiendo la validez de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ como ecuación vectorial, esto significa que a_x depende solamente de F_x y es independiente de F_y y F_z.

1.1.5 Los vértices de un triángulo A, B y C están dados por los puntos (—1, 0, 2), (0, 1, 0) y (1, —1, 0), respectivamente. Encuentre el punto D de modo que la figura ABDC forme un paralelogramo plano. *Respuesta.* (2, 0, —2).

1.1.6 Un triángulo está definido por los vértices de tres vectores, **A**, **B** y **C** que se extienden desde su origen. En términos de **A**, **B** y **C** demuestre que la suma *vectorial* de los lados sucesivos del triángulo ($AB + BC + CA$) es cero.

1.1.7 Una esfera de radio a se encuentra centrada en el punto $\mathbf{r}_1$.
(a) Escriba la ecuación algebraica para la esfera.
(b) Escriba una ecuación *vectorial* para la esfera.

Respuesta. (a) $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2$.
(b) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}$.
(**a** toma todas las direcciones pero tiene una magnitud fija, a).

1.1.8 Un reflector de esquina está formado por tres superficies reflectoras mutuamente perpendiculares.

Demuestre que un rayo de luz incidente sobre el reflector de esquina (incidente en las tres superficies) se refleja nuevamente a lo largo de una línea paralela a la línea de incidencia.

Sugerencia: Considere el efecto de la reflexión en los componentes de un vector que describe la dirección del rayo de luz.

1.2 Rotación de Coordenadas

En la última sección, los vectores han sido definidos o representados en dos formas equivalentes: (1) especificando la magnitud y la dirección, por medio de una flecha, y (2) especificando los componentes. En esta sección se proporciona una tercera definición en términos del comportamiento bajo la rotación del sistema de coordenadas.

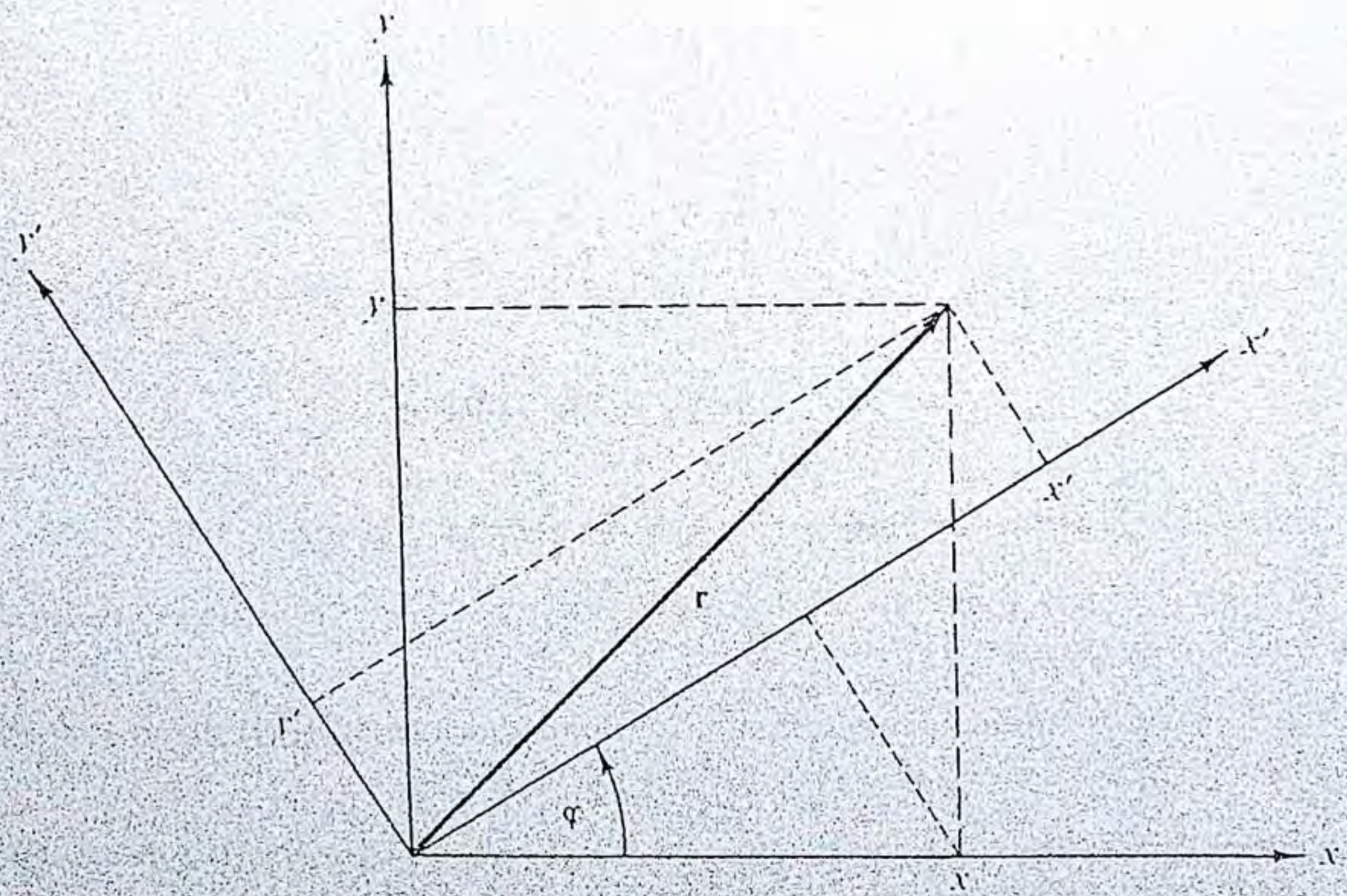


Fig. 1.6 Rotación de coordenadas cartesianas

La definición de un vector como una cantidad con magnitud y dirección ya no resulta consistente en los estudios más avanzados. Por una parte, se encuentran cantidades como las constantes elásticas y el índice de refracción en los cristales anisotrópicos que tienen magnitud y dirección *pero* que no son vectores. Por otra parte, nuestro procedimiento simplista resulta inadecuado para generalizar, para extenderse a cantidades más complejas. Buscaremos una nueva definición de vector utilizando nuestro vector de desplazamiento **r** como prototipo.

Existe una base física importante para nuestro desarrollo de la nueva definición. Nuestro mundo físico está descrito por las matemáticas, pero él mismo y cualquier predicción física que pudiéramos establecer debe ser *independiente* de nuestro análisis matemático. Algunos escritores gustan de comparar el sistema físico con una construcción y el análisis matemático con los andamios utilizados para la construcción del edificio. Al final, los andamios se eliminan y queda el edificio.

En nuestro caso específico, supondremos que el espacio es isotrópico; es decir, no hay una dirección preferida o todas las direcciones son equivalentes. Siendo así, el sistema físico que se analiza o la ley física establecida no puede y no debe depender de nuestra selección o la *orientación* de nuestro sistema de coordenadas.

Ahora regresaremos al concepto del vector **r** como un objeto geométrico independiente del sistema de coordenadas. Consideremos a **r** en dos sistemas diferentes, uno rotado con relación al otro.

Por simplicidad consideramos primeramente el caso bidimensional. Si las coordenadas (x, y) se hacen girar en el sentido contrario a las manecillas del reloj a través de un ángulo φ, *conservando* **r** *fijo*, se tienen las siguientes relaciones entre los componentes resueltos en el sistema original (sin apostrofar) y los resueltos en el nuevo sistema rotado (apostrofado):

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi, \\ y' &= -x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \tag{1.8}$$

En la Sección 1.1 se indicó que un vector se podía representar mediante las coordenadas de un punto; es decir, las coordenadas eran proporcionales a los componentes vectoriales. En consecuencia, los componentes de un vector deben transformarse por la rotación en las coordenadas de un punto (tal como **r**). En consecuencia, siempre que cualquier par de cantidades (A_x, A_y) en el sistema de coordenadas xy se transforme en (A'_x, A'_y) debido a esta rotación del sistema de coordenadas con

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \cos \varphi + A_y \operatorname{sen} \varphi \\ A'_y &= -A_x \operatorname{sen} \varphi + A_y \cos \varphi, \end{aligned} \tag{1.9}$$

definimos[1] A_x y A_y como los componentes del vector **A**. Nuestro vector queda definido ahora en términos de la transformación de sus componen-

[1] La definición correspondiente de una cantidad escalar es $S' = S$, es decir invariante bajo la rotación de las coordenadas.

tes bajo la rotación del sistema de coordenadas. Si A_x y A_y se transforman del mismo modo que x y y, los componentes del vector de desplazamiento bidimensional son componentes del vector $\mathbf{A}$. Si A_x y A_y no muestran este comportamiento cuando se hacen girar las coordenadas, no forman un vector.

Para completar la definición debemos asignar un significado a A'_x y A'_y en la Ec. 1.9. Supongamos que los componentes del vector $\mathbf{A}$ son funciones de las coordenadas y posiblemente de algún otro vector constante $\mathbf{c}$.

$$\begin{aligned} A_x &= A_x(x, y, c_x, c_y), \\ A_y &= A_y(x, y, c_x, c_y). \end{aligned} \tag{1.9a}$$

En el sistema de coordenadas apostrofado, $\mathbf{A}$ tiene los componentes A'_x y A'_y, que también son funciones de posición (en el sistema apostrofado también llamado imprimado) y $\mathbf{c}$.

$$\begin{aligned} A'_x &= A'_x(x', y', c'_x, c'_y) \\ A'_y &= A'_y(x', y', c'_x, c'_y). \end{aligned} \tag{1.9b}$$

Si utilizamos la Ec. 1.8, las cantidades apostrofadas x', y', c'_x, c'_y en la Ec. 1.9*b* se pueden sustituir por las cantidades sin apostrofar y el ángulo de rotación φ. Con objeto de no originar un sistema preferido, la dependencia funcional de A'_x y A'_y respecto a las variables apostrofadas debe ser la misma para todos los sistemas coordenados apostrofados.

Ahora bien, para el caso especial $\varphi = 0$, tenemos $x' = x$, $y' = y$, etc. Evidentemente,

$$\begin{aligned} A_x &= A'_x, \\ A_y &= A'_y. \end{aligned}$$

En consecuencia, A'_x es la misma función de x', y', c'_x, y c'_y como A_x es de las cantidades sin apostrofar correspondientes; similarmente para A'_y y A_y.

Los componentes de vector A_x y A_y que satisfacen las ecuaciones de definición, Ec. 1.9, asocian una magnitud A y una dirección con cada punto en el espacio. La magnitud es una cantidad escalar, invariable con respecto a la rotación del sistema coordenado. La dirección (relativa al sistema sin apostrofar) de modo similar es invariante con respecto a la rotación del sistema coordenado (véase el Ejercicio 1.2.6). El resultado de todo esto es que los componentes de un vector pueden variar de acuerdo con la rotación del sistema coordenado apostrofado. Esto es lo que dice la Ec. 1.9. Pero la variación con el ángulo es justamente tal que los componentes en el sistema coordenado rotado A'_x y A'_y definen un vector con la misma magnitud y la misma dirección respecto a los ejes xy como en el caso de A_x y A_y.

EJEMPLO 1.2.1

Dado un par de cantidades $(-y, x)$, demuestre que son los componentes de un vector bidimensional.

Ya que la cuestión de que estos sean o no los componentes de un vector depende, por definición, de sus propiedades de transformación, procederemos a investigar la forma en que se transforman. Sea

$$\begin{aligned} V'_x &= -y\cos\varphi + x\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ V'_y &= y\,\mathrm{sen}\,\varphi + x\cos\varphi, \end{aligned} \tag{1.10}$$

utilizando $V_x = -y$, $V_y = x$. Mediante la argumentación anterior (V'_x es la misma función de x' y y' como V_x lo es de x y y), se tiene

$$\begin{aligned} V'_x &= -y', \\ V'_y &= x', \end{aligned} \tag{1.11}$$

y utilizando la Ec. 1.8 para la transformación coordenada para eliminar las variables apostrofadas, se observa que las igualdades son consistentes. La Ec. 1.9, que define la ecuación de un vector bidimensional, queda satisfecha. En consecuencia $(-y, x)$ son los componentes de un vector.

EJEMPLO 1.2.2

Como ejemplo de una cantidad que, de acuerdo con nuestra definición, *no* es un vector, considérese $\mathbf{V} = \mathbf{i}x - \mathbf{j}y = (x, -y)$. Sometiendo a prueba las propiedades de transformación, se tiene mediante la Ec. 1.9

$$\begin{aligned} V'_x &= \quad x' = x\cos\varphi - y\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ V'_y &= -y' = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi - y\cos\varphi. \end{aligned}$$

Evidentemente estas ecuaciones no son consistentes con la Ec. 1.8. La Ec. 1.9 *no* se satisface. En consecuencia $(x, -y)$ *no* son componentes de un vector.

Muchos escritores prefieren designar las funciones A_x y A_y que satisfacen la Ec. 1.9 como los componentes de un *campo de vector* (bidimensional). Diferentes de los campos de vector son los *vectores constantes* tales como $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, los cuales no se transforman, de modo que $\mathbf{i}'$ es la misma función de x' y y' como lo es de x y y. De hecho, $\mathbf{i}$ *no* es función de x y y en ninguna forma; es una constante. Para una nota adicional acerca de los vectores constantes, véase el Ejemplo 1.2.1

Para pasar al sistema de tres dimensiones y posteriormente al de cuatro, es conveniente utilizar una notación más compacta. Sea

$$\begin{aligned} x &\to x_1 \\ y &\to x_2 \\ a_{11} &= \cos\varphi, \qquad a_{12} = \mathrm{sen}\,\varphi, \\ a_{21} &= -\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad a_{22} = \cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Entonces la Ec. 1.8 se transforma en

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \tag{1.13}$$

El coeficiente a_{ij} puede interpretarse como un coseno de dirección, el coseno del ángulo entre x_i' y x_j; es decir,

$$a_{12} = \cos(x_1', x_2) = \operatorname{sen} \varphi,$$
$$a_{21} = \cos(x_2', x_1) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} \varphi.$$

La ventaja de la nueva notación[1] es que nos permite el uso del símbolo de suma $\sum$ y volver a establecer la Ec. 1.13 en la forma

$$x_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2. \tag{1.14}$$

Observe que i permanece como parámetro, lo cual origina una ecuación cuando se iguala a 1 y a una segunda ecuación cuando se iguala a 2. El índice j, evidentemente, es un índice de suma, un índice umbral, y justamente como con una variable de integración j puede sustituirse mediante cualquier otro símbolo conveniente.

La generalización de tres, cuatro o N dimensiones es bastante simple. El conjunto de N cantidades, V_j, se dice que corresponde a los componentes de un vector N-dimensional, $\mathbf{V}$, solamente cuando los valores en un sistema coordenado rotado están dados por

$$V_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}V_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.15}$$

Como antes, a_{ij} es el coseno del ángulo entre x_i' y x_j. Frecuentemente, el límite superior N y el intervalo correspondiente de i no se indican. Se da por sentado que el lector conoce cuántas dimensiones tiene el espacio.

Para la definición de a_{ij} como el coseno del ángulo entre la dirección x_i' positiva y la dirección x_j positiva, podemos establecer (coordenadas cartesianas)[2]

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}. \tag{1.16}$$

[1] El lector podría haber quedado sorprendido por la sustitución de un parámetro φ por cuatro parámetros a_{ij}. Evidentemente, a_{ij} no constituye un conjunto mínimo de parámetros. Para dos dimensiones, las cuatro a_{ij} quedan sometidas a las tres limitaciones indicadas en la Ec. 1.18. La justificación para el conjunto redundante de los cosenos de dirección es la conveniencia que proporciona. Con buena disposición, esta conveniencia será más evidente en los Capítulos 3 y 4. Para las rotaciones tridimensionales (9 a_{ij}, pero solamente tres independientes), las descripciones alternativas son proporcionadas por: (1) los ángulos de Euler que se describen en la Sección 4.3, (2) los cuaterniones y (3) los parámetros de Cayley-Klein. Estas alternativas tienen sus ventajas y desventajas respectivas.

[2] Diferenciar $x_i' = \sum a_{ik}x_k$ con respecto a x_j. Véase la descripción que sigue de la Ec. 1.21.

Observe cuidadosamente que estas son *derivadas parciales*. Mediante el uso de la Ec. 1.16. La Ec. 1.15 se transforma en

$$V'_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j. \tag{1.17}$$

El coseno de dirección a_{ij} satisface una condición de *ortogonalidad*

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \tag{1.18}$$

o, en forma equivalente

$$\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}. \tag{1.19}$$

El símbolo δ_{jk} es la delta de Kronecker definida por

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= 1 \quad \text{para} \quad j = k, \\ \delta_{jk} &= 0 \quad \text{para} \quad j \neq k. \end{aligned} \tag{1.20}$$

El lector puede verificar fácilmente que las Ecs. 1.18 y 1.19 son consistentes en el caso bidimensional mediante la sustitución de la a_{ij} específica de la Ec. 1.12. El resultado es la identidad bien conocida $\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ para el caso no desapareciente. Para verificar la Ec. 1.18, en forma general, se hace uso de las formas de derivada parcial de la Ec. 1.16 para obtener

$$\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k}. \tag{1.21}$$

La última etapa es el resultado de las reglas estándar para la diferenciación parcial, suponiendo que x_j es una función de x'_1, x'_2, x'_3, etc. El resultado final, $\partial x_j / \partial x_k$, es igual a δ_{jk}, ya que x_j y x_k $(j \neq k)$ se han supuesto que son perpendiculares (dos o tres dimensiones) u ortogonales (para cualquier número de dimensiones). Si $j = k$, la derivada parcial evidentemente es igual a 1.

Al redefinir un vector en términos de la forma en que sus componentes se transforman bajo la rotación del sistema coordenado, son dos los aspectos que merecen una importancia especial:

1. Esta definición se desarrolla debido a que es de utilidad y apropiada para describir nuestro mundo físico. Nuestras ecuaciones vectoriales serán independientes de cualquier sistema coordenado particular. (El sistema coordenado ni siquiera tiene que ser cartesiano.) La ecuación de vector puede expresarse siempre en algún sistema coordenado particular y, para la obtención de resultados numéricos, la ecuación debe expresarse finalmente en algún sistema coordenado específico.

2. Esta definición queda sujeta a una generalización que deja al descubierto la rama de las matemáticas conocida como análisis tensor (Capítulo 3).

También se tiene una cualidad. El comportamiento de los componentes de vector bajo la rotación de las coordenadas se utiliza en la Sección 1.3 para demostrar que un producto escalar es un escalar, en la Sección 1.4 para demostrar que un producto vectorial es un vector y en la Sección 1.6 para demostrar que el gradiente de un escalar, $\nabla\psi$, es un vector. El resto de este capítulo proseguirá con la base de definiciones menos limitantes del vector indicadas en la Sección 1.1. Esto es consistente con el concepto de vector o espacio vectorial (o espacio lineal) del álgebra lineal. Aquí, el nombre de vector se aplica a cualquier objeto, nuestros tres componentes de vector, polinomios o funciones, etc., que puedan sumarse entre sí y multiplicarse por números (escalares), como lo hemos hecho en las dos secciones anteriores. La colección de tales objetos se denomina espacio de vector o espacio lineal. Puede tener n dimensiones, no tan solo dos o tres, o puede ser infinitamente dimensional. Los vectores pueden ser reales o complejos. Gran parte de la teoría cuántica moderna utiliza el espacio vectorial de dimensiones infinitas (espacio de Hilbert) en que los vectores unitarios se sustituyen por funciones ortonormales. Nuestras series de Fourier, Capítulo 14, son un ejemplo de esto.

EJERCICIOS

1.2.1 Dado un vector *constante* **V** con los componentes $V_x = 1$ y $V_y = 0$, demuestre que los componentes de **V** en un sistema rotado son

$$V_x' = \cos\varphi,$$
$$V_y' = -\operatorname{sen}\varphi,$$

de acuerdo con la ley de transformación vectorial. Evidentemente se ha introducido, y era de esperarse, una dependencia de φ. Hemos escogido una dirección preferida en el espacio al introducir el vector constante. **V** es un vector de acuerdo con el sentido de la Sección 1.1 y continuamos aceptando el mismo como vector debido a su utilidad.

1.2.2 Determine si lo siguiente satisface la regla de transformación vectorial (Ec. 1.15).
(a) $(x - y, x + y, 0)$, para la rotación alrededor del eje z.
(b) $(0, 2z + y, z - 2y)$, para la rotación alrededor del eje x.
(c) $(y^2 + z^2, -xy, -xz)$, para la rotación alrededor de cada uno de los ejes coordenados.

1.2.3 (a) Demuestre que $(xyc_x + y^2c_y, -x^2c_x - xyc_y)$ forman un vector. Las cantidades c_x y c_y son componentes de un vector constante **c**.
(b) Repita para $(xyc_x - x^2c_y, y^2c_x - xyc_y)$.

1.2.4 Un vector bidimensional **V** tiene la forma $(ax + by, cx + dy)$ con las constantes a, b, c y d. Demuestre que **V** es una combinación lineal del vector radial $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ y el vector tangencial $\mathbf{t} = \mathbf{i}y - \mathbf{j}x$.

$$\mathbf{V} = a\mathbf{r} + b\mathbf{t}.$$

Sugerencia: La ley de transformación vectorial debe ser consistente (a) para todos los ángulos y (b) para todos los puntos (x, y).

1.2.5 Demuestre la condición de ortogonalidad $\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}$. Como caso especial de esto, los cosenos de dirección de la Sección 1.1 satisfacen la relación

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

un resultado que también se origina de la Ec. 1.7*a*.

1.2.6 (a) Demuestre que la magnitud de un vector **A**, $A = (A_x^2 + A_y^2)^{1/2}$ es independiente de la orientación del sistema coordenado rotado,

$$(A_x^2 + A_y^2)^{1/2} = (A_x'^2 + A'^2)^{1/2}$$

independiente del ángulo de rotación φ.

Esta independencia del ángulo se expresa diciendo que A es *invariante* bajo las rotaciones.

(b) En cierto punto (x, y), **A** define un ángulo α relativo al eje x positivo y α' relativo al eje x' positivo. El ángulo desde x hasta x' es φ. Demuestre que $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ define la *misma* dirección en el espacio cuando se expresa en términos de sus componentes apostrofados lo mismo que en términos de sus componentes sin apostrofar, es decir, que

$$\alpha' = \alpha - \varphi.$$

1.3 Producto Escalar o Puntal

Habiendo definido los vectores, ahora procederemos a combinar los mismos. Las leyes para la combinación de los vectores deben ser consistentes matemáticamente. A partir de las posibilidades de que sean consistentes, seleccionaremos dos que sean de interés matemático y físico. Una tercera posibilidad se introduce en el Capítulo 3, en que se forman los tensores.

La combinación de $AB \cos \theta$, en que A y B son las magnitudes de dos

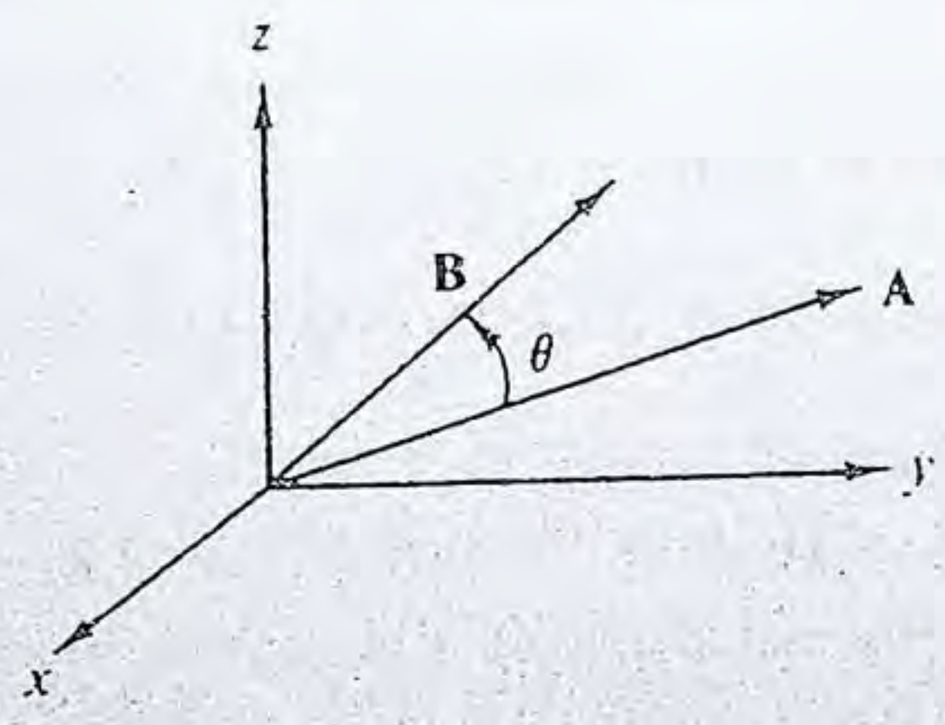


Fig. 1.7 Producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$

vectores y θ, el ángulo entre los mismos, se presenta frecuentemente en física. Por ejemplo,

$$\text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{desplazamiento} \times \cos \theta$$

normalmente se interpreta como el desplazamiento multiplicado por la proyección de la fuerza a lo largo del desplazamiento.

Con tales aplicaciones en mente, definimos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_i A_i B_i \tag{1.22}$$

como el producto escalar o puntal de **A** y **B**. Observamos que a partir de esta definición $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Los vectores unitarios **i**, **j** y **k** satisfacen las relaciones

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \tag{1.22a}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0. \end{aligned} \tag{1.22b}$$

Si se reorientan los ejes[1] y se considera que **A** define un nuevo eje x, entonces

$$A_x = A, \qquad A_y = 0, \qquad A_z = 0$$

y

$$B_x = B \cos \theta.$$

Entonces, mediante la Ec. 1.22

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta, \tag{1.23}$$

que puede considerarse como una segunda definición del producto escalar. Esto demuestra que el trabajo es un producto escalar de la fuerza y el desplazamiento.

EJEMPLO 1.3.1

Para los dos vectores **A** y **B** del Ejemplo 1.1.1, $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (12 - 12 - 9) = -9$$

mediante la Ec. 1.22. En este caso, la proyección de **A** en **B** (o de **B** en **A**) es negativa. En realidad

$$|\mathbf{A}| = (36 + 16 + 9)^{1/2} = (61)^{1/2} = 7.81,$$

$$|\mathbf{B}| = (\ 4 + \ 9 + 9)^{1/2} = (22)^{1/2} = 4.69,$$

y $\cos \theta = -0.246$, $\theta = 104.2°$.

Si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ y conociendo que $\mathbf{A} \neq 0$ y $\mathbf{B} \neq 0$, de la Ec. 1.23 se tiene que $\cos \theta = 0$ o $\theta = 90°, 270°$, etc. Los vectores **A** y **B** deben ser perpendiculares. Alternativamente, se puede decir que **A** y **B** son ortogonales. Los vectores unitarios, **i**, **j** y **k** son ortogonales mutuamente. Para desa-

[1] La invariancia de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bajo rotación de las coordenadas se demuestra posteriormente en esta sección.

rrollar esta noción de la ortogonalidad en una etapa adicional, supóngase que **n** es un vector unitario y **r** es un vector diferente de cero en el plano xy; es decir, $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$. Si

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

para *todas* las selecciones de **r**, entonces **n** debe ser perpendicular (ortogonal) al plano xy.

Aún no hemos demostrado que la palabra escalar quede justificada o que el producto escalar sea de hecho una cantidad escalar. Para esto, investigaremos el comportamiento de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bajo la rotación del sistema coordenado. Mediante el uso de la Ec. 1.15.

$$\begin{aligned} A'_x B'_x + A'_y B'_y + A'_z B'_z = & \sum_i a_{xi} A_i \sum_j a_{xj} B_j \\ & + \sum_i a_{yi} A_i \sum_j a_{yj} B_j \\ & + \sum_i a_{zi} A_i \sum_j a_{zj} B_j . \end{aligned} \tag{1.24}$$

Utilizando los índices k y l para sumar sobre x, y y z, se obtiene

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_l \sum_i \sum_j a_{li} A_i a_{lj} B_j , \tag{1.25}$$

y, mediante readaptación de los términos en el lado derecho.

$$\begin{aligned} \sum_k A'_k B'_k &= \sum_i \sum_j \sum_l (a_{li} a_{lj}) A_i B_j \\ &= \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_i B_j \\ &= \sum_i A_i B_i . \end{aligned} \tag{1.26}$$

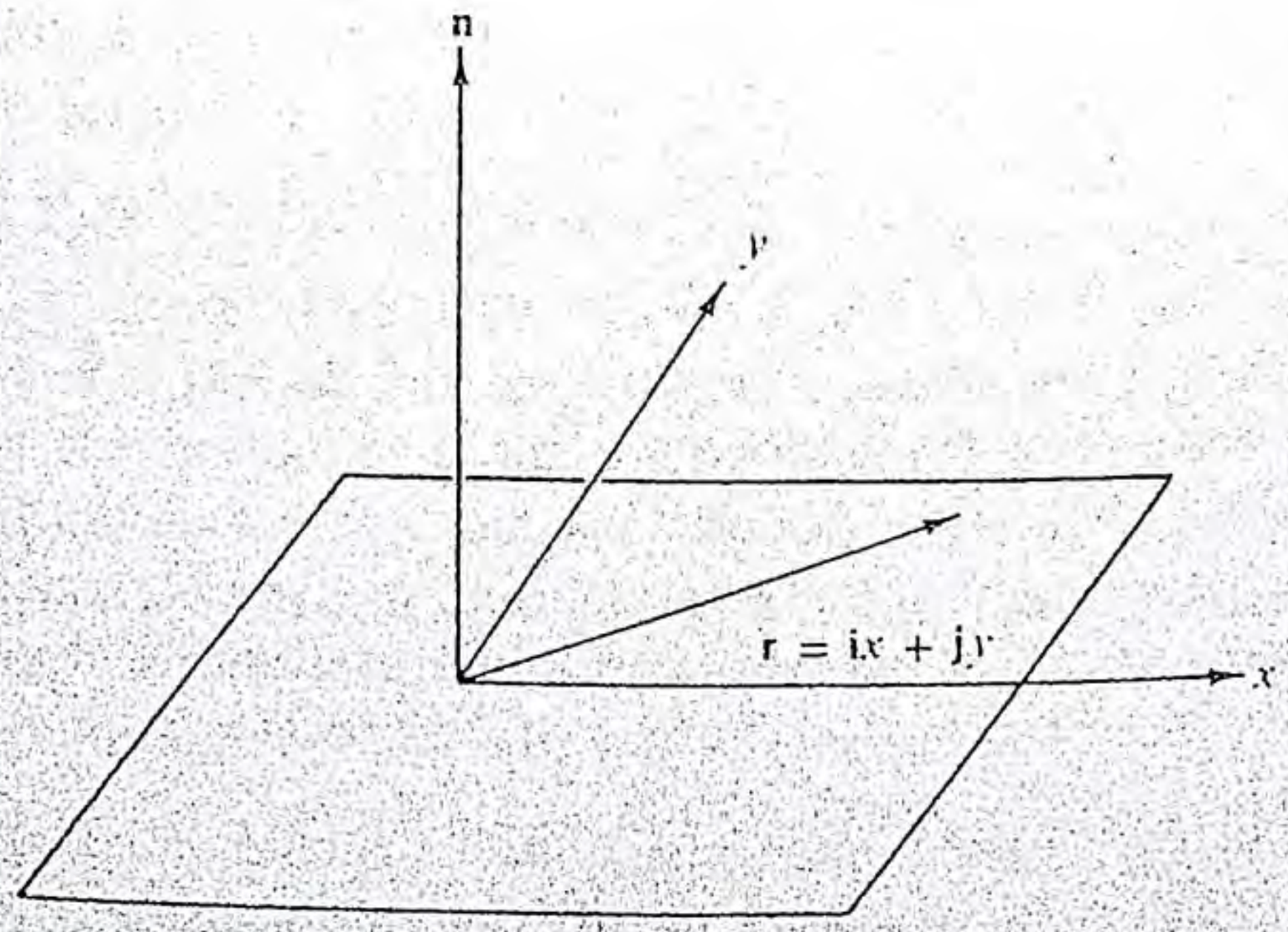


Fig. 1.8 Vector normal

Los dos últimos pasos resultan de utilizar la Ec. 1.18, la condición de ortogonalidad de los cosenos de dirección, y la Ec. 1.20 que define la delta de Kronecker. El efecto de la delta de Kronecker consiste en la cancelación de todos los términos de la suma con respecto a cualquier índice excepto el término para el cual los índices son iguales. En la Ec. 1.26, su efecto consiste en establecer $j = i$ y eliminar la suma respecto a j. Evidentemente se puede establecer del mismo modo que $i = j$ y eliminar la suma con respecto a i. La Ec. 1.26 resulta en

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_i A_i B_i, \tag{1.27}$$

que justamente es nuestra definición de cantidad escalar, una cantidad que permanece *invariante* bajo la rotación del sistema coordenado.

En un procedimiento similar que explota este concepto de la invariancia, se considera $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ y multiplicarla por sí misma

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Ya que

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = C^2, \tag{1.29}$$

el cuadrado de la magnitud del vector $\mathbf{C}$ y consecuentemente de una cantidad invariante, se tiene que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \tfrac{1}{2}(C^2 - A^2 - B^2), \qquad \text{invariante} \tag{1.30}$$

Ya que el lado derecho de la Ec. 1.30 es invariante —es decir, una cantidad escalar— el lado izquierdo, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, también debe ser invariante bajo la rotación del sistema coordenado. En consecuencia, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es escalar.

La Ec. 1.28 constituye de hecho otra forma de la ley de cosenos que es

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta. \tag{1.31}$$

Comparando las Ecs. 1.28 y 1.31 se tiene otra verificación de la Ec. 1.23 o, si se prefiere, una derivación vectorial de la ley de cosenos.

Una ilustración interesante de la interpretación geométrica del producto escalar la proporciona un ejemplo derivado de la rama de la relatividad general. Considere una esfera de cuatro dimensiones

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

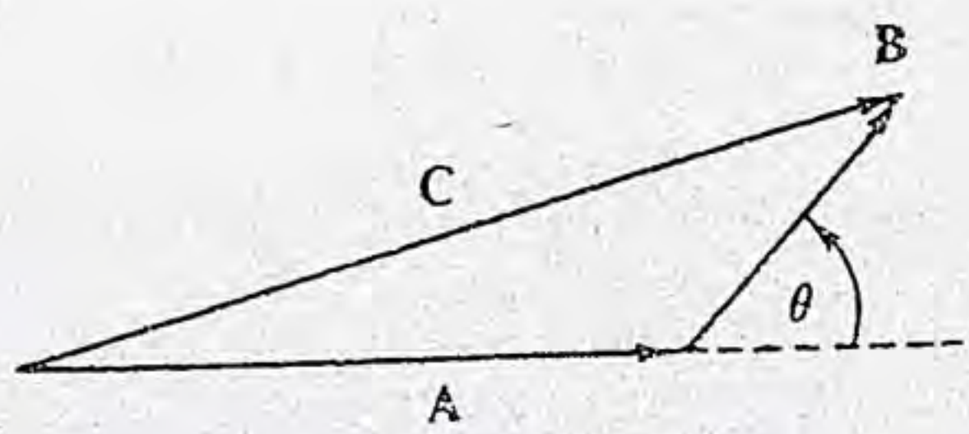


Fig. 1.9 Ley de los cosenos

en el espacio x, y, z, w. La superficie de esta esfera de cuatro dimensiones puede describirse mediante el vector $\mathbf{r} = (x, y, z, w)$ con la limitación de que $|\mathbf{r}| = 1$. Existe la posibilidad de construir un vector $\mathbf{t}$ que sea tangencial a esta esfera de cuatro dimensiones sobre toda su superficie. Como un ejemplo posible,

$$\mathbf{t} = (y, -x, w, -z).$$

El lector puede verificar que

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1,$$

consecuentemente de magnitud unitaria, y

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{r} = 0,$$

en consecuencia, tangencial sobre toda la esfera.

La analogía bidimensional existe (cf. Ejemplo 1.2.1), pero no existe analogía tridimensional.

Nuestro producto dotal dado por la Ec. 1.22 se puede generalizar en dos formas. Nuestro espacio no tiene que limitarse a tres dimensiones. En el espacio de n dimensiones, la Ec. 1.22 se aplica con la suma considerada desde 1 hasta n. El término n puede representar el infinito, siendo consecuentemente la suma una serie infinita convergente (Sección 5.2). La otra generalización se extiende al concepto del vector que abarca funciones. El análogo de función para un producto dotal o interno aparece en la Sección 9.4.

EJERCICIOS

1.3.1 ¿Cuál es el coseno del ángulo entre los vectores

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}?$$

Respuesta. $\cos\theta = 0, \qquad \theta = \dfrac{\pi}{2}.$

1.3.2 Dos vectores de magnitud unitaria $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{a}_j$ se requiere que sean paralelos o perpendiculares entre sí. Demuestre que $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ proporciona una interpretación de la Ec. 1.18, la relación de ortogonalidad del coseno de dirección.

1.3.3 Dado (1) que el producto dotal de un vector unitario por sí mismo es la unidad, y (2) que esta relación es válida en todos los sistemas coordenados (rotados), demuestre que $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$ (con el sistema apostrofado rotado 45° alrededor del eje z con relación al sistema sin apostrofar) implica que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$

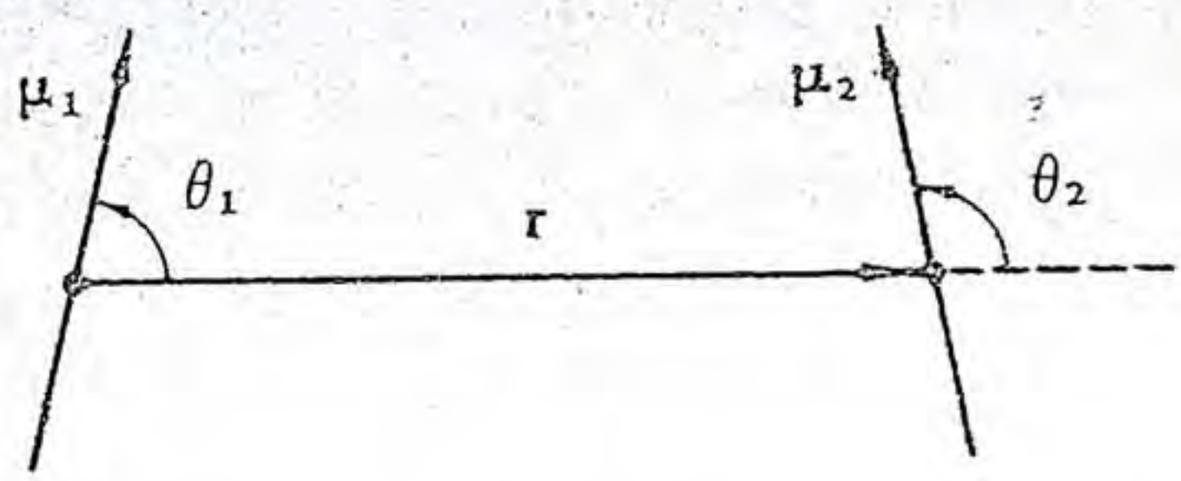
1.3.4 $\mathbf{r}$ es un vector que se inicia en el origen, termina en y especifica el punto en el espacio (x, y, z). Encuentre la superficie recorrida por $\mathbf{r}$ si

(a) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$,

(b) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$.

El vector $\mathbf{a}$ es una constante (constante en magnitud y dirección).

1.3.5



Si la energía de interacción entre dos dipolos de momentos μ_1 y μ_2 pueden indicarse en la forma vectorial

$$V = -\frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{r^3} + \frac{3(\mu_1 \cdot \mathbf{r})(\mu_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5}$$

y en la forma escalar

$$V = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3}(2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi).$$

Aquí, θ_1 y θ_2 son los ángulos de μ_1 y μ_2 con relación a $\mathbf{r}$, mientras que φ es el acimutal de μ_2 con relación al plano $\mu_1 - \mathbf{r}$.
Demuestre que las dos formas son equivalentes.
Sugerencia: La Ec. 12.198 es de utilidad.

1.4 Producto Vectorial

Una segunda forma de la multiplicación vectorial utiliza el seno del ángulo incluido en lugar del coseno. Por ejemplo, el momento angular de un cuerpo está definido como

$$\begin{aligned} \text{momento angular} &= \text{brazo de radio} \times \text{momento lineal} \\ &= \text{distancia} \times \text{momento lineal} \times \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Por conveniencia en el tratamiento de los problemas relacionados con las cantidades tales como el momento angular, torsión y la velocidad angular, se define el producto vectorial como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

con

$$C = AB \operatorname{sen}\theta. \tag{1.32}$$

A diferencia del caso anterior de producto escalar, $\mathbf{C}$ es ahora un vector y se le asigna al mismo una dirección perpendicular al plano de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, de tal modo que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ forman un sistema hacia la derecha. Con esta selección de dirección se tiene

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad \text{anticonmutación} \tag{1.32a}$$

A partir de esta definición de producto vectorial se tiene

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \tag{1.32b}$$

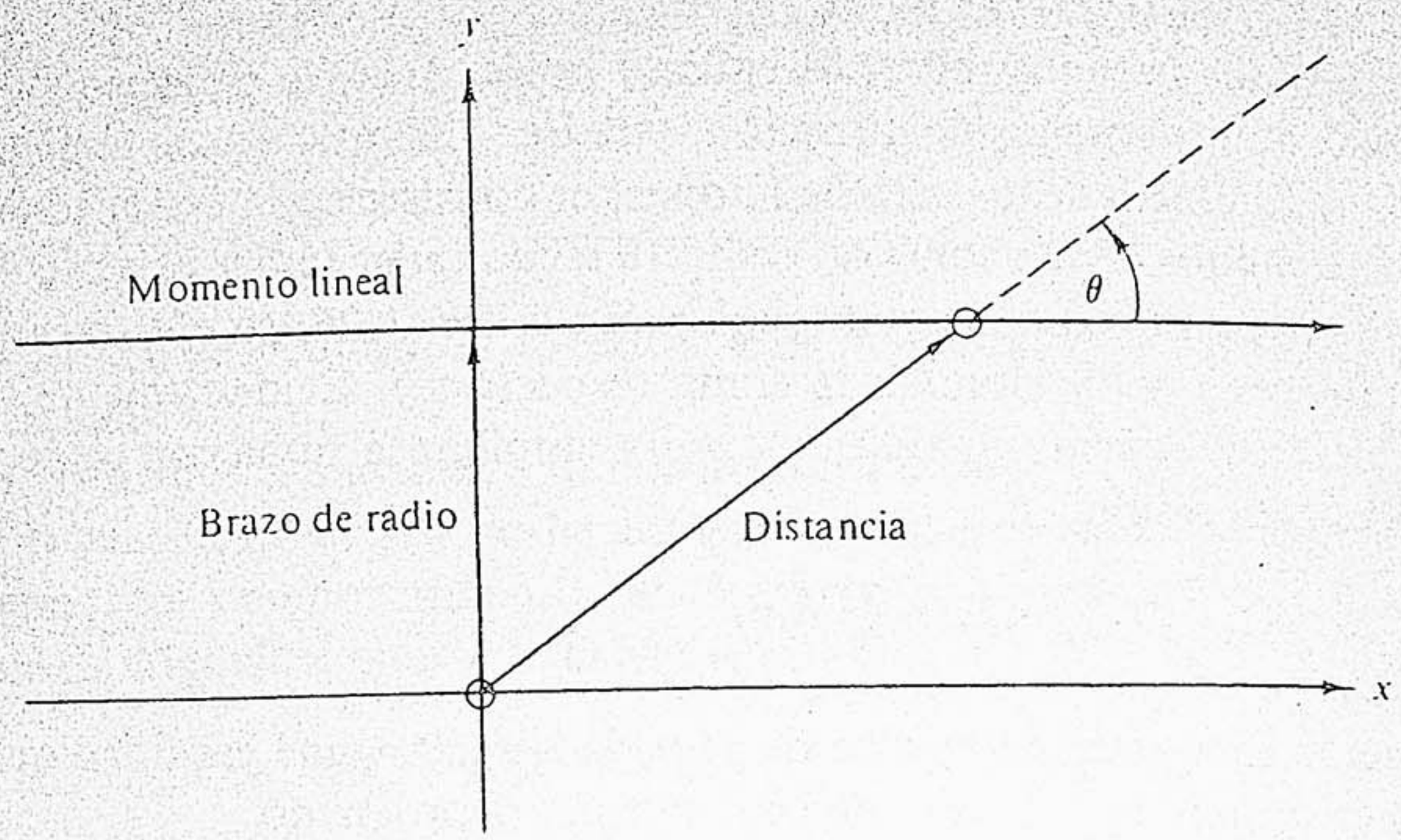


Fig. 1.10 Momento angular

mientras que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}. \tag{1.32c}$$

La inducción magnética **B** ya conocida generalmente se define por medio de la ecuación de fuerza de producto vectorial[1]

$$\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Aquí, **v** es la velocidad de la carga eléctrica q y $\mathbf{F}_M$ es la fuerza resultante en la carga móvil.

El producto vectorial tiene una interpretación geométrica importante que usaremos en secciones subsecuentes. En el paralelogramo definido por **A** y **B** (Fig. 1.11), B sen θ es la altura cuando A se considera como la lon-

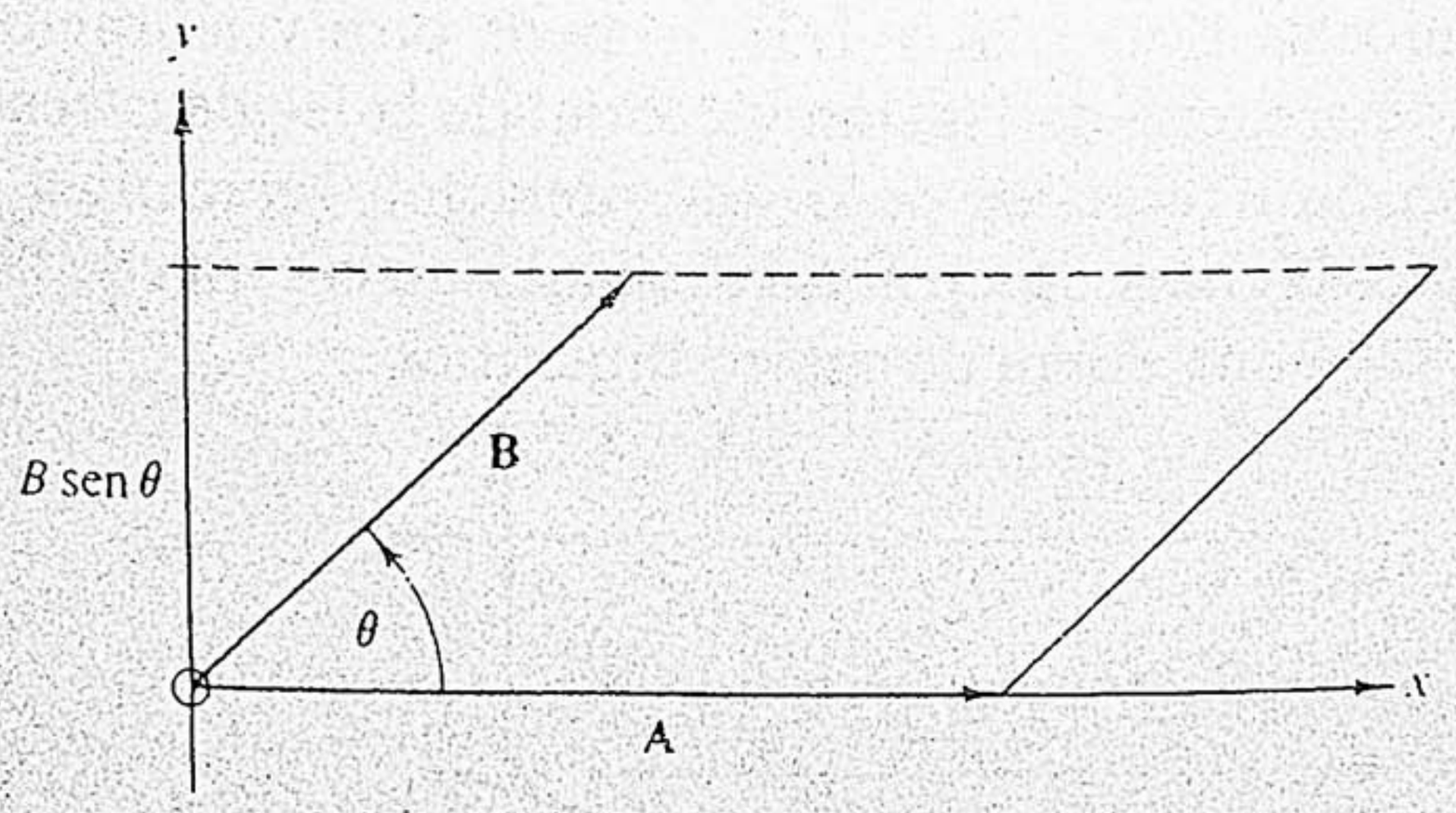


Fig. 1.11 Representación en forma de paralelogramo del producto vectorial

[1] El campo eléctrico **E** se supone aquí que es cero.

gitud de la base. Entonces, $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB$ sen θ es el *área* del paralelogramo. Como vector, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es el área del paralelogramo definido por $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, con el vector de área normal al plano del paralelogramo.

Entre paréntesis, ya hicimos notar que la Ec. 1.32*c* y la Ec. 1.32*b* modificada, forman el punto de partida para el desarrollo de los *cuaterniones*. La Ec. 1.32*b* se sustituye por $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = -1$.

Una definición alternativa del producto vectorial $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ consiste en especificar los componentes de $\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x, \end{aligned} \tag{1.33}$$

o

$$C_i = A_j B_k - A_k B_j, \quad i, j, k \text{ son diferentes} \tag{1.34}$$

y con la permutación cíclica de los índices i, j y k. El producto vectorial $\mathbf{C}$ puede representarse convenientemente por medio de un determinante[1]

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.35}$$

La expansión del determinante a través de la hilera superior reproduce los tres componentes de $\mathbf{C}$ indicados en la Ec. 1.33.

EJEMPLO 1.4.1

Con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ indicados en el Ejemplo 1.1.1

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(-12 + 9) - \mathbf{j}(-18 - 6) + \mathbf{k}(-18 - 8) \\ &= -3\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 26\mathbf{k}. \end{aligned}$$

[1] Cf. Sección 4.1 para un resumen de los determinantes.

Para mostrar la equivalencia de la Ec. 1.32 y la definición de componente, Ec. 1.33, procedamos a formar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, utilizando la Ec. 1.33. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= A_x(A_yB_z - A_zB_y) \\ &+ A_y(A_zB_x - A_xB_z) \\ &+ A_z(A_xB_y - A_yB_x) = 0. \end{aligned} \tag{1.36}$$

De modo similar,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0. \tag{1.37}$$

Las ecuaciones 1.36 y 1.37 muestran que $\mathbf{C}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{A}$ como a $\mathbf{B}$ ($\cos\theta = 0, \theta = \pm 90°$) y consecuentemente perpendicular al plano que determinan. La dirección positiva se determina considerando casos especiales tales como los vectores unitarios $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ($C_z = +A_xB_y$).

La magnitud se obtiene de

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= A^2B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \\ &= A^2B^2 - A^2B^2 \cos^2\theta \\ &= A^2B^2 \operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned} \tag{1.38}$$

En consecuencia

$$C = AB \operatorname{sen}\theta. \tag{1.39}$$

El primer gran paso en la Ec. 1.38 puede verificarse mediante el desarrollo a la forma de componente utilizando la Ec. 1.33 para $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y la Ec. 1.22 para el producto escalar. De las Ecs. 1.36, 1.37 y 1.39 se puede observar la equivalencia de las Ecs. 1.32 y 1.33, las dos definiciones del producto vectorial.

Aún se tiene el problema de verificar que $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es de hecho un vector, es decir que satisface la Ec. 1.15, la ley de transformación vectorial. Comenzando en un sistema apostrofado rotado

$$\begin{aligned} C'_i &= A'_jB'_k - A'_kB'_j, \qquad i, j, \text{ y } k \text{ en orden cíclico}, \\ &= \sum_l a_{jl}A_l \sum_m a_{km}B_m - \sum_l a_{kl}A_l \sum_m a_{jm}B_m \\ &= \sum_{l,m} (a_{jl}a_{km} - a_{kl}a_{jm})A_lB_m. \end{aligned} \tag{1.40}$$

La combinación de los cosenos de dirección en paréntesis desaparece para $m = l$. En consecuencia, se tiene que j y k adquieren valores fijos, dependientes de la selección de i, y seis combinaciones de l y m. Si $i = 3$, entonces $j = 1$, $k = 2$ (orden cíclico) y se tienen las siguientes combinaciones de cosenos de dirección

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} &= a_{33}, \\ a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11} &= a_{32}, \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} &= a_{31} \end{aligned} \tag{1.41}$$

y sus negativos. Las ecuaciones 1.41 son identidades satisfechas por los cosenos de dirección. Se pueden verificar mediante el uso de los determinantes y las matrices (cf. Ejercicio 4.3.3). Sustituyendo nuevamente en la Ec. 1.40,

$$\begin{aligned} C_3' &= a_{33}A_1B_2 + a_{32}A_3B_1 + a_{31}A_2B_3 \\ &\quad - a_{33}A_2B_1 - a_{32}A_1B_3 - a_{31}A_3B_2 \\ &= a_{31}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 \\ &= \sum_n a_{3n}C_n. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Permutando los índices para restablecer C_1' y C_2', se observa que la Ec. 1.15 se satisface y que **C** de hecho es un vector. Es de mencionarse aquí que esta naturaleza vectorial del producto correspondiente constituye un accidente asociado con la naturaleza tridimensional del espacio ordinario.[1] En el Capítulo 3 se indica que el producto vectorial también puede tratarse como un tensor antisimétrico de segundo rango.

Conocemos que existen dos formas de multiplicar los vectores; una tercera forma aparece en el Capítulo 3. Pero, ¿qué puede decirse acerca de la división entre un vector? Resulta que la relación **B**/**A** no se especifica de una manera única (Ejercicio 4.2.19) a menos de que también se requiera que **A** y **B** sean paralelos. En consecuencia, la división de un vector entre otro no es definida.

EJERCICIOS

1.4.1 Dos vectores **A** y **B** están definidos por

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

Calcule los productos escalar y vectorial $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

1.4.2 Demuestre que

(a) $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = A^2 - B^2$,
(b) $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 2\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

Las leyes distributivas requeridas aquí,

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

[1] Específicamente, la Ec. 1.41 es consistente tan solo para el espacio tridimencional. Técnicamente, también existe la posibilidad de definir un producto vectorial en R^7, espacio de 7 dimensiones, pero el producto vectorial adquiere propiedades (patológicas) aceptables.

y

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C},$$

se pueden verificar fácilmente (si se desea) mediante el desarrollo en los componentes cartesianos.

1.4.3 Dados tres vectores

$$\mathbf{P} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$
$$\mathbf{Q} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

encuentre dos que sean perpendiculares y dos que sean paralelos o antiparalelos.

1.4.4 Utilizando los vectores

$$\mathbf{P} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\text{sen}\,\theta,$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{i}\cos\varphi - \mathbf{j}\,\text{sen}\,\varphi,$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\,\text{sen}\,\varphi,$$

demuestre las identidades trigonométricas ya conocidas

$$\text{sen}\,(\theta + \varphi) = \text{sen}\,\theta\cos\varphi + \cos\theta\,\text{sen}\,\varphi,$$
$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi.$$

1.4.5 (a) Encuentre un vector **A** que sea perpendicular a

$$\mathbf{U} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$
$$\mathbf{V} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

(b) ¿Qué representa **A** si, además de este requisito, también se requiere que tenga magnitud unitaria?

1.4.6 Si cuatro vectores **a**, **b**, **c** y **d** quedan en el mismo plano, demuestre que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = 0.$$

Sugerencia: Considere las direcciones de los vectores del producto vectorial.

1.4.7 Las coordenadas de los tres vértices de un triángulo son (2, 1, 5), (5, 2, 8) y (4, 8, 2). Calcule su área mediante métodos vectoriales.

1.4.8 Los vértices del paralelogramo *ABCD* son (1, 0, 0), (2, —1, 0), (0, —1, 1) y (—1, 0, 1) en el mismo orden. Calcule las áreas vectoriales del triángulo *ABD* y del triángulo *BCD*. Indique si las dos áreas son iguales. *Respuesta.* $\text{Area}_{ABD} = -\frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

1.4.9 El origen y los tres vectores **A**, **B** y **C** (todos los cuales se inician en el origen) definen un tetraedro. Considerando la dirección hacia *afuera* como positiva, calcule el área vectorial total de las cuatro superficies del tetraedro.
Nota. En la Sección 1.11, este resultado se generaliza para cualquier área cerrada.

1.4.10 Encuentre los lados y los ángulos del triángulo esférico *ABC* definido por los tres vectores

$$\mathbf{A} = (1, 0, 0),$$
$$\mathbf{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

y

$$\mathbf{C} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Cada vector se inicia en el origen.

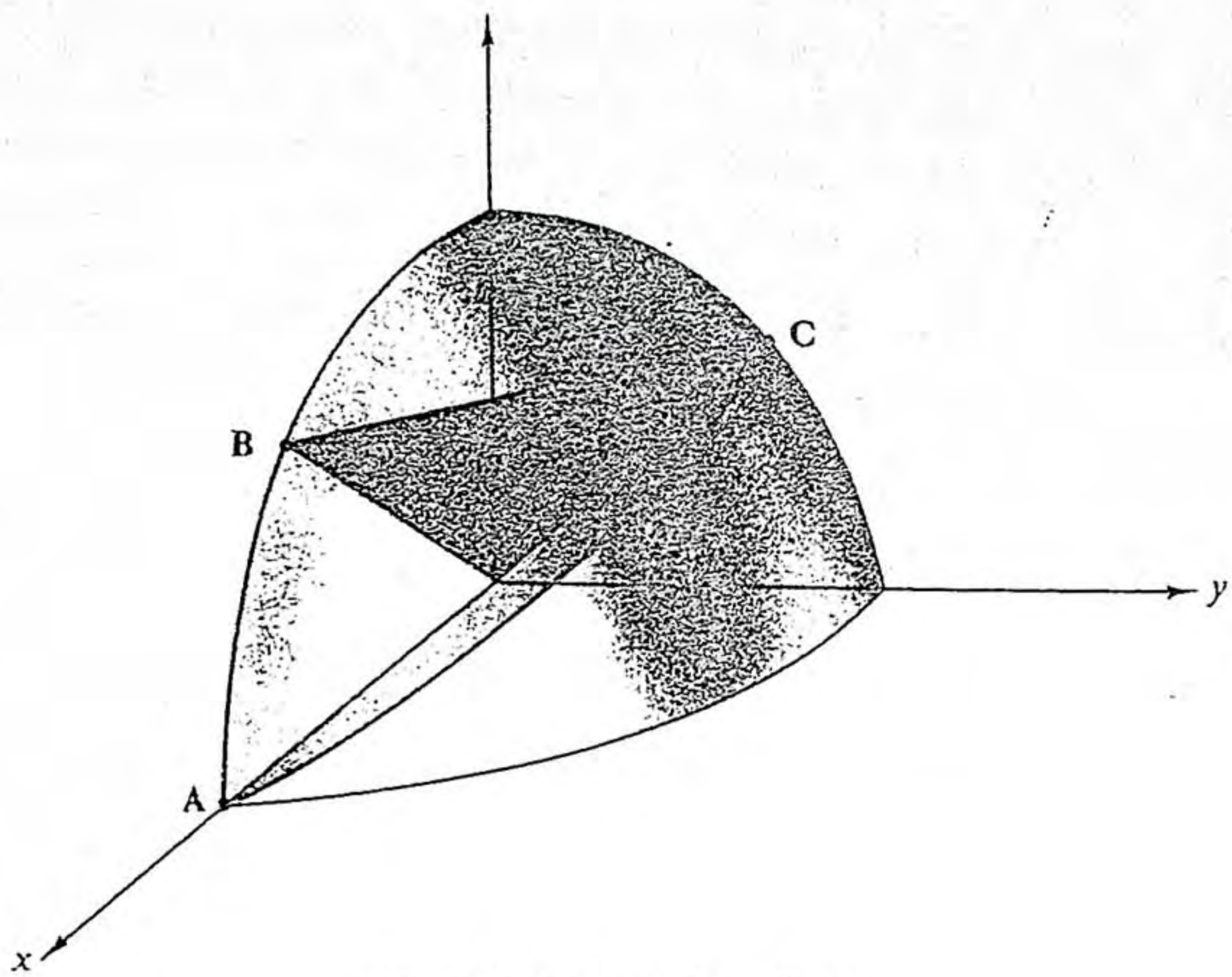
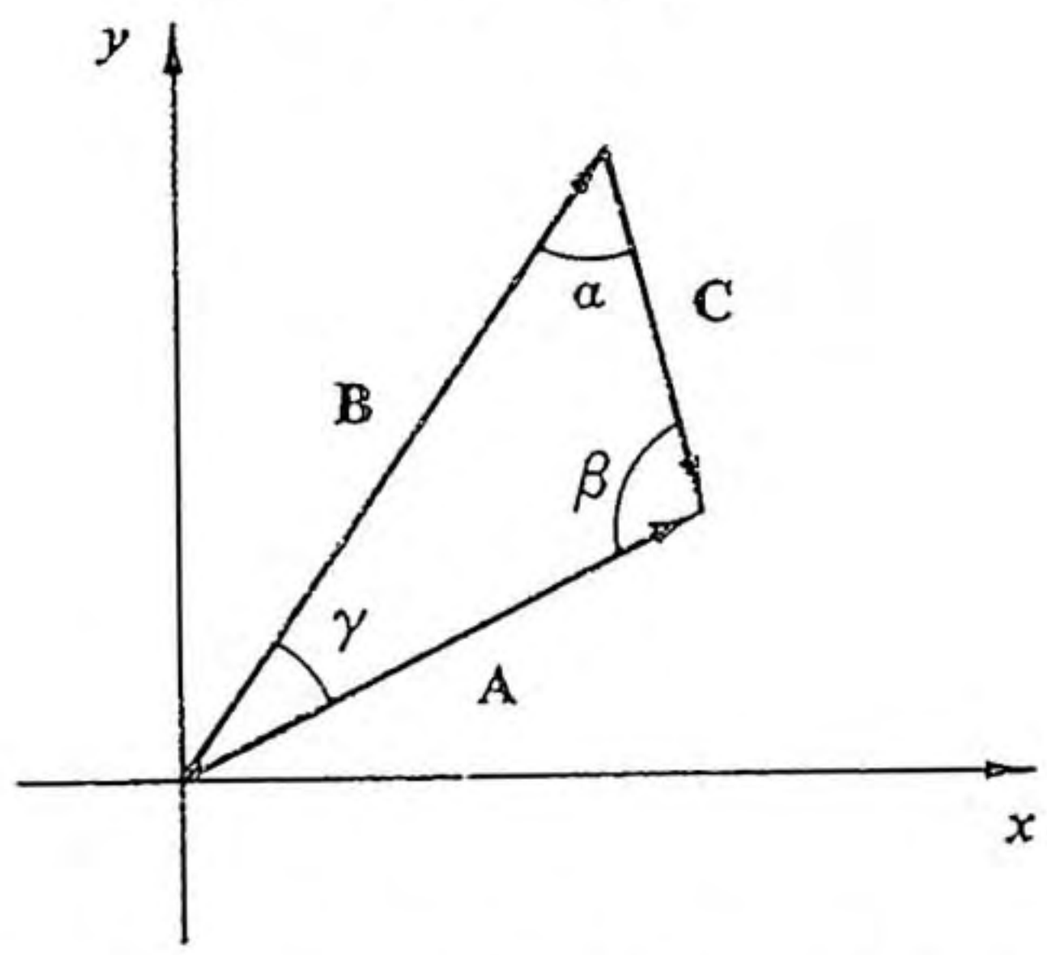


Fig. 1.12 Triángulo esférico

1.4.11 Derive la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{|\mathbf{A}|} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{|\mathbf{B}|} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{|\mathbf{C}|}.$$



1.4.12 La inducción magnética **B** se *define* mediante la ecuación de fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Al realizar los experimentos, se encuentra que

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}, \qquad \frac{\mathbf{F}}{q} = 2\mathbf{k} - 4\mathbf{j},$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{j}, \qquad \frac{\mathbf{F}}{q} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k},$$

y

$$\mathbf{v} = \mathbf{k}, \qquad \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{j} - 2\mathbf{i}.$$

A partir de los resultados de estos tres experimentos separados calcule la inducción magnética **B**.

1.5 Producto Escalar Triple, Producto Vectorial Triple

Las secciones 1.3 y 1.4 se refieren a los dos tipos de multiplicación que son de interés aquí. Sin embargo, existen combinaciones de tres vectores, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ y $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, que ocurren con la suficiente frecuencia para merecer nuestra atención. La combinación

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

se conoce como producto escalar triple. $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ resulta en un vector, que al ser punteado por $\mathbf{A}$, proporciona un escalar. Observamos que $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ representa un escalar traspasado a un vector, una operación que no está definida. En consecuencia, si aceptamos excluir esta interpretación indefinida, el paréntesis puede omitirse y el producto escalar triple se puede escribir en la forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.

Utilizando la Ec. 1.33 para el producto vectorial y la Ec. 1.22 para el producto escalar,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= A_x(B_yC_z - B_zC_y) \\ &\quad + A_y(B_zC_x - B_xC_z) \\ &\quad + A_z(B_xC_y - B_yC_x) \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\ &= -\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{B} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \text{ etc.}\end{aligned} \tag{1.43}$$

El alto grado de simetría presente en el desarrollo de componentes es de notarse. Cada término contiene los factores A_i, B_j y C_k. Cuando i, j y k tienen un orden cíclico (x, y, z), el signo es positivo. Cuando el orden no es cíclico, el signo es negativo. Asimismo, el punto y el por pueden intercambiarse,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \tag{1.44}$$

Una representación conveniente del desarrollo de componentes de la Ec. 1.43 la proporciona el determinante

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.45}$$

Las reglas para intercambiar hileras y columnas de un determinante[1] proporcionan una verificación inmediata de la permutación indicada en la Ec. 1.43, mientras que la simetría de **A**, **B** y **C** en la forma de determinante sugiere la relación establecida en la Ec. 1.44.

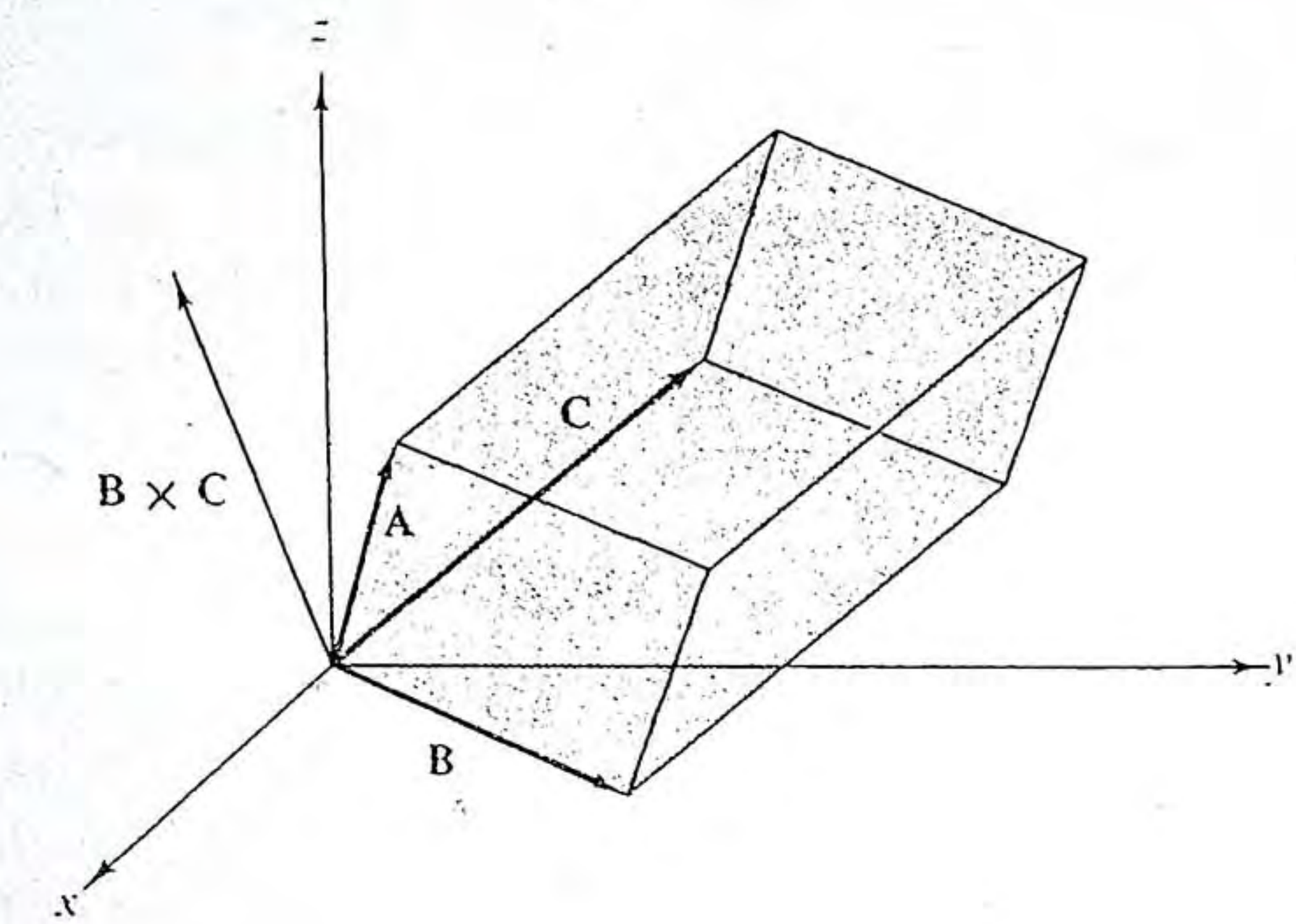


Fig. 1.13 Representación de paralelepípedo de un producto escalar triple

Los productos triples que se encuentran en la Sección 1.4, en que se ha demostrado que **A** × **B** era perpendicular tanto a **A** como a **B**, fueron casos especiales del resultado general (Ec. 1.43).

El producto escalar triple tiene una interpretación geométrica directa. Los tres vectores **A**, **B** y **C** pueden interpretarse como definiendo un paralelepipedo (Fig. 1.13).

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| &= BC \text{ sen } \theta \\ &= \text{área de la base del paralelogramo} \end{aligned} \tag{1.46}$$

Evidentemente, la dirección es normal a la base. El puntear la **A** en esto significa multiplicar el área de la base por la proyección de **A** sobre la normal, o sea la base multiplicada por la altura. En consecuencia,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \text{volumen del paralelepipedo definido por } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ y } \mathbf{C}.$$

[1] Cf. Sección 4.1 para un resumen de las propiedades de los determinantes.

EJEMPLO 1.5.1

Para

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.47}$$

Mediante el desarrollo por menores a través de la hilera superior, el determinante es igual a

$$1(0 + 1) - 2(0 - 1) - 1(0 - 1) = 4.$$

Este es el volumen del paralelepípedo definido por **A**, **B** y **C**. El lector deberá notar que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ puede resultar ocasionalmente negativo. Este problema y su interpretación se consideran en el Capítulo 3.

El producto escalar triple encuentra una aplicación interesante e importante en la construcción de una estructura cristalina recíproca. Sean **a**, **b** y **c** (no necesariamente perpendiculares mutuamente) representativos de los vectores que definen una estructura cristalina. La distancia desde un punto de la estructura hasta otro puede indicarse como

$$\mathbf{r} = n_a\mathbf{a} + n_b\mathbf{b} + n_c\mathbf{c}, \tag{1.48}$$

en donde n_a, n_b y n_c tienen valores integrales. Con estos vectores se puede formar

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \qquad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \qquad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}. \tag{1.48a}$$

Observamos que $\mathbf{a}'$ es perpendicular al plano que contiene a **b** y **c** y que tiene una magnitud proporcional a a^{-1}. De hecho, se puede demostrar con facilidad que

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = 1, \tag{1.48b}$$

de modo que

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = 0. \tag{1.48c}$$

Es a partir de las Ecs. 1.48*b* y 1.48*c* que se deriva el nombre de estructura recíproca. El espacio matemático en que existe la estructura recíproca se denomina ocasionalmente espacio de Fourier, en apoyo a las relaciones del análisis de Fourier, en los Capítulos 14 y 15. Esta estructura recíproca es de utilidad en los problemas donde se implica la dispersión de las ondas desde diversos planos en un cristal. Detalles adicionales pueden encontrar-

se en R. B. Leighton, *Principles of Modern Physics*, págs. 440-48 [Nueva York: McGraw-Hill, (1959)]. La estructura recíproca la encontramos nuevamente en el análisis de los sistemas coordenados oblicuos, Sección 4.4.

El segundo producto triple de interés es $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Aquí, el paréntesis debe conservarse, tal como puede observarse al considerar el caso especial

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \tag{1.49}$$

pero

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = 0.$$

El hecho de que el producto vectorial triple sea un vector resulta de nuestra descripción acerca del producto vectorial. Asimismo, observamos que la dirección del vector resultante es perpendicular a $\mathbf{A}$ y a $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$. El plano definido por $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ es perpendicular a $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y así $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ queda en este plano. Esto significa que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ es una combinación lineal de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$. Se encuentra que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \tag{1.50}$$

una relación que algunas veces se conoce como regla *BAC-CAB*. Este resultado puede verificarse mediante el método directo, aun cuando no muy elegante, del desarrollo a componentes cartesianos (cf. Ejercicio 1.5.1).

La regla *BAC-CAB* probablemente es la identidad vectorial simple más importante. Debido a su uso frecuente en los problemas y en derivaciones futuras, probablemente deba memorizarse.

Es de hacerse notar aquí que así como los vectores son independientes de las coordenadas, la ecuación vectorial también es independiente de un sistema coordenado particular. El sistema coordenado solamente determina los componentes. Si la ecuación vectorial puede establecerse en coordenadas cartesianas, se puede establecer y es válida en cualquiera de los sistemas coordenados que se introducen en el Capítulo 2.

EJEMPLO 1.5.2

Mediante el uso de los tres vectores proporcionados en el Ejemplo 1.5.1, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{j} + \mathbf{k})(1 - 2) - (\mathbf{i} - \mathbf{j})(2 - 1) \\ &= -\mathbf{i} - \mathbf{k}\end{aligned}$$

con la Ec. 1.50. En detalle,

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}.$$

Otros productos más complicados se pueden simplificar mediante el uso de estas formas de los productos escalar triple y vectorial triple.

EJERCICIOS

1.5.1 Verifique el desarrollo del producto vectorial triple

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

mediante el desarrollo directo en coordenadas cartesianas.

1.5.2 Demuestre que la primera etapa en la Ec. 1.38, que es

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2,$$

es consistente con la regla *BAC-CAB* para un producto vectorial triple.

1.5.3 Dados los tres vectores **A**, **B** y **C**

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j},$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{k}.$$

(a) Calcule el producto escalar triple, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Considerando que $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, proporcione una interpretación geométrica de su resultado para el producto escalar triple.

(b) Calcule $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

1.5.4 Demuestre que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

1.5.5 Un vector **A** se descompone en un vector radial $\mathbf{A}_r$ y un vector tangencial $\mathbf{A}_t$. Si $\mathbf{r}_0$ es un vector unitario en la dirección radial, demuestre que

(a) $\mathbf{A}_r = \mathbf{r}_0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_0)$

y

(b) $\mathbf{A}_t = -\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{A})$.

1.5.6 Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que los tres vectores (no desaparecientes) **A**, **B** y **C** sean coplanares es la desaparición del producto escalar triple.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0.$$

1.5.7 Tres vectores **A**, **B** y **C** están definidos por

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{C} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Calcule los valores de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, $\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ y $\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$.

1.5.8 El vector **D** es una combinación lineal de tres vectores no coplanares (y no ortogonales):

$$\mathbf{D} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}.$$

Demuestre que los coeficientes están dados por una relación de productos escalares triples,

$$a = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}}, \text{ etc.}$$

1.5.9 Demuestre que

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

1.5.10 Demuestre que

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})\mathbf{D}.$$

1.5.11 Para un triángulo *esférico* tal como el mostrado en la Fig. 1.12, demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \overline{BC}} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} \overline{CA}} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} \overline{AB}}.$$

Aquí, seno A es el seno del ángulo incluido en A mientras que $\overline{BC}$ es el lado opuesto (en radianes).
Sugerencia: El Ejercicio 1.5.10 resultará ser de utilidad.

1.5.12 Dado

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \qquad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \qquad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0,$$

demuestre que

(a) $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y} = \delta_{xy}, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$

(b) $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})^{-1},$

(c) $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}.$

1.5.13 Si $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y} = \delta_{xy}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, demuestre que

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}.$$

(Esto es lo inverso del problema 1.5.12).

1.5.14 Demuestre que cualquier vector **V** se puede expresar en términos de vectores recíprocos $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ por medio de

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}' + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}' + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c}'.$$

1.5.15 Una carga eléctrica q_1 se mueve con la velocidad $\mathbf{v}_1$ y produce una inducción magnética **B** dada por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_0}{r^2} \qquad \text{(unidades mks)},$$

en donde $\mathbf{r}_0$ apunta desde q_1 hasta el punto en que **B** se mide (ley de Biot y Savart).
(a) Demuestre que la fuerza magnética en una segunda carga q_2, velocidad $\mathbf{v}_2$, está

dada por el producto vectorial triple

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_0).$$

(b) Establezca la fuerza magnética correspondiente $\mathbf{F}_1$ que ejerce q_2 en q_1. Defina el vector radial unitario. ¿Qué tanto difieren $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$?

(c) Calcule $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ para el caso de q_1 y q_2 moviéndose a lo largo de trayectorias paralelas lado a lado.

Respuesta. (b) $\mathbf{F}_1 = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_0)$. En general, no existe una relación simple entre $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Específicamente, la tercera ley de Newton, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, no es consistente.

(c) $\mathbf{F}_1 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,v^2\mathbf{r}_0 = -\mathbf{F}_2$. Atracción mutua.

1.6 Gradiente, ∇

Suponga que $\varphi(x, y, z)$ es una función de punto escalar, es decir una función cuyo valor depende de los valores de las coordenadas (x, y, z). Como escalar, debe tener el mismo valor en un punto fijo del espacio, independiente de la rotación de nuestro sistema de coordenadas, o sea

$$\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3). \tag{1.51}$$

Diferenciando con respecto a x'_i obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial x'_i} &= \frac{\partial\varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x'_i}\\ &= \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\end{aligned} \tag{1.52}$$

mediante las reglas de la diferenciación parcial y la Ec. 1.16. Pero la comparación con la Ec. 1.17, la ley de transformación vectorial, indica ahora que hemos *construido* un vector con los componentes $\partial\varphi/\partial x_j$. Este vector se denomina gradiente de φ.

Un simbolismo conveniente es

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.53}$$

o

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.54}$$

$\nabla\varphi$ (o del φ) es nuestro gradiente del escalar φ, mientras que la propia ∇ (del) es un operador diferencial de vector (disponible para operar en o

para diferenciar el escalar φ). Es de hacerse notar que este operador es una criatura híbrida que debe satisfacer tanto las leyes para el manejo de los vectores como las leyes de la diferenciación parcial.

EJEMPLO 1.6.1

Calcule el gradiente de $f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

$$\nabla f(r) = \mathbf{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f(r)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f(r)}{\partial z}.$$

Ahora $f(r)$ depende de x a través de la dependencia de r en x. En consecuencia[1]

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{r}.$$

Sustituyendo en la ecuación para $\nabla f(r)$,

$$\begin{aligned}\nabla f(r) &= (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\\ &= \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{df}{dr}\\ &= \mathbf{r}_0\frac{df}{dr}.\end{aligned}$$

Aquí $\mathbf{r}_0$ es un vector unitario en la dirección radial *positiva.*

Una aplicación inmediata de $\nabla\varphi$ consiste en puntearla en un incremento de longitud,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz. \tag{1.55}$$

De este modo, se obtiene

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi)\cdot d\mathbf{r} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \qquad (1.56)\\ &= d\varphi,\end{aligned}$$

el cambio en la función escalar φ correspondiente a un cambio en la posición $d\mathbf{r}$. Ahora, considere que P y Q son dos puntos en una superficie $\varphi(x, y, z) = C$, una constante. Estos puntos se seleccionan de tal manera que Q es una distancia $d\mathbf{r}$ desde P. Siendo así, el movimiento desde P has-

[1] Este es un caso especial de la regla de cadena de la diferenciación parcial

$$\frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Aquí $\partial f/\partial\theta = \partial f/\partial\varphi = 0$, $\partial f/\partial r \to df/dr$.

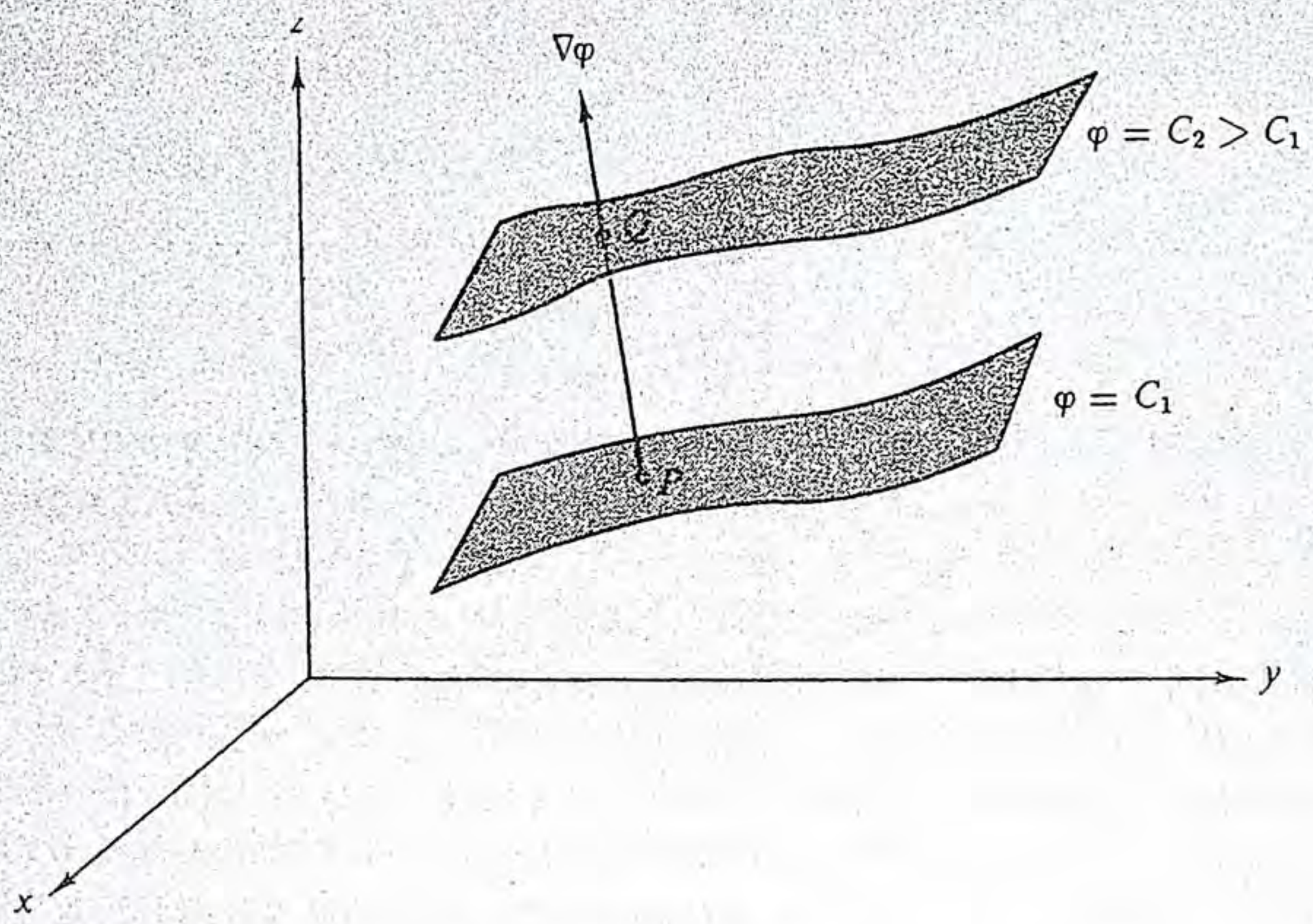


Fig. 1.14a. Gradiente

ta Q, el cambio de $\varphi(x, y, z) = C$ está dado por

$$\begin{aligned} d\varphi &= (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{1.57}$$

ya que permanecemos en la superficie $\varphi(x, y, z) = C$. Esto demuestra que $\nabla\varphi$ es perpendicular a $d\mathbf{r}$. Ya que $d\mathbf{r}$ puede tener cualquier dirección desde P *siempre y cuando se conserve en la superficie* φ, quedando el punto Q limitado a la superficie, pero con dirección arbitraria, $\nabla\varphi$ resulta normal a la superficie φ = constante.

Si ahora permitimos que $d\mathbf{r}$ nos lleve de una superficie $\varphi = C_1$ a una superficie adyacente $\varphi = C_2$,

$$\begin{aligned} d\varphi &= C_2 - C_1 = \Delta C \\ &= (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Para cierta $d\varphi$, $|d\mathbf{r}|$ es mínima cuando se selecciona paralela a $\nabla\varphi$ ($\cos\theta = 1$); o, para cierta $|d\mathbf{r}|$, el cambio de la función escalar φ se aumenta al máximo al seleccionar $d\mathbf{r}$ paralela a $\nabla\varphi$. *Esto identifica a* $\nabla\varphi$ *como un vector que tiene la dirección de la tasa de cambio espacial máxima de* φ, una identificación que será de utilidad en el Capítulo 2 cuando se consideren los sistemas coordenados no cartesianos.

EJEMPLO 1.6.2

Como ejemplo específico de lo anterior, y como extensión del Ejemplo 1.6.1, se pueden considerar las superficies consistentes de las cubiertas esféricas concéntricas, Fig. 1.14*b*. Se tiene

$$\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r_i = C_i$$

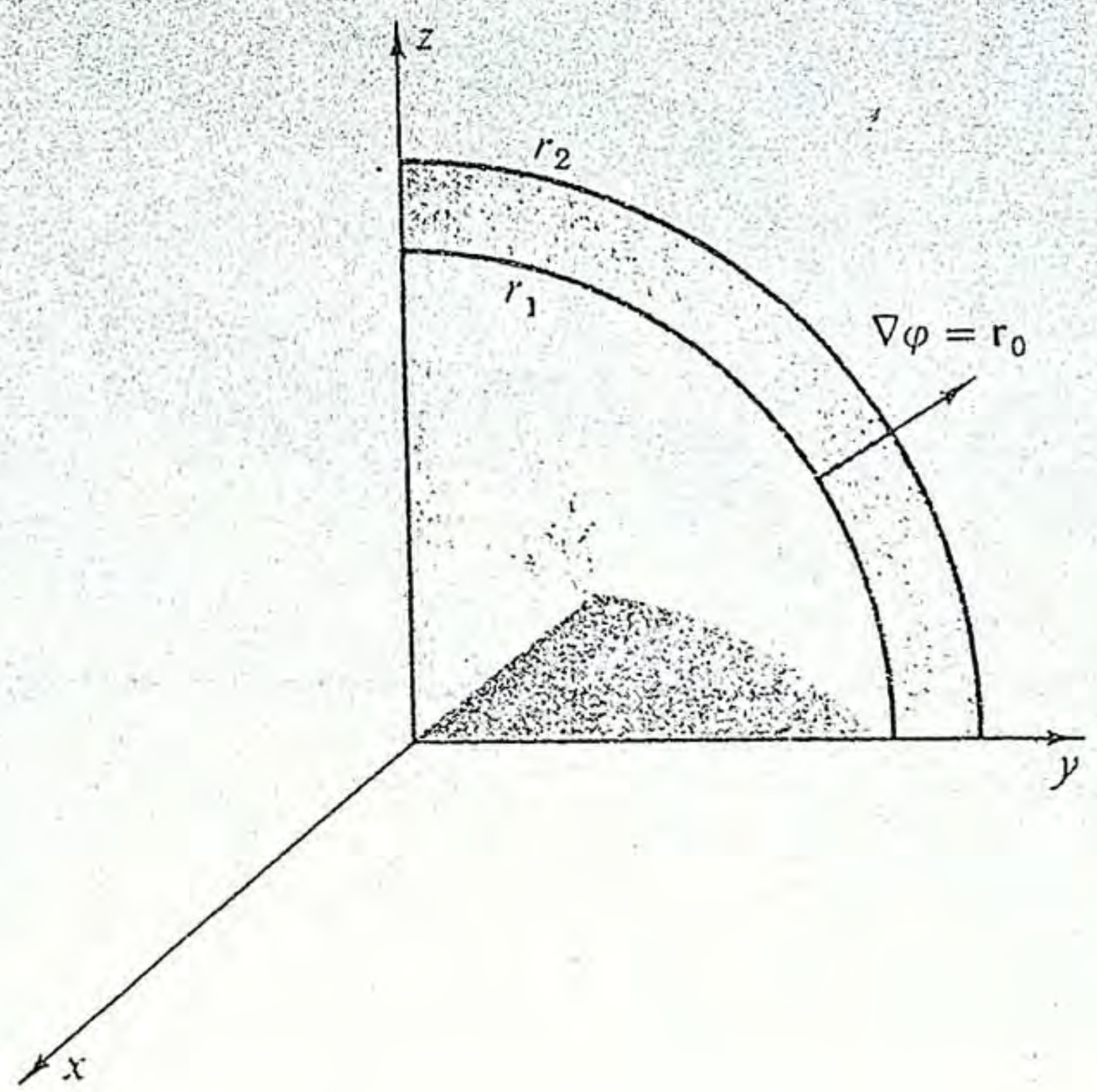


Fig. 1.14b Gradiente para $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, cubiertas esféricas: $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r_2 = C_2$, $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r_1 = C_1$

en donde r_i es el radio igual a C_i, nuestra constante. $\Delta C = \Delta\varphi = \Delta r_i$, la distancia entre dos cubiertas. Del ejemplo 1.6.1

$$\nabla\varphi = \mathbf{r}_0.$$

El gradiente de un escalar es de suma importancia en la física en cuanto a expresar la relación entre un campo de fuerza y un campo de potencial.

$$\text{Fuerza} = -\nabla\ (\text{potencial}). \tag{1.59}$$

Esto se ilustra tanto por medio del campo gravitacional como el electrostático, entre otros. El lector deberá quedar safisfecho consigo mismo, al considerar que el signo menos en la Ec. 1.59 resulta en un flujo de agua descendente por una colina más que en uno ascendente.

EJERCICIOS

1.6.1 Si $S(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$, encuentre
(a) ∇S es el punto (1, 2, 3);
(b) la magnitud del gradiente de S, $|\nabla S|$ en (1, 2, 3);
y
(c) los cosenos de dirección de ∇S en (1, 2, 3)

1.6.2 (a) Encuentre el vector unitario perpendicular a la superficie

$$x^2 + y^2 - z^2 = 3$$

en el punto (1, 1, 1).

(b) Derive la ecuación del plano tangente a la superficie en (1, 1, 1).

Respuesta. (a) $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{3}$.
(b) $x+y+z=3$.

1.6.3 Dado un vector $\mathbf{r}_{12}=\mathbf{i}(x_1-x_2)+\mathbf{j}(y_1-y_2)+\mathbf{k}(z_1-z_2)$, demuestre que $\nabla_1 r_{12}$ (gradiente con respecto a x_1, y_1 y z_1 de la magnitud de $\mathbf{r}_{12}$) es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}_{12}$.

1.6.4 Si una función de vector $\mathbf{F}$ depende tanto de las coordenadas espaciales (x, y, z) como del tiempo t, demuestre que

$$d\mathbf{F}=(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{F}+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}\,dt.$$

1.6.5 Demuestre que $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$, en donde u y v son funciones escalares diferenciables de x, y y z.

1.6.6 (a) Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que $u(x, y, z)$ y $v(x, y, z)$ estén relacionadas mediante alguna función $f(u, v)=0$ es que $(\nabla u)\times(\nabla v)=0$.
(b) Si $u=u(x, y)$ y $v=v(x, y)$, demuestre que la condición $(\nabla u)\times(\nabla v)=0$ origina un jacobiano bidimensional

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0.$$

Se supone que las funciones u y v pueden diferenciarse.

1.7 Divergencia, $\nabla\cdot$

La diferenciación de una función de vector es una extensión simple de la diferenciación de las cantidades escalares. Suponga que $\mathbf{r}(t)$ describe la posición de un satélite en cierto tiempo t. Entonces, para diferenciar con respecto al tiempo

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$
$$=\mathbf{v},\qquad \text{velocidad lineal}$$

Gráficamente, de nuevo se tiene la pendiente de una curva, órbita o trayectoria como se muestra en la Fig. 1.15.

Si se resuelve $\mathbf{r}(t)$ en los componentes cartesianos, $d\mathbf{r}/dt$ siempre se reduce directamente a una suma vectorial de no más de tres (para el espacio tridimensional) derivadas escalares. En otros sistemas coordenados (Capítulo 2), la situación resulta ligeramente más complicada, ya que los vectores unitarios no son constantes en dirección. La diferenciación con respecto a las coordenadas espaciales se maneja del mismo modo que la diferenciación con respecto al tiempo, como puede observarse en los siguientes párrafos.

En la Sección 1.6, ∇ fue definido como un operador vectorial. Ahora, considerando con atención especial tanto el vector como sus propieda-

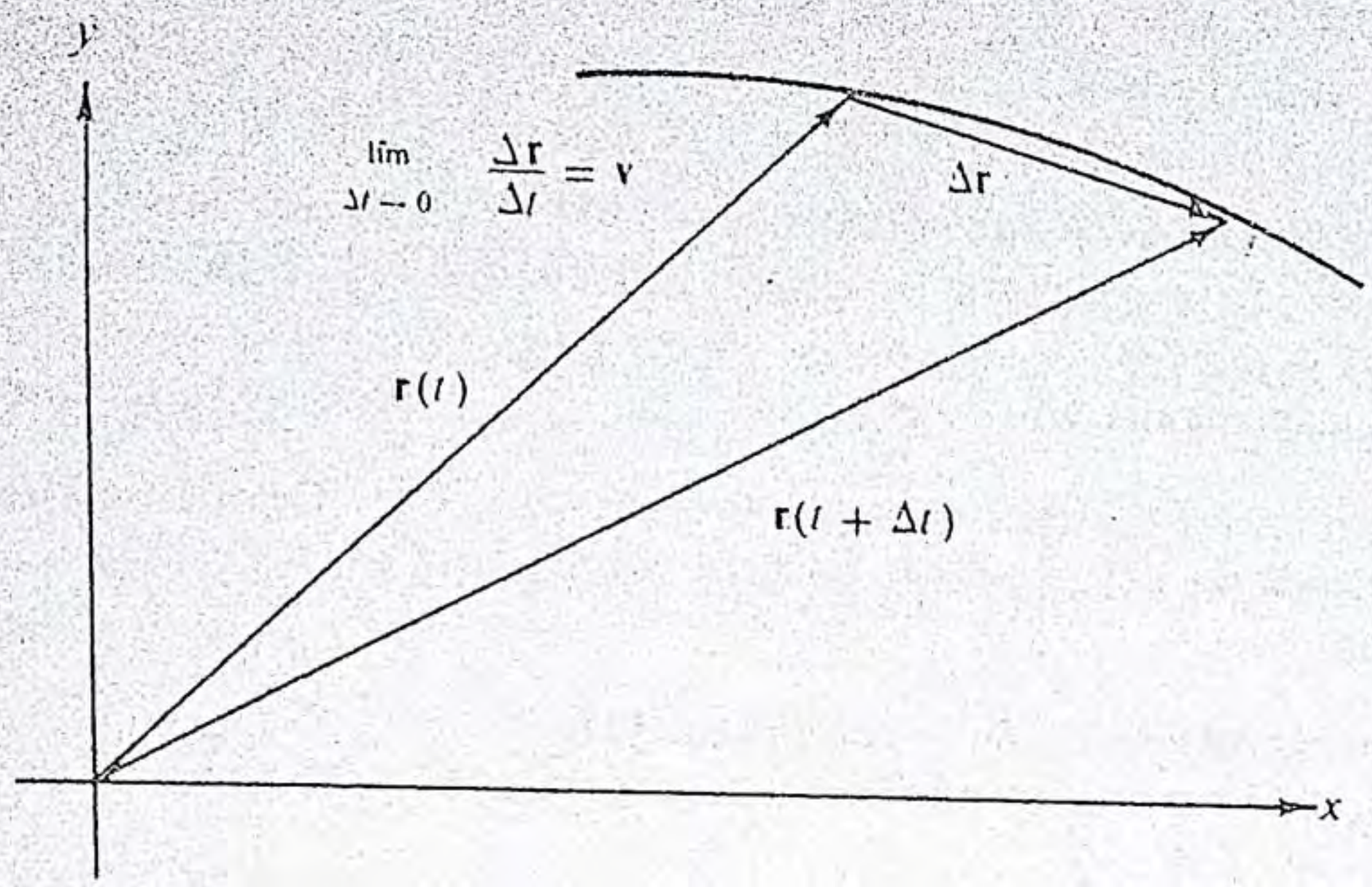


Fig. 1.15 Diferenciación de un vector

des diferenciales, permitiremos que opere en un vector. Primeramente, como vector, se procede al punteo en un segundo vector para obtener

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{1.60}$$

conocido como la divergencia de $\mathbf{V}$. Esta es un escalar según lo descrito en la Sección 1.3.

EJEMPLO 1.7.1

Calcule $\nabla \cdot \mathbf{r}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z},$$

o

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3.$$

EJEMPLO 1.7.2

Generalizando el Ejemplo 1.7.1,

$$\nabla \cdot \mathbf{r} f(r) = \frac{\partial}{\partial x}[x f(r)] + \frac{\partial}{\partial y}[y f(r)] + \frac{\partial}{\partial z}[z f(r)]$$

$$= 3 f(r) + \frac{x^2}{r}\frac{df}{dr} + \frac{y^2}{r}\frac{df}{dr} + \frac{z^2}{r}\frac{df}{dr}$$

$$= 3 f(r) + r\frac{df}{dr}.$$

En particular, cuando $f(r) = r^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{r}r^{n-1} &= \nabla \cdot \mathbf{r}_0 r^n \\ &= 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1} \\ &= (n+2)r^{n-1}.\end{aligned}$$

Esta divergencia desaparece para $n = -2$, un hecho de importancia en la Sección 1.14.

Para desarrollar cierto sentido del significado físico de la divergencia, considere $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ con $\mathbf{v}(x, y, z)$ la velocidad de un fluido compresible y $\rho(x, y, z)$, su densidad en el punto (x, y, z). Si se considera un volumen pequeño dx, dy, dz (Fig. 1.16), el fluido que fluye hacia el interior de este volumen por unidad de tiempo (dirección x positiva) a través de la cara $EFGH$ es (tasa de flujo de entrada)$_{EFGH} = \rho v_x \, dy \, dz$. La tasa de flujo de salida (dirección x aún positiva) a través de la cara $ABCD$ es

$$(\text{tasa de flujo de salida})_{ABCD} = \left[\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\, dx\right] dy\, dz,$$

la derivada[1] que permite la posibilidad de una densidad o velocidad no uniforme o ambas.[2] La tasa neta de flujo de *salida*, para estas dos caras,

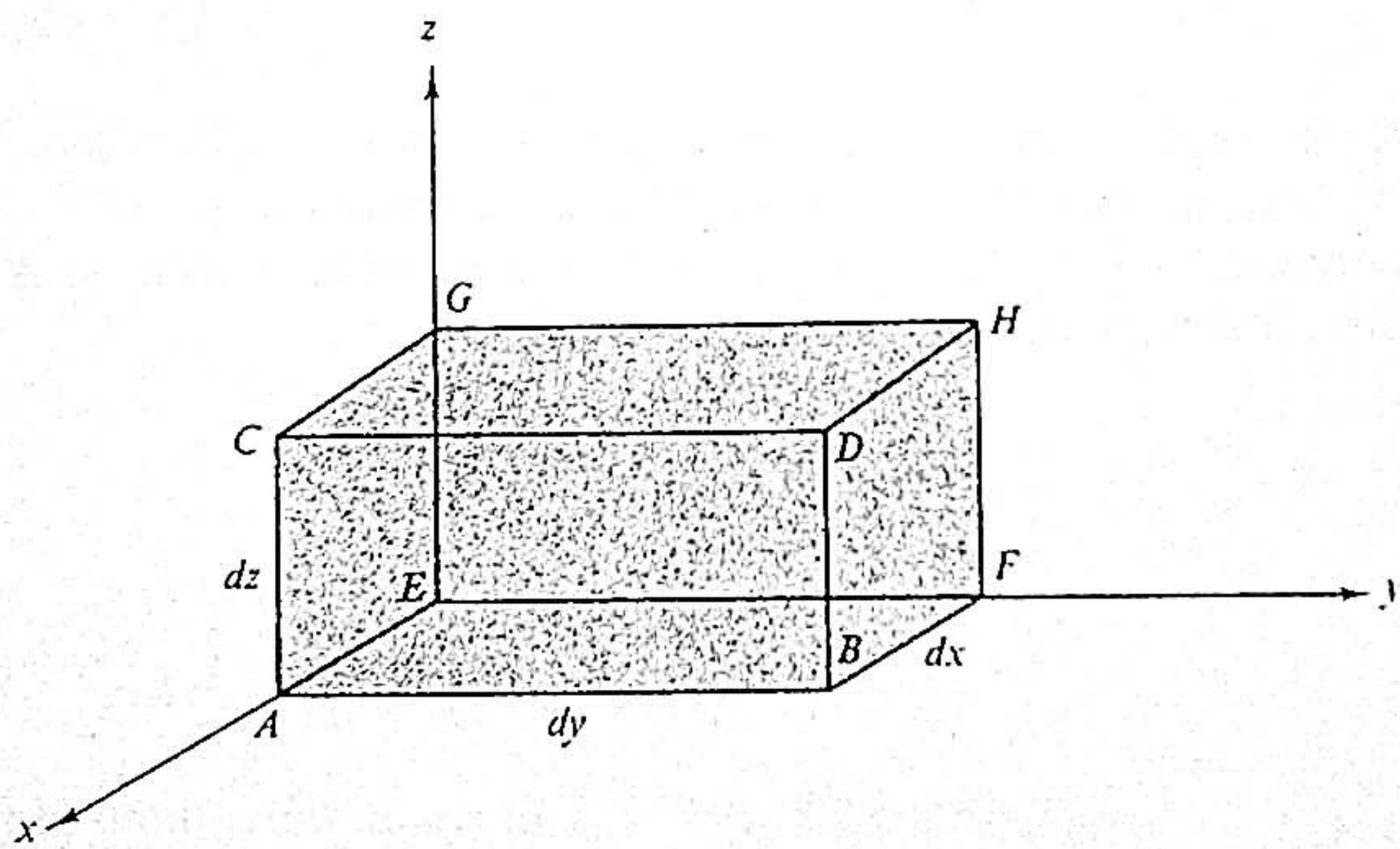


Fig. 1.16 Paralelepípedo rectangular diferencial (en el primer octante u octante positivo)

[1] La expresión origina el inicio del desarrollo de Maclaurin

$$f(h) = f(0) + \frac{df}{dx}h + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

(Sección 5.6), en donde $h = dx$. Cada derivada se evalúa en el punto inicial $x = 0$.

[2] Desde un punto de vista estricto ρv_x se promedia con relación a la cara $EFGH$ y la expresión $\rho v_x + (\partial/\partial x)(\rho v_x)\, dx$ se promedia de manera similar con relación a la cara $ABCD$. Utilizando un volumen diferencial arbitrariamente pequeño, los promedios se reducen a los valores empleados aquí.

es simplemente la diferencia entre estos dos flujos, o sea

$$\text{tasa neta de flujo de salida} \Big|_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\, dx\, dy\, dz.$$

Sumando la tasa neta de flujo para las otras cuatro caras de nuestro elemento de volumen,

$$\begin{aligned}\text{flujo neto de salida (por unidad de tiempo)} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right] dx\, dy\, dz \\ &= \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\, dx\, dy\, dz. \qquad (1.61)\end{aligned}$$

En consecuencia, el flujo neto de nuestro fluido compresible de salida del elemento de volumen $dx\, dy\, dz$ por unidad de volumen y por unidad de tiempo es $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$. De esto se deriva el nombre de *divergencia*. Una aplicación directa se ve en la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \qquad (1.62)$$

que establece simplemente el hecho de que el flujo neto de salida del volumen resulta en una menor densidad dentro del volumen.

La combinación $\nabla \cdot (f\mathbf{V})$, en donde f es una función escalar y $\mathbf{V}$ un vector, puede indicarse como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (f\mathbf{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fV_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fV_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fV_z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}V_x + f\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}V_y + f\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}V_z + f\frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{V} + f\nabla \cdot \mathbf{V}, \qquad (1.62a)\end{aligned}$$

lo cual representa justamente lo que podría esperarse para la derivada de un producto.

Si se considera como caso especial la divergencia de un vector que desaparece,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (1.63)$$

se dice que el vector $\mathbf{B}$ es solenoidal, término que procede del ejemplo en que $\mathbf{B}$ es la inducción magnética y la Ec. 1.63 aparece como una de las ecuaciones de Maxwell.

EJERCICIOS

1.7.1 Para una partícula que se mueve en una órbita circular $\mathbf{r} = \mathbf{i}r \cos \omega t + \mathbf{j}r \operatorname{sen} \omega t$,
(a) evaluar $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.
(b) Demuestre que $\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = 0$.
El radio r y la velocidad angular ω son constantes. *Respuesta.* (a) $\mathbf{k}\omega r^2$.

1.7.2 El vector $\mathbf{A}$ satisface la ley de transformación vectorial, Ec. 1.15. Demuestre directamente que la derivada de tiempo $d\mathbf{A}/dt$ también satisface la Ec. 1.15 y consecuentemente es un vector.

1.7.3 Demuestre, mediante la diferenciación de componentes, que

$$\text{(a)}\ \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

$$\text{(b)}\ \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

justamente igual que la derivada del producto de dos funciones algebraicas.

1.7.4 Demuestre que $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$.
Sugerencia: Aplique un tratamiento como producto escalar triple.

1.7.5 Un cuerpo rígido gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Demuestre que la velocidad lineal $\mathbf{v}$ es solenoidal.

1.7.6 El campo electrostático de un punto q es

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{r^2}.$$

Calcule la divergencia de $\mathbf{E}$.

1.7.7 En el Capítulo 2 se indica que los vectores *unitarios* en los sistemas de coordenadas cartesianas en general son funciones de las variables coordenadas, $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i(q_1, q_2, q_3)$ pero $|\mathbf{a}_i| = 1$. Demuestre que $\partial \mathbf{a}_i/\partial q_j = 0$ o que $\partial \mathbf{a}_i/\partial q_j$ es ortogonal con respecto a $\mathbf{a}_i$.

1.8 Rotacional, $\nabla \times$

Cualquier operación posible con el operador vectorial ∇ consiste en cruzarlo a un vector. Se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}, \quad (1.64)$$

lo cual se denomina el rotacional de $\mathbf{V}$. Al desarrollar esta forma de determinante o en cualquier operación con ∇, la naturaleza derivativa de

∇ debe considerarse. Específicamente, $\mathbf{V} \times \nabla$ está definido solamente como operador, otro operador diferencial vectorial. En términos generales, ciertamente no es igual a $-\nabla \times \mathbf{V}$.[1] En el caso de la Ec. 1.64 nuestro determinante debe desarrollarse *desde la parte superior para abajo* de modo que resulten las derivadas como se muestra en la porción media de la Ec. 1.64. Si ∇ se cruza al producto de un escalar y un vector, se puede demostrar que

$$\begin{aligned}\nabla \times (f\mathbf{V})\Big|_x &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(fV_z) - \frac{\partial}{\partial z}(fV_y)\right] \\ &= \left(f\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}V_z - f\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}V_y\right) \\ &= f\nabla \times \mathbf{V}|_x + (\nabla f) \times \mathbf{V}|_x. \qquad (1.65)\end{aligned}$$

Si se permutan las coordenadas $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$ para recuperar el componente y y luego se permuta una segunda vez para recuperar el componente z,

$$\nabla \times (f\mathbf{V}) = f\nabla \times \mathbf{V} + (\nabla f) \times \mathbf{V}, \qquad (1.66)$$

lo cual es el análogo de producto vectorial de la Ec. 1.62*a*,

EJEMPLO 1.8.1

Calcule $\nabla \times \mathbf{r}\, f(r)$
Mediante la Ec. 1.66

$$\nabla \times \mathbf{r}\, f(r) = f(r)\nabla \times \mathbf{r} + [\nabla f(r)] \times \mathbf{r}.$$

Primeramente,

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

En segundo lugar, utilizando $\nabla f(r) = \mathbf{r}_0(df/dr)$ (Ejemplo 1.6.1),

$$\nabla \times \mathbf{r}\, f(r) = \frac{df}{dr}\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r} = 0.$$

El producto vectorial desaparece ya que $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 r$ y $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0 = 0$.

El nombre rotacional ha sido establecido debido a que en cierto sentido $\nabla \times \mathbf{V}$ describe la rotación del campo de vector $\mathbf{V}$ en el punto donde el

[1] Desde este mismo punto de vista, si $\mathbf{A}$ es un operador diferencial, no necesariamente es cierto que $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$. Específicamente, para el *operador* de momento angular mecánico cuántico, $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$, se encuentra que $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$.

rotacional de $\mathbf{V}$ se evalúa. Suponga que se tiene un cuerpo rígido en el plano xy girando alrededor del eje z con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. La velocidad lineal $\mathbf{v}$ en cierto punto descrito por $\mathbf{r}$ está dada por

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{1.67}$$

Calculemos $\nabla \times \mathbf{v}$. Se encuentra

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{1.68}$$

Mediante readaptación de los términos en la Ec. 1.50 con respecto a la naturaleza de operador de ∇,

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{r}\boldsymbol{\omega} - \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}\mathbf{r}. \tag{1.69}$$

Aquí, ∇ está punteada en el primer vector, pero como operador diferencial opera en ambos vectores. Desarrollando,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\omega}\nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla\boldsymbol{\omega} \\ &\quad - \mathbf{r}\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Si $\boldsymbol{\omega}$ es constante, el segundo y tercer términos en el lado derecho de la Ec. 1.70 desaparecen. Asimismo, se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \tag{1.71}$$

del Ejemplo 1.7.1, y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{r} &= \omega_x \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \\ &\quad + \omega_y \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \\ &\quad + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \\ &= \mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y + \mathbf{k}\omega_z \\ &= \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Mediante la sustitución de las Ecs. 1.71 y 1.72 en la 1.70

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega}, \tag{1.73}$$

o el rotacional de la velocidad lineal de nuestro cuerpo rígido es el doble de la velocidad angular. En la Sección 1.12 se desarrollará una interpretación de $\nabla \times \mathbf{V}$ a modo de circulación medible en términos de ruedas de paletas delgadas. A partir del resultado $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}$, Ec. 1.72, se tiene que $\nabla\mathbf{r}$ es un operador unitario en el sentido de que $\mathbf{A} \cdot (\nabla\mathbf{r}) = \mathbf{A}$ para cualquier vector $\mathbf{A}$. Esto representará un resultado formal en la Sección 3.5 cuando el análisis vectorial sea extendido a la diádica.

Siempre que el rotacional de un vector $\mathbf{V}$ desaparece,

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0, \tag{1.74}$$

$\mathbf{V}$ se denomina irrotacional. Los ejemplos físicos de mayor importancia de los vectores irrotacionales son las fuerzas gravitacionales y electrostáticas. En tal caso,

$$\mathbf{V} = C\frac{\mathbf{r}_0}{r^2} = C\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \tag{1.75}$$

en donde C es una constante y $\mathbf{r}_0$ es el vector unitario en la dirección radial hacia afuera. Para el caso gravitacional, se tiene $C = -Gm_1m_2$, lo cual está determinado por la ley de Newton de la gravitación universal. Si $C = q_1q_2/4\pi\varepsilon_0$, se tiene la ley de Coulomb de la electrostática (unidades mks). La fuerza $\mathbf{V}$ determinada por la Ec. 1.75 se puede demostrar que es irrotacional mediante el desarrollo directo en los componentes cartesianos como se hizo en el Ejemplo 1.8.1. Otro procedimiento se desarrolla en el Capítulo 2, en donde expresamos $\nabla\times$, el rotacional, en términos de las coordenadas polares esféricas.

Para ondas en un medio elástico, si el desplazamiento $\mathbf{u}$ es irrotacional, $\nabla\times\mathbf{u} = 0$, las ondas planas (o las ondas esféricas a grandes distancias) se vuelven longitudinales. Si $\mathbf{u}$ es solenoidal, $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, entonces las ondas se vuelven transversales. Un disturbio sísmico produce un desplazamiento que puede resolverse en una parte solenoidal y una parte irrotacional (cf. Sección 1.15). La parte irrotacional resulta en las ondas de terremoto (primarias) P longitudinales. La parte solenoidal origina las ondas transversales S (secundarias) más lentas, Ejercicio 3.6.7.

Utilizando el gradiente, la divergencia y el rotacional, y evidentemente la regla *BAC-CAB,* existe la posibilidad de construir o verificar un gran número de identidades vectoriales de utilidad. Para la verificación, el desarrollo completo en los componentes cartesianos siempre representa una posibilidad. Ocasionalmente, cuando se hace uso del discernimiento en lugar de la evasión rutinaria de los componentes cartesianos, el procedimiento de verificación puede acortarse drásticamente.

Recuerde que ∇ es un operador vectorial, un producto híbrido que satisface dos conjuntos de reglas:

(a) las reglas vectoriales, y

(b) las reglas de la diferenciación parcial —incluyendo la diferenciación de un producto.

EJEMPLO 1.8.2 GRADIENTE DE UN PRODUCTO ESCALAR

Verifique que

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}). \tag{1}$$

Este ejemplo particular se apoya en el reconocimiento de que $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ es el tipo de término que aparece en el desarrollo *BAC-CAB* de un producto vectorial triple, Ec. 1.50. Por ejemplo,

$$\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{2}$$

con el ∇ diferenciando solamente a **B** y no a **A**. A partir de la propiedad conmutativa de los factores en el producto escalar, se puede intercambiar **A** y **B** y escribir

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}, \tag{3}$$

ahora con ∇ diferenciando solamente a **A** y no a **B**. Sumando estas dos ecuaciones, se obtiene ∇ diferenciando el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y la identidad, Ec. (1).

Esta identidad se utiliza frecuentemente en la teoría electromagnética avanzada. El Ejercicio 1.8.12 representa tan solo una ilustración simple.

EJERCICIOS

1.8.1 Demuestre, mediante la rotación de las coordenadas, que los componentes del rotacional de un vector se transforman como un vector.

Sugerencia: Las identidades de coseno de dirección de la Ec. 1.41 se encuentran disponibles según se requiera.

1.8.2 Demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es solenoidal si **u** y **v** son cada una irrotacional.

1.8.3 Si **A** es irrotacional, demuestre que $\mathbf{A} \times \mathbf{r}$ es solenoidal.

1.8.4 Una función vectorial $\mathbf{f}(x, y, z)$ no es irrotacional, pero el producto de **f** por una función escalar $g(x, y, z)$ es irrotacional. Demuestre que

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0.$$

1.8.5 Si (a) $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x(x, y) + \mathbf{j}V_y(x, y)$ y (b) $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$, demuestre que $\nabla \times \mathbf{V}$ es perpendicular a **V**.

1.8.6 Los operadores de momento angular mecánico cuántico son

$$L_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$L_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$L_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Demuestre que

$$L_x L_y - L_y L_x = iL_z,$$

En consecuencia,

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}.$$

1.8.7 Con la notación de paréntesis de conmutador $[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x$, el vector de momento angular **L** satisface $[L_x, L_y] = iL_z$, etc., o $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$.

Otros dos vectores **a** y **b** se conmutan entre sí y con **L**, es decir $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{L}] = [\mathbf{b}, \mathbf{L}] = 0$. Demuestre que

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{L}] = i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{L}.$$

1.8.8 Verifique la identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}).$$

1.8.9 Como una alternativa a la identidad vectorial del Ejemplo 1.8.2 demuestre que

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \times \nabla) \times \mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

1.8.10 Verifique la identidad

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \tfrac{1}{2}\nabla(A^2) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

1.8.11 Si **A** y **B** son vectores constantes, demuestre que

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

1.8.12 Una distribución de corrientes eléctricas origina un momento magnético constante **m**. La fuerza en **m** en una inducción magnética externa **B** está dada por

$$\mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}).$$

Demuestre que

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).$$

Nota. Suponiendo que no hay dependencia con respecto al tiempo de los campos, la ecuación de Maxwell resulta en $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. Asimismo, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

1.8.13 Un dipolo eléctrico de momento **p** se localiza en el origen. El dipolo origina un potencial eléctrico en **r** dado por

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Encuentre el campo eléctrico, $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ en **r**.

1.8.14 El potencial vectorial **A** de un dipolo magnético, momento dipolo **m**, está dado por $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi)(\mathbf{m} \times \mathbf{r}/r^3)$. Demuestre que la inducción magnética $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ está dada por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3}.$$

Nota. El proceso limitante con respecto a los dipolos de punto se trata en la Sección 12.1 para los dipolos eléctricos, Sección 12.5 para dipolos magnéticos.

1.8.15 La velocidad de flujo bidimensional de un líquido está dada por

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}u(x,y) - \mathbf{j}v(x,y).$$

Si el líquido es incompresible y el flujo es irrotacional, demuestre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Estas son las condiciones de Cauchy-Riemann de la Sección 6.2.

1.9 Aplicaciones Sucesivas de ∇

Hasta ahora hemos definido el gradiente, la divergencia y el rotacional para obtener un vector, escalar y cantidades vectoriales, respectivamente. Permitiendo que ∇ opere en cada una de estas cantidades, se obtiene

$$\text{(a) } \nabla \cdot \nabla\varphi \qquad \text{(b) } \nabla \times \nabla\varphi \qquad \text{(c) } \nabla\nabla \cdot \mathbf{V}$$

$$\text{(d) } \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} \qquad \text{(e) } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}),$$

en donde las cinco expresiones implican segundas derivadas y las cinco aparecen en las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la física matemática, particularmente en la teoría electromagnética.

La primera expresión, $\nabla \cdot \nabla\varphi$, la divergencia del gradiente, se denomina laplaciana de φ. Se tiene

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{1.76a}$$

Cuando φ es el potencial electrostático, se tiene

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = 0. \tag{1.76b}$$

la cual representa la ecuación de Laplace para la electrostática. Frecuentemente, la combinación $\nabla \cdot \nabla$ se escribe ∇^2.

EJEMPLO 1.9.1

Calcule $\nabla \cdot \nabla\, g(r)$.

Considerando los Ejemplos 1.6.1 y 1.7.2,

$$\nabla \cdot \nabla\, g(r) = \nabla \cdot \mathbf{r}_0 \frac{dg}{dr}$$

$$= \frac{2}{r}\frac{dg}{dr} + \frac{d^2g}{dr^2},$$

sustituyendo $f(r)$ en el Ejemplo 1.7.2 por $1/r \cdot dg/dr$. Si $g(r) = r^n$, esto se reduce a

$$\nabla \cdot \nabla r^n = n(n+1)r^{n-2}.$$

Esto desaparecerá para $n = 0$ [$g(r) =$ constante] y para $n = -1$, es decir, $g(r) = 1/r$ es una solución de la ecuación de Laplace, $\nabla^2\, g(r) = 0$.

La expresión (b) puede indicarse en la forma

$$\nabla \times \nabla\varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante

$$\nabla \times \nabla\varphi = \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right)$$

$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}\right) = 0, \tag{1.77}$$

suponiendo que el orden de la diferenciación parcial se puede intercambiar. Esto será cierto mientras que las segundas derivadas parciales de φ sean funciones continuas. En consecuencia, de acuerdo con la Ec. 1.77, el rotacional de un gradiente es igualmente cero. Por lo tanto, todos los gradientes son irrotacionales.

La expresión (d) es un producto escalar triple que puede escribirse en la forma

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \tag{1.78}$$

Nuevamente, suponiendo la continuidad de modo que el orden de la diferenciación sea independiente, se obtiene

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0. \tag{1.79}$$

La divergencia de un rotacional desaparece o todos los rotacionales son solenoidales. En la Sección 1.15 se indica que los vectores se pueden resolver para obtener partes solenoidales e irrotacionales por medio del teorema de Helmholtz.

Las dos expresiones restantes satisfacen una relación

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla\mathbf{V}. \tag{1.80}$$

Esto se deriva inmediatamente de la Ec. 1.50, la regla *BAC-CAB*, que puede volver a escribirse de modo que **C** aparezca en el extremo derecho de cada término. El término $\nabla \cdot \nabla\mathbf{V}$ no ha sido incluido en nuestra lista, pero se puede *definir* por medio de la Ec. 1.80. Si **V** se desarrolla a coordenadas cartesianas, de modo que los vectores unitarios sean constantes en dirección, así como en magnitud, $\nabla \cdot \nabla\mathbf{V}$, un vector laplaciano, se reduce a

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{V} = \mathbf{i}\mathbf{V} \cdot \nabla V_x + \mathbf{j}\mathbf{V} \cdot \nabla V_y + \mathbf{k}\mathbf{V} \cdot \nabla V_z,$$

una suma vectorial de laplacianos escalares ordinarios. Mediante el desarrollo a coordenadas cartesianas, se puede verificar la Ec. 1.80 como identidad vectorial.

EJEMPLO 1.9.2 ECUACION DE ONDA ELECTROMAGNETICA

Una aplicación importante de esta relación vectorial (Ec. 1.80) consiste en la derivación de la ecuación de onda electromagnética. Al vacío, las ecuaciones de Maxwell se transforman en

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.81a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{1.81b}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1.81c}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{1.81d}$$

Aquí **E** es el campo eléctrico, **B** la inducción magnética, y ε_0 y μ_0 son las permitividades (unidades mks). Suponga que se elimina **B** de las Ecs. 1.81*c* y 1.81*d*. Esto puede lograrse considerando el rotacional en ambos lados de la Ec. 1.81*d* y la derivada de tiempo de ambos lados de la Ec. 1.81*c*. Ya que las derivadas de espacio y tiempo se conmutan,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.82}$$

se obtiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{1.83}$$

La aplicación de las Ecs. 1.80 y 1.81*b* resulta en

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{1.84}$$

es decir la ecuación de onda de vector electromagnético. Nuevamente, si **E** se expresa en coordenadas cartesianas, la Ec. 1.84 se separa en tres ecuaciones de onda escalar, implicando cada una de las mismas a un laplaciano escalar.

EJERCICIOS

1.9.1 Verifique la Ec. 1.80

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$$

mediante el desarrollo directo en coordenadas cartesianas.

1.9.2 Demuestre que la identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla\nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla\mathbf{V}$$

se obtiene de la regla BAC-CAB para un producto vectorial triple. Justifique cualquier alteración del orden de los factores en los términos BAC y CÁB.

1.9.3 Demuestre que $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$.

1.9.4 Demuestre que $(\nabla u) \times (\nabla v)$ es solenoidal cuando u y v son funciones escalares que pueden diferenciarse.

1.9.5 φ es un escalar que satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2\varphi = 0$. Demuestre que $\nabla\varphi$ es *tanto* solenoidal como irrotacional.

1.9.6 Con ψ como función escalar, demuestre que

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla)\psi = r^2 \nabla^2\psi - r^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

1.9.7 En una masa aislada (no rotatoria) tal como una estrella, la condición de equilibrio es

$$\nabla P + \rho\nabla\varphi = 0.$$

Aquí, P es la presión total, ρ la densidad y φ el potencial gravitacional. Demuestre que en cualquier punto las normales a las superficies de presión constante y potencial gravitacional constante son paralelas.

1.9.8 En la teoría de Pauli relacionada con el electrón, se puede encontrar la expresión

$$(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\psi$$

en donde ψ es una función escalar. $\mathbf{A}$ es el potencial de vector magnético relacionado con la inducción magnética $\mathbf{B}$ por medio de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Considerando que $\mathbf{p} = -i\nabla$, demuestre que esta expresión se reduce a $ie\mathbf{B}\psi$.

1.9.9 Demuestre que cualquier solución de la ecuación

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = 0$$

satisface automáticamente la ecuación vectorial de Helmholtz

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$$

y la condición solenoidal

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

1.10 Integración de Vectores

El siguiente paso después de la diferenciación de los vectores es la integración. Comencemos con las integrales de línea y luego procedamos con las integrales de superficies y volúmenes. En cada caso, el método de ataque consiste en reducir la integral de vector a las integrales escalares, con las cuales se supone que el lector está familiarizado. Utilizando un incremento de longitud $d\mathbf{r}$, podemos encontrar las integrales lineales

$$\int_c \varphi \, d\mathbf{r}, \tag{1.85a}$$

$$\int_c \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}, \tag{1.85b}$$

$$\int_c \mathbf{V} \times d\mathbf{r}, \tag{1.85c}$$

en cada una de las cuales la integral es para cierto contorno C, que puede ser abierto o cerrado. Con φ, un escalar, la primera integral se reduce inmediatamente a

$$\int_c \varphi \, d\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_c \varphi(x, y, z) \, dx + \mathbf{j} \int_c \varphi(x, y, z) \, dy$$

$$+ \mathbf{k} \int_c \varphi(x, y, z) \, dz. \tag{1.86}$$

Esta separación ha utilizado la relación

$$\int \mathbf{i}\varphi \, dx = \mathbf{i} \int \varphi \, dx, \tag{1.87}$$

lo cual es permisible debido a que los vectores unitarios cartesianos **i**, **j** y **k** son constantes tanto en magnitud como en dirección. Probablemente esto sea evidente aquí, pero no es cierto en los sistemas cartesianos que se incluyen en el Capítulo 2.

Las tres integrales del lado derecho de la Ec. 1.86 representan integrales escalares ordinarias y, para evitar complicaciones, suponemos que todas son integrales de Riemann. Sin embargo, debe hacerse notar que la integral con respecto a x no puede evaluarse a menos de que y y z sean conocidos en términos de x y similarmente para las integrales con respecto a y y z. Esto significa simplemente que la trayectoria de integración C debe especificarse. A menos de que el *integrando* tenga propiedades especiales, de modo que la integral solamente dependa del valor en los puntos finales, el valor tendrá dependencia de la selección particular del contorno C. Por ejemplo, si seleccionamos el caso bastante especial $\varphi = 1$, la Ec. 1.85*a* representa simplemente la distancia vectorial desde el inicio del contorno C hasta el punto final, que en este caso es independiente de la selección de la trayectoria que conecta los puntos extremos fijos. Con $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz$, la segunda y tercera formas también se reducen a integrales escalares y, de modo similar a la Ec. 1.85*a*, dependen en lo general de la selección de la trayectoria. La forma (Ec. 1.85*b*) es exactamente la misma que la encontrada cuando se calculó el trabajo realizado con una fuerza que varía a lo largo de la trayectoria,

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{1.88}$$

En esta expresión, **F** es la fuerza ejercida en una partícula o en un objeto para vencer el campo de fuerza existente previamente, que también puede ser gravitacional, electrostático, etc.

EJEMPLO 1.10.1

Integre la función escalar $r^2 = x^2 + y^2$ desde el origen hasta el punto (1, 1) utilizando un incremento de longitud dirigido $d\mathbf{r}$; es decir, evalúe

$$\int_{0,0}^{1,1} (x^2 + y^2)\, d\mathbf{r}$$

Si desarrollamos $d\mathbf{r}$, la integral se transforma en

$$\int_{0,0}^{1,1} (x^2 + y^2)(\mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy) = \mathbf{i} \int_{0,0}^{1,1} (x^2 + y^2)\, dx + \mathbf{j} \int_{0,0}^{1,1} (x^2 + y^2)\, dy.$$

Seleccionemos la trayectoria mostrada en la Fig. 1.17. Esto significa que $y = 0$ en la primera integral

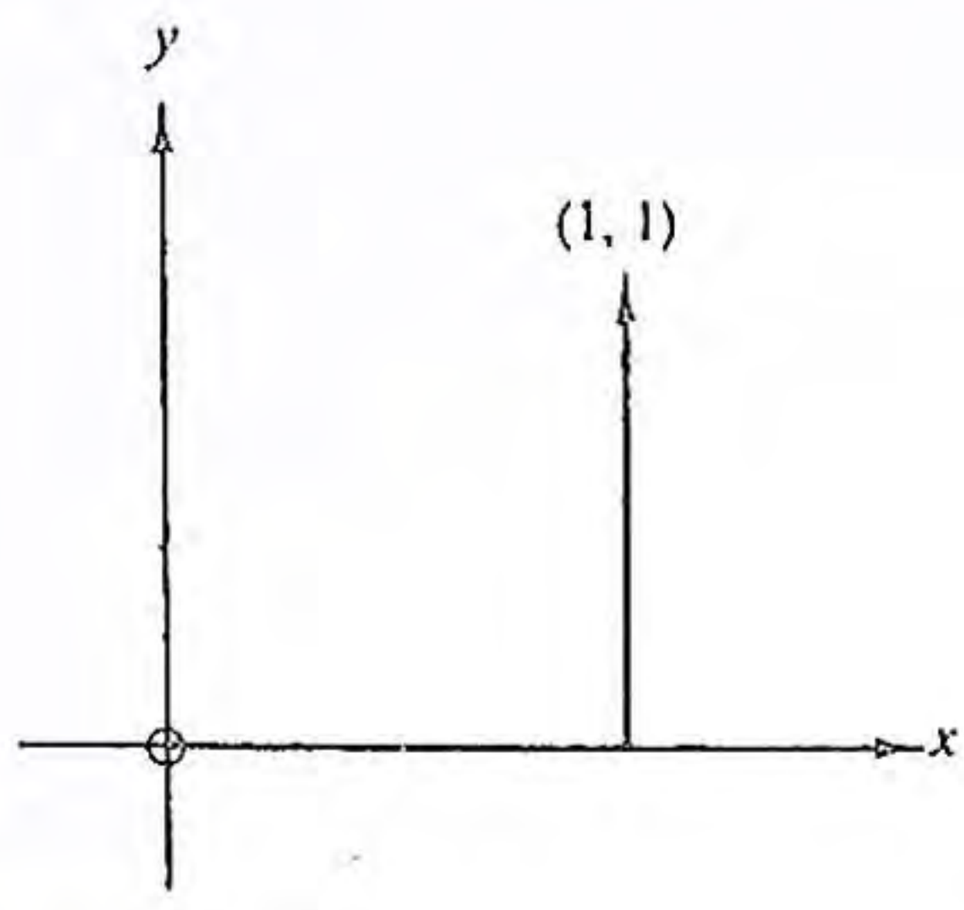


Fig. 1.17

y $x = 1$ en la segunda. Mediante la sustitución en las integrales, se obtiene

$$\int_{0,0}^{1,1} (x^2 + y^2)\, d\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_{0,y=0}^{1} (x^2 + y^2)\, dx + \mathbf{j} \int_{0,x=1}^{1} (x^2 + y^2)\, dy = \mathbf{i}\tfrac{1}{3} + \mathbf{j}\tfrac{4}{3}.$$

El lector puede demostrar que la trayectoria $(0, 0) \to (0, 1) \to (1, 1)$ resulta en $\mathbf{i}\frac{4}{3} + \mathbf{j}\frac{1}{3}$, mientras que la trayectoria $x = y$ proporciona $\mathbf{i}\frac{2}{3} + \mathbf{j}\frac{2}{3}$. El valor de la integral depende de la trayectoria seleccionada.

Las integrales de superficie aparecen en las mismas formas que las integrales lineales, de modo que el elemento de área también es un vector, $d\boldsymbol{\sigma}$.[1] Frecuentemente, este elemento de área se indica en la forma $\mathbf{n}\, dA$, en donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario (normal) para indicar la dirección positiva.[2] Existen dos convenios para seleccionar la dirección positiva. Primeramente, si la superficie es una superficie cerrada, aceptamos considerar a la normal hacia afuera como positiva. En segundo lugar, si la superficie es una superficie abierta, la normal positiva depende de la dirección en que el perímetro de la superficie abierta se atraviesa. Si los dedos de la mano

[1] Recuerde que en la Sección 1.4 el área (de un paralelogramo) representa un *vector* procedente de un producto vectorial.

[2] Aun cuando $\mathbf{n}$ siempre tiene una longitud unitaria, su dirección bien puede ser una función de posición.

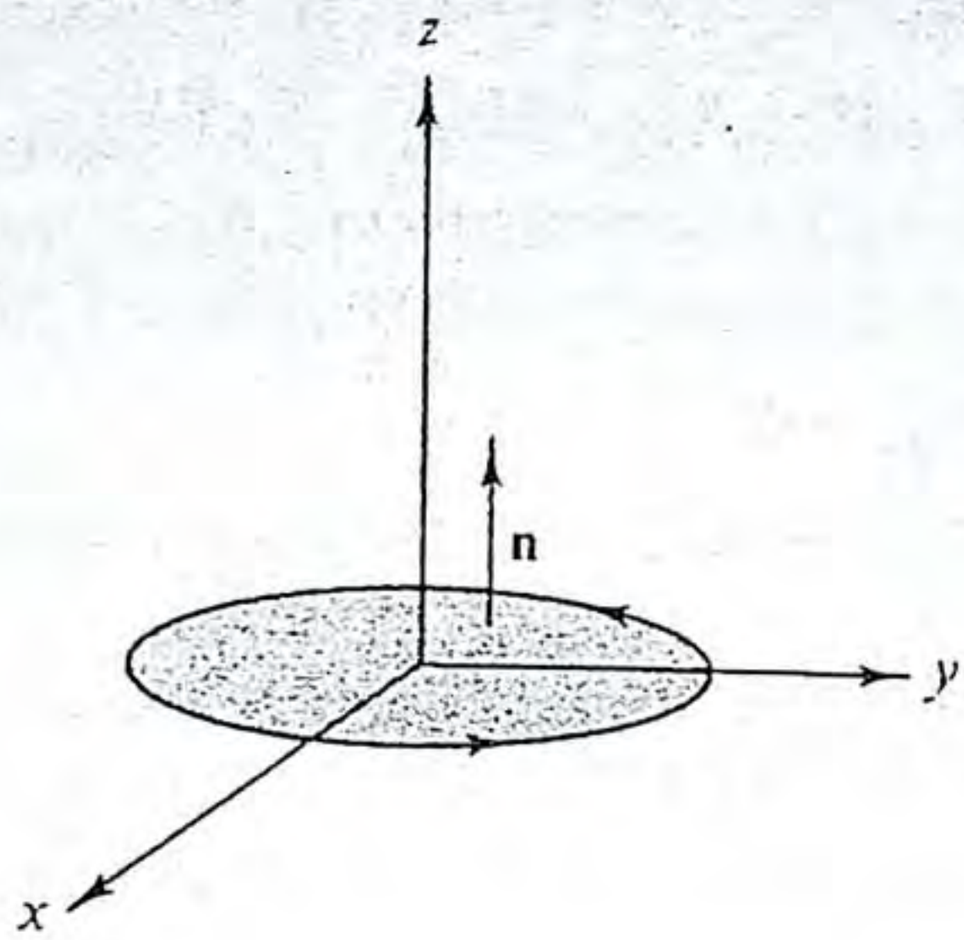


Fig. 1.18 Regla de la mano derecha para la normal positiva

derecha se colocan en la dirección de trayectoria alrededor del perímetro, la normal positiva queda indicada por el pulgar de la mano derecha. Como ilustración, un círculo en el plano xy (Fig. 1.18) marcado desde x a y hasta $-x$ a $-y$ y de regreso a x tiene su normal positiva paralela al eje z positivo (para nuestro sistema coordenado derecho). Cuando el lector llegue a encontrar superficies de un solo lado, tal como las cintas de Moebius, se sugiere el cortado de las mismas y la formación de superficies de comportamiento adecuado y razonable o que las defina como patológicas y las envíe al departamento de matemáticas más cercano.

La integral de superficie $\int \mathbf{v} \cdot d\sigma$ se puede interpretar como un flujo a través de cierta superficie. Esto es realmente lo que se ha hecho en la Sección 1.7 para obtener el significado del término divergencia. Esta identificación vuelve a aparecer en la Sección 1.11 en la forma del teorema de Gauss.

Las integrales de volumen son algo más simple, ya que el elemento de volumen $d\tau$ es una cantidad escalar.[1] Se tiene

$$\int_V \mathbf{V}\, d\tau = \mathbf{i} \int_V V_x\, d\tau + \mathbf{j} \int_V V_y\, d\tau + \mathbf{k} \int_V V_z\, d\tau, \tag{1.89}$$

nuevamente al reducir la integral de vector a una suma vectorial de integrales escalares.

Una aplicación interesante y significativa de nuestras integrales de superficie y volumen es su uso en el desarrollo de definiciones alternativas de las relaciones diferenciales. Se encuentra que

$$\nabla\varphi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \varphi\, d\sigma}{\int d\tau}, \tag{1.90}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \mathbf{V} \cdot d\sigma}{\int d\tau}, \tag{1.91}$$

[1] Frecuentemente, los símbolos d^3r y d^3x se utilizan para designar un elemento de volumen en el espacio $x(xyz$ o $x_1x_2x_3)$.

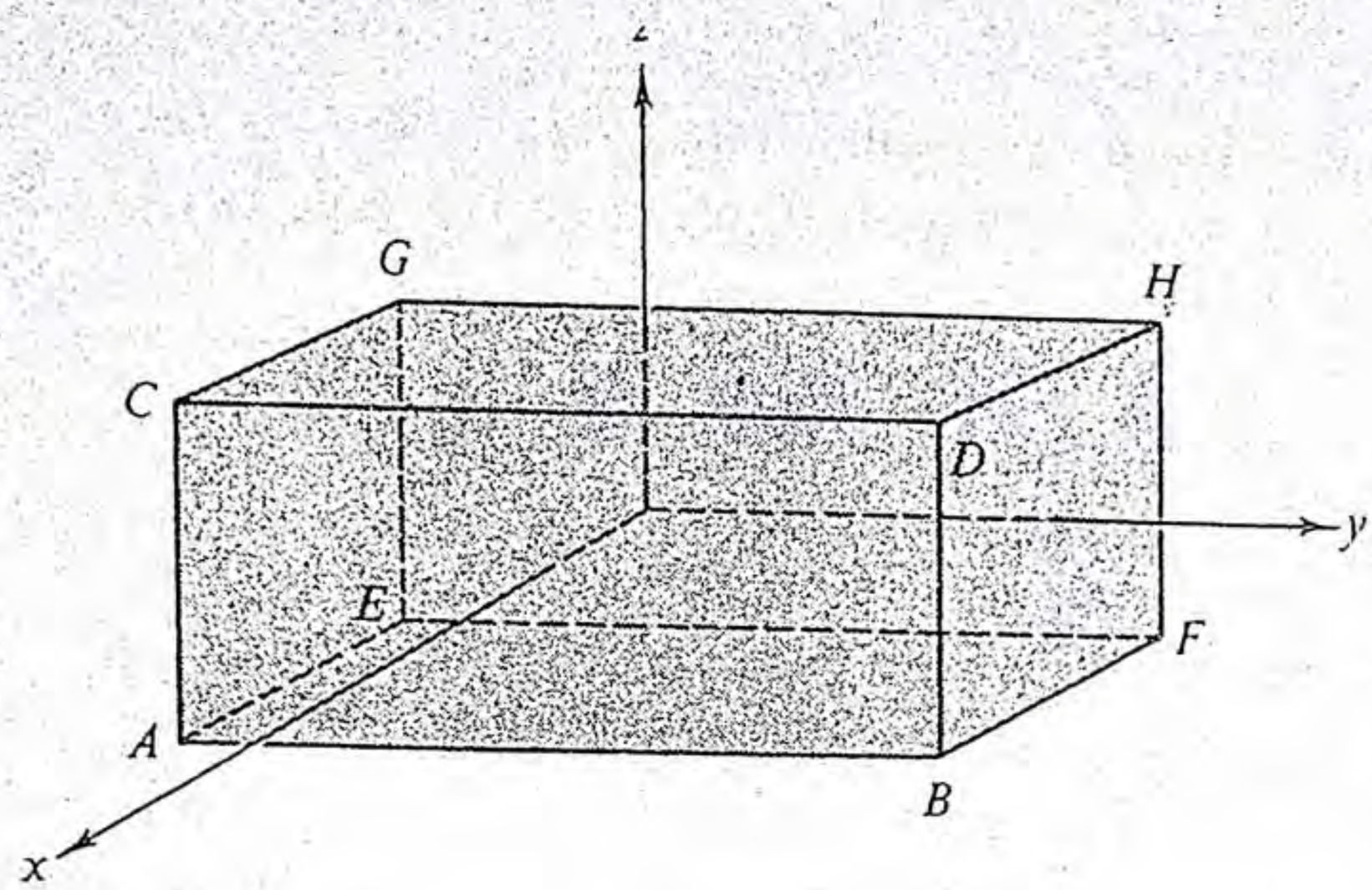


Fig. 1.19 Paralelepípedo rectangular diferencial (origen en el centro)

$$\nabla \times \mathbf{V} = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V}}{\int d\tau}. \tag{1.92}$$

En estas tres ecuaciones, $\int d\tau$ es el volumen de una pequeña región de espacio y $d\boldsymbol{\sigma}$ es el elemento de área vectorial de este volumen. La identificación de la Ec. 1.91 como la divergencia de $\mathbf{V}$ ha sido realizada en la Sección 1.7. Aquí demostraremos que la Ec. 1.90 es consistente con nuestra definición anterior de $\nabla\varphi$ (Ec. 1.53). Por simplicidad, seleccionamos $\int d\tau$ para ser el volumen diferencial $dx\,dy\,dz$ (Fig. 1.19). En esta ocasión, el origen del centro geométrico de nuestro elemento de volumen se coloca en el origen. La integral del área origina seis integrales, una para cada una de las seis caras. Recordando que $d\boldsymbol{\sigma}$ es hacia afuera, $d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i} = -|d\boldsymbol{\sigma}|$ para la superficie $EFGH$ y $+|d\boldsymbol{\sigma}|$ para la superficie $ABCD$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \varphi\, d\boldsymbol{\sigma} = &-\mathbf{i} \int_{EFHG} \left(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz + \mathbf{i} \int_{ABDC} \left(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz \\ &-\mathbf{j} \int_{AEGC} \left(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\,dz + \mathbf{j} \int_{BFHD} \left(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\,dz \\ &-\mathbf{k} \int_{ABFE} \left(\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\,dy + \mathbf{k} \int_{CDHG} \left(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\,dy.\end{aligned}$$

Cada *integrando* se evalúa en el origen con una corrección incluida para que sea ajustada por el desplazamiento del centro de la cara con respecto al origen. Habiendo seleccionado el volumen total como de tamaño diferencial ($\int d\tau = dx\,dy\,dz$), los signos de integral se pasan a la derecha y se obtiene

$$\int \varphi\, d\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \tag{1.93}$$

Dividiendo entre

$$\int d\tau = dx\,dy\,dz.$$

Con lo cual se verifica la Ec. 1.90.

Esta verificación ha sido sobresimplificada al ignorar otros términos de corrección fuera de las primeras derivadas. Estos términos adicionales, que se introducen en la Sección 5.6 cuando se desarrolla la expansión de Taylor, desaparecen en el límite

$$\int d\tau \to 0 \; (dx \to 0, \, dy \to 0, \, dz \to 0).$$

Evidentemente, esto es la razón para especificar en las Ecs. 1.90, 1.91 y 1.92 que se ha considerado el límite.

La verificación de la Ec. 1.92 sigue exactamente estas líneas utilizando el volumen diferencial $dx\,dy\,dz$.

EJERCICIOS

1.10.1 El campo de fuerza que actúa en un oscilador lineal bidimensional puede describirse mediante

$$\mathbf{F} = -\mathbf{i}kx - \mathbf{j}ky.$$

Compare el trabajo efectuado al moverse en contra de este campo de fuerza cuando se pasa de (1, 1) a (4, 4) por medio de las siguientes trayectorias de línea recta:

(a) $(1, 1) \to (4, 1) \to (4, 4)$
(b) $(1, 1) \to (1, 4) \to (4, 4)$
(c) $(1, 1) \to (4, 4)$ a lo largo de $x = y$.

Esto significa evaluar

$$-\int_{(1,1)}^{(4,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

a lo largo de cada trayectoria.

1.10.2 Encuentre el trabajo realizado al pasar alrededor de un círculo unitario en el plano xy:
(a) en el sentido contrario a las manecillas del reloj desde 0 hasta π,
(b) en el sentido de las manecillas del reloj desde 0 hasta $-\pi$,
cuando el trabajo se realiza en *contra* de un campo de fuerza dado por

$$\mathbf{F} = \frac{-\mathbf{i}y}{x^2 + y^2} + \frac{\mathbf{j}x}{x^2 + y^2}.$$

Observe que el trabajo realizado depende de la trayectoria.

1.10.3 Calcule el trabajo efectuado al pasar del punto (1, 1) al punto (3, 3). La fuerza que se *ejerce* está dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}(x - y) + \mathbf{j}(x + y).$$

Especifique claramente la trayectoria seleccionada. Observe que este campo de fuerza no es conservativo.

1.10.4 Evalúe $\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$.

Nota. El símbolo $\oint$ significa que la trayectoria de integración es un circuito cerrado.

1.10.5 Evalúe

$$\frac{1}{3}\int_s \mathbf{r}\cdot d\sigma$$

sobre el cubo unitario definido por el punto (0, 0, 0) y considerando que la unidad interseca en los ejes positivos x, y y z. Observe que (a) $\mathbf{r}\cdot d\sigma$ es cero para tres de las superficies y (b) cada una de las tres superficies remanentes contribuye en la misma proporción a la integral.

1.10.6 Demuestre mediante el desarrollo de la integral de superficie que

$$\lim_{\int d\tau\to 0} \frac{\int_s d\sigma \times \mathbf{V}}{\int d\tau} = \nabla \times \mathbf{V}.$$

Sugerencia: Seleccione el volumen como un volumen diferencial, $dx\,dy\,dz$.

1.11 Teorema de Gauss

Aquí verificamos una relación útil entre una integral de superficie de un vector y una integral de volumen de una derivada del vector. Suponga que el vector $\mathbf{V}$ y $\nabla\cdot\mathbf{V}$ son continuos en la región de interés. Siendo así, el teorema de Gauss establece que

$$\int_s \mathbf{V}\cdot d\sigma = \int_v \nabla\cdot\mathbf{V}\,d\tau. \tag{1.94}$$

Hemos visto (Ec. 1.61) que $\nabla\cdot\mathbf{V}$ se puede interpretar como un flujo de salida neto del fluido por unidad de volumen. En consecuencia, el lado derecho de la Ec. 1.94 es la tasa total de flujo de fluido fuera del volumen sobre el cual se efectúa la integración. Reconociendo que el lado izquierdo también representa simplemente una descripción del flujo de salida a través de la superficie que encierra nuestro volumen, se demuestra el teorema de Gauss.

Para una mayor demostración, de procedimientos matemáticos, más que físicos, detallada y rigurosa, el lector puede consultar el libro de Kellogg, *Foundations of Potential Theory* o alguna de las otras referencias mencionadas.

Un corolario frecuentemente empleado del teorema de Gauss es una relación que se conoce con el nombre de teorema de Green. Si u y v son funciones escalares, se tienen las identidades

$$\nabla\cdot(u\,\nabla v) = u\,\nabla\cdot\nabla v + (\nabla u)\cdot(\nabla v), \tag{1.95}$$

$$\nabla\cdot(v\,\nabla u) = v\,\nabla\cdot\nabla u + (\nabla v)\cdot(\nabla u). \tag{1.96}$$

Restando la Ec. 1.96 de la Ec. 1.95, integrando con respecto al volumen (u, v y sus derivadas se suponen continuas) y aplicando la Ec. 1.94 (teorema de Gauss), se obtiene

$$\int_v (u\,\nabla\cdot\nabla v - v\,\nabla\cdot\nabla u)\,d\tau = \int_s (u\,\nabla v - v\,\nabla u)\cdot d\sigma. \tag{1.97}$$

Esto es el teorema de Green. Se utiliza para desarrollar las funciones de Green. Capítulos 8 y 16. Una forma alternativa derivada de la Ec. 1.95 es

$$\int_S u\,\nabla v \cdot d\sigma = \int_V u\,\nabla \cdot \nabla v\,d\tau + \int_V \nabla u \cdot \nabla v\,d\tau. \tag{1.98}$$

Esta es la forma del teorema de Green utilizada en la Sección 1.15.

Aun cuando la Ec. 1.94, que implica la divergencia, constituye con mucho la forma más importante del teorema de Gauss, las integrales de volumen que involucran al gradiente y el rotacional también puede aparecer. Suponga que

$$\mathbf{V}(x, y, z) = V(x, y, z)\mathbf{a}, \tag{1.99}$$

en donde **a** es un vector con una magnitud constante y una dirección constante pero arbitraria. (Usted selecciona la velocidad, pero una vez que se ha hecho, esto se conserva constante.)

La Ec. 1.94 se transforma en

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \int_S V\,d\sigma &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{a}V\,d\tau \\ &= \mathbf{a} \cdot \int_V \nabla V\,d\tau \end{aligned} \tag{1.100}$$

por medio de la Ec. 1.62*a*. Esto puede escribirse nuevamente como

$$\mathbf{a} \cdot \left[\int_S V\,d\sigma - \int_V \nabla V\,d\tau\right] = 0. \tag{1.101}$$

ya que $|\mathbf{a}| \neq 0$ y considerando que su dirección es arbitraria, significando con esto que el coseno del ángulo incluido no *siempre* desaparece, el término entre paréntesis debe ser cero. El resultado es

$$\int_S V\,d\sigma = \int_V \nabla V\,d\tau. \tag{1.102}$$

De manera similar, utilizando $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{P}$ en donde **a** es un vector constante, se puede demostrar que

$$\int_S d\sigma \times \mathbf{P} = \int_V \nabla \times \mathbf{P}\,d\tau. \tag{1.103}$$

Estas dos últimas formas del teorema de Gauss se utilizan en la forma vectorial de la teoría de difracción de Kirchhoff. También se pueden aplicar para verificar las Ecs. 1.90 y 1.92.

El teorema de Gauss también puede extenderse a la diádica o a los tensores (cf. Sección 3.5).

EJERCICIOS

1.11.1 Demuestre que

$$\int_S d\sigma = 0,$$

si S es una superficie cerrada.

1.11.2 Demuestre que

$$\frac{1}{3}\int_S \mathbf{r} \cdot d\sigma = V,$$

en donde V es el volumen encerrado por la superficie cerrada S.

1.11.3 Si $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, demuestre que

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\sigma = 0$$

para cualquier superficie cerrada S.

1.11.4 Para cierto volumen V, considere que ψ es una solución de la ecuación de Laplace (en que las derivadas que aparecen en la misma son continuas). Demuestre que la integral sobre cualquier superficie cerrada en V de la derivada normal de ψ, ($\partial\psi/\partial n$, o $\nabla\psi \cdot \mathbf{n}$) será cero.

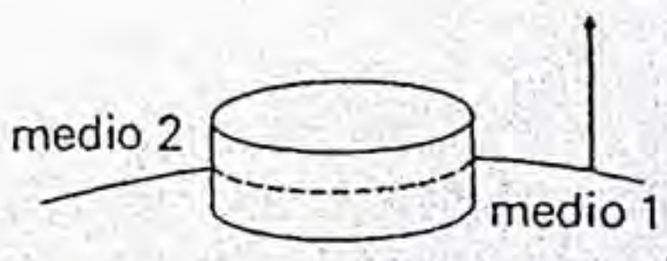
1.11.5 En analogía a las definiciones de integral del gradiente, divergencia y rotacional de la Sección 1.10, demuestre que

$$\nabla^2\varphi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \nabla\varphi \cdot d\sigma}{\int d\tau}.$$

1.11.6 El vector de desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$ satisface la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ en donde ρ es la densidad de carga (por unidad de volumen). En el límite entre dos medios se tiene una densidad de carga superficial σ (por unidad de área). Demuestre que una condición limitante para $\mathbf{D}$ es

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma.$$

$\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la superficie y fuera del medio 1.



Sugerencia: Considere una caja de píldoras *delgada* como se muestra en la figura.

1.11.7 A partir de la Ec. 1.62(a) con $\mathbf{V}$ el campo eléctrico $\mathbf{E}$, y f el potencial electrostático φ, demuestre que

$$\int \rho\varphi \, d\tau = \varepsilon_0 \int E^2 \, d\tau.$$

Sugerencia: Usted puede suponer que φ desaparece cuando r es grande o al menos tan rápida como r^{-1}.

1.11.8 Una distribución de corriente eléctrica de estado uniforme particular se localiza en el espacio. Seleccionando una superficie limitante lo suficientemente lejana para que la densidad de corriente $\mathbf{J}$ sea cero en cualquier parte de la superficie, demuestre que

$$\int \mathbf{J} \, d\tau = 0.$$

Sugerencia: Considere un componente a la vez en **J**. Con $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, demuestre que $J_i = \nabla \cdot x_i \mathbf{J}$ y aplique el teorema de Gauss.

1.11.9 La creación de un sistema *localizado* de corrientes eléctricas (densidad eléctrica **J**) y campos magnéticos se puede demostrar que requiere de cierta cantidad de trabajo.

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}\, d\tau.$$

Transforme esto en

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\, d\tau.$$

Donde **A** existe como potencial de vector magnético.

Sugerencia: En caso de localizar los campos y las corrientes, la superficie limitante debe considerarse lo suficientemente lejana, de modo que las integrales de los campos y las corrientes sobre la superficie sean cero.

1.12 Teorema de Stokes

El teorema de Gauss se relaciona con la integral de volumen de una derivada correspondiente a una función con respecto a la integral de una función sobre una superficie cerrada que limita el volumen. Aquí consideramos una relación análoga entre la integral de superficie de una derivada correspondiente a una función y la integral lineal de la función, en que la trayectoria de integración es el perímetro que limita la superficie. Comencemos con la integral de superficie de un rotacional y procedamos a su transformación.

$$\begin{aligned}\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_S \Bigg(& \frac{\partial V_x}{\partial z}\, d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y}\, d\sigma_z \\ & + \frac{\partial V_y}{\partial x}\, d\sigma_z - \frac{\partial V_y}{\partial z}\, d\sigma_x \\ & + \frac{\partial V_z}{\partial y}\, d\sigma_x - \frac{\partial V_z}{\partial x}\, d\sigma_y \Bigg),\end{aligned} \tag{1.104}$$

desarrollando el *integrando* como producto escalar triple. La integración se realiza sobre cierta superficie considerada. Orientemos nuestros ejes de coordenada cartesianos de modo que su superficie interseque el plano $x = c$, una constante, a lo largo de la línea AB tal como se muestra en la Fig. 1.20. Con el perímetro de la superficie descrito por una línea que pasa a través del plano $x = c$ en la dirección negativa con respecto a A y en la dirección positiva a B, $d\sigma$ será hacia abajo como se muestra.

En particular,

$$\begin{aligned} d\sigma_y &= dx\, dz, \\ d\sigma_z &= -dx\, dy. \end{aligned} \tag{1.105}$$

El incremento dx interviene cuando se considera la cinta de superficie intercecada entre los planos $x = c$ y $x = c + dx$. La integración de las derivadas de V_x sobre esta cinta resulta en

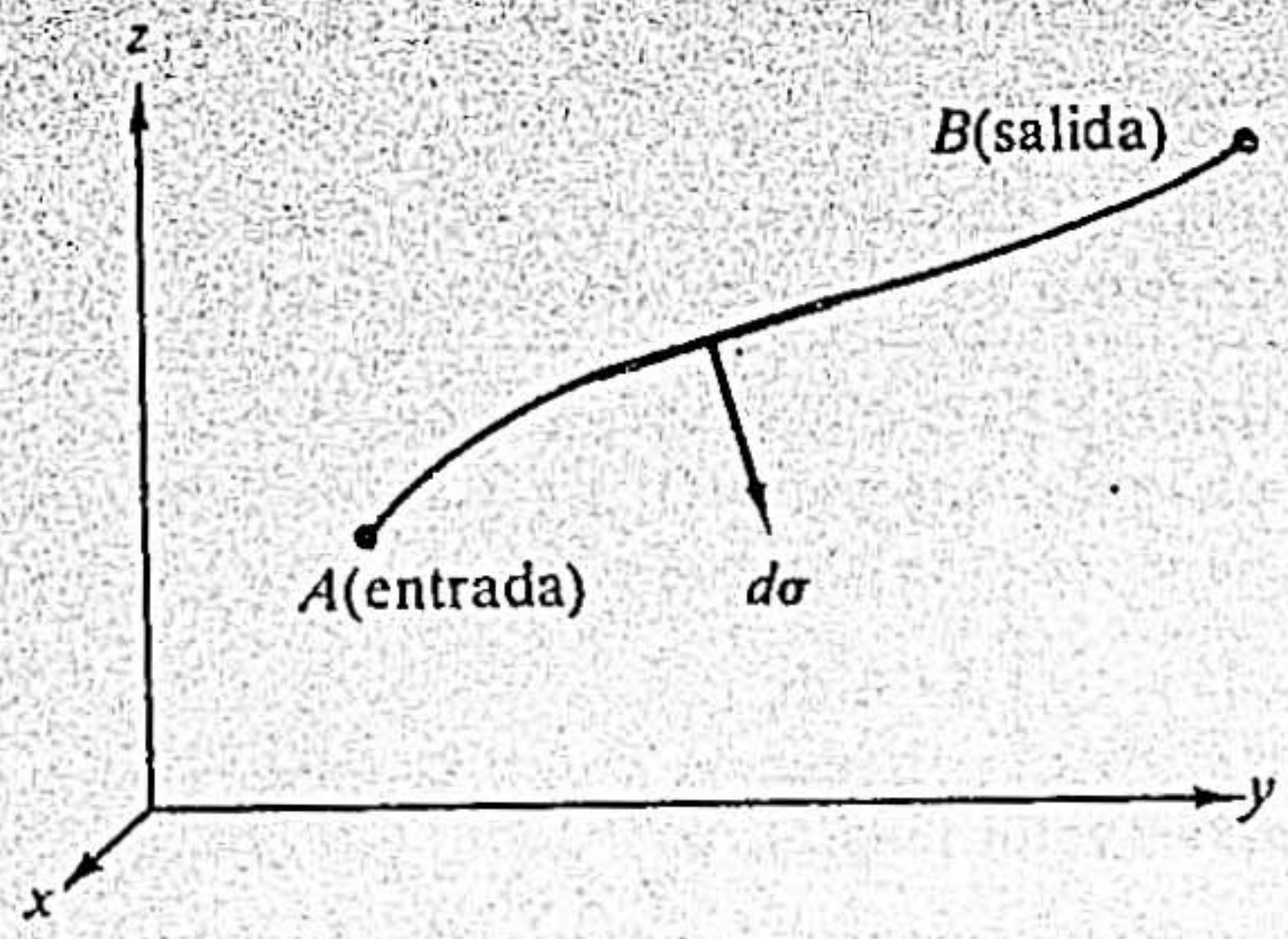


Fig. 1.20 Intersección de la superficie S con el plano $x = c$

$$\int_S \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y} d\sigma_z \right) = \int_S \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz \right) dx. \tag{1.106}$$

Ya que x se mantiene constante en la integración de A hasta B,

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz = dV_x \tag{1.107}$$

y nuestra integral de superficie se transforma en

$$\int dx \int_A^B dV_x = \int V_x(x, y_B, z_B)\, dx - \int V_x(x, y_A, z_A)\, dx. \tag{1.107a}$$

Nuestra selección de dirección al describir el perímetro da lugar a

$dx = d\lambda_x$ en B, lado derecho del perímetro,

$dx = -d\lambda_x$ en A, lado izquierdo del perímetro;

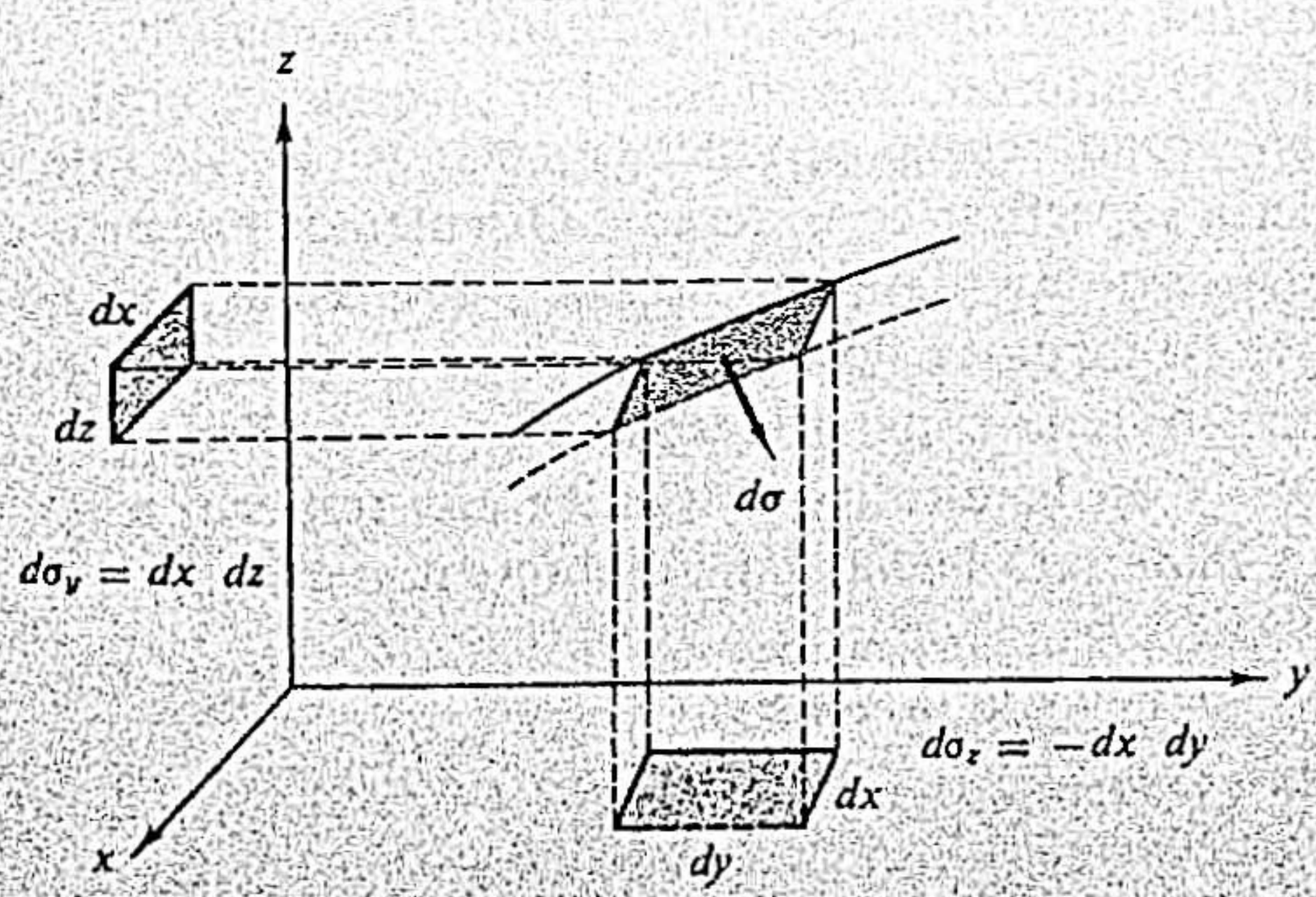


Fig. 1.21 Proyección de $d\sigma$ en los planos xy y xz

en donde $d\lambda$ es un tramo diferencial de vector a lo largo del perímetro. Finalmente, dejando que x se desplace lo suficientemente lejos para cubrir toda la superficie,

$$\int_S \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y} d\sigma_z \right) = \oint V_x \, d\lambda_x. \tag{1.108}$$

El símbolo $\oint$ indica la integral alrededor de una trayectoria cerrada, que en este caso es la periferia de la superficie. Ya sea mediante la permutación cíclica de las coordenadas o por medio de la repetición de la integración (derivadas de V_y y un plano $y = c$, etc.), se obtienen resultados similares para las derivadas de V_y y de V_z. Sumando

$$\begin{aligned} \int \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \oint (V_x \, d\lambda_x + V_y \, d\lambda_y + V_z \, d\lambda_z) \\ &= \oint \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda}. \end{aligned} \tag{1.109}$$

Este es el teorema de Stokes. Nuevamente, el lector que requiera de un mayor rigor matemático puede consultar la obra de Kellogg, *Foundations of Potential Theory*.

Igual que en el teorema de Gauss, existe la posibilidad de otras relaciones entre la superficie y las integrales lineales. Así, se encuentra que

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla\varphi = \oint \varphi \, d\boldsymbol{\lambda} \tag{1.110}$$

y

$$\int_S (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \times \mathbf{P} = \oint d\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{P}. \tag{1.111}$$

La Ec. 1.110 puede verificarse sin dificultad mediante la sustitución de $\mathbf{V} = \mathbf{a}\varphi$, en donde $\mathbf{a}$ es un vector de magnitud constante y de dirección constante, tal como en la Sección 1.11. Sustituyendo en el teorema de Stokes, Ec. 1.109,

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{a}\varphi) \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= - \int_S \mathbf{a} \times \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= -\mathbf{a} \cdot \int_S \nabla\varphi \times d\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \tag{1.112}$$

Para la integral lineal

$$\oint \mathbf{a}\varphi \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{a} \cdot \oint \varphi \, d\boldsymbol{\lambda}, \tag{1.113}$$

y se obtiene

$$\mathbf{a} \cdot \left(\oint \varphi \, d\boldsymbol{\lambda} + \int_S \nabla\varphi \times d\boldsymbol{\sigma} \right) = 0. \tag{1.114}$$

Ya que la selección de dirección para $\mathbf{a}$ es arbitraria, la expresión entre paréntesis debe desaparecer, verificándose así la Ec. 1.110. La Ec. 1.111 se puede derivar de manera similar utilizando $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{P}$, en donde $\mathbf{a}$ nuevamente es un vector constante.

Regresando a la Ec. 1.109, $\oint \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\lambda}$ se puede interpretar como un flujo

de fluido, una circulación a través de un circuito. Si consideramos que la superficie es un círculo de área $\mathbf{k}\, d\sigma$,

$$|\nabla \times \mathbf{V}|\, d\sigma = \text{circulación alrededor de } d\sigma \text{ en el plano } xy$$

Esta es la base para medir el rotacional de $\mathbf{V}$ por medio de la rotación de una rueda de paletas delgada. Si la pequeña rueda de paletas no gira, la circulación es cero y $\mathbf{V}$, según el teorema de Stokes, es irrotacional. Este concepto de circulación es la base para la demostración usual del teorema de Stokes. La superficie original se divide en elementos de superficie diferencial. Las corrientes de circulación a lo largo de las líneas interiores se cancelan y quedamos con una circulación alrededor del perímetro de la superficie original.

La principal aplicación del teorema de Stokes es en la teoría potencial, lo cual constituye el tema de la siguiente sección.

EJERCICIOS

1.12.1 Un vector $\mathbf{t} = -\mathbf{i}y + \mathbf{j}x$. Con la ayuda del teorema de Stokes, demuestre que la integral alrededor de una curva cerrada continua en el plano xy

$$\tfrac{1}{2}\oint \mathbf{t}\cdot d\boldsymbol{\lambda} = \tfrac{1}{2}\oint (x\, dy - y\, dx) = A,$$

el área encerrada por la curva.

1.12.2 (a) A partir del cálculo del momento magnético de un circuito de corriente, proceda a la integración alrededor del perímetro del circuito de corriente (en el plano xy) y demuestre que la magnitud escalar de

$$\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

es el doble del área de la superficie encerrada.

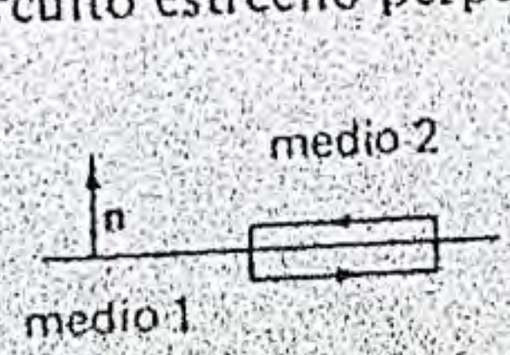
(b) El perímetro de una elipse está descrito por $\mathbf{r} = \mathbf{i}a \cos\theta + \mathbf{j}b \operatorname{sen}\theta$. De acuerdo con la parte (a), demuestre que el área de la elipse es πab.

1.12.3 En el estado uniforme, el campo magnético $\mathbf{H}$ satisface la ecuación de Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, en donde $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente (por metro cuadrado). En el límite entre dos medios se tiene la densidad de corriente $\mathbf{K}$ (por metro). Demuestre que la condición de límite en $\mathbf{H}$ es

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}.$$

$\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la superficie y fuera del medio 1.

Sugerencia: Considere un circuito estrecho perpendicular a la interfase como se muestra en la figura.



1.12.4 A partir de las ecuaciones de Maxwell, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, en donde $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente y $\mathbf{E} = 0$. Demuestre a partir de esto que

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I$$

en donde I es la corriente eléctrica neta encerrada por la integral de circuito. Estas son las formas diferencial e integral de la ley de Ampere para el magnetismo.

1.12.5 Una inducción magnética $\mathbf{B}$ se genera por la corriente eléctrica en un anillo de radio R. Demuestre que la *magnitud* del vector potencial $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) en el anillo es

$$|\mathbf{A}| = \frac{\varphi}{2\pi R}$$

en donde φ es el flujo magnético total que pasa a través del anillo.
Nota. $\mathbf{A}$ es tangencial al anillo.

*1.12.6 Demuestre que

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\sigma = 0,$$

si S es una superficie cerrada.

1.12.7 Evalúe $\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ (Ejercicio 1.10.4) por medio del teorema de Stokes.

1.12.8 Demuestre que

$$\oint u \nabla v \cdot d\lambda = -\oint v \nabla u \cdot d\lambda.$$

1.12.9 Demuestre que

$$\oint u \nabla v \cdot d\lambda = \int_S (\nabla u) \times (\nabla v) \cdot d\sigma.$$

1.12.10 Utilice el teorema de Stokes para construir una definición integral de $\nabla \times \mathbf{V}$.
Nota. Este es el procedimiento utilizado en la Sección 2.2 para desarrollar el rotacional en coordenadas curvilíneas.

1.13 Teoría Potencial

Potencial Escalar. Si una fuerza sobre una región determinada de espacio S se puede expresar como el gradiente negativo de una función φ,

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi, \tag{1.115}$$

el término φ se denomina potencial escalar. La fuerza $\mathbf{F}$ que aparece como gradiente negativo de un potencial escalar de valor simple se denomina fuerza *conservativa*. Deseamos conocer cuándo existe la función potencial escalar. Para responder a esta pregunta establecemos otras dos relaciones como equivalentes a la Ec. 1.115. Estas son

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \tag{1.116}$$

y

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{1.117}$$

para cada trayectoria cerrada en nuestra región S. Procedemos a demostrar que cada una de estas tres ecuaciones implica a las otras dos.

Comencemos con
$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi. \tag{1.118}$$

Siendo así,
$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla\varphi = 0$$

mediante la Ec. 1.77 o la Ec. 1.115 implica a la Ec. 1.116. Regresando a la integral lineal,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\oint d\varphi, \tag{1.119}$$

utilizando la Ec. 1.56. Ahora $d\varphi$ se integra para dar lugar a φ. Ya que hemos especificado un circuito cerrado, los puntos extremos coinciden y se obtiene cero para cada trayectoria cerrada en nuestra región S, para la cual es consistente la Ec. 1.115. Es importante hacer notar que la limitación en este caso es que el potencial sea de valor simple y que la Ec. 1.115 sea consistente para *todos* los puntos en S. Este problema puede presentarse al utilizar un potencial magnético escalar, procedimiento que es perfectamente válido mientras no se tenga circundada una corriente neta. Tan pronto como sea seleccionada una trayectoria en el espacio que circunde una corriente neta, el potencial magnético escalar deja de tener un valor simple y nuestro análisis ya no es aplicable.

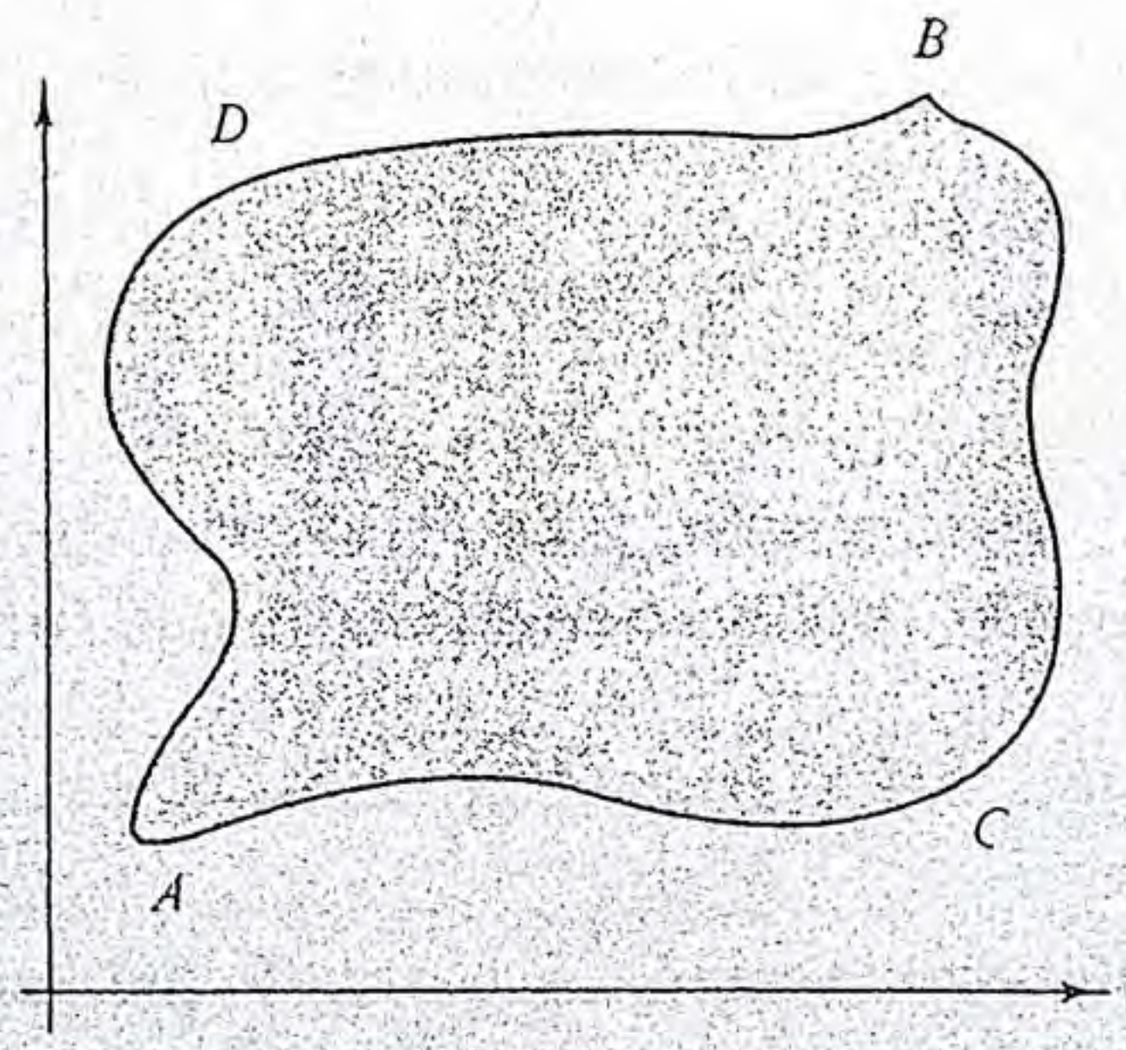


Fig. 1.22 Trayectorias posibles para la realización de trabajo

Continuando con esta demostración de equivalencia, suponga que la Ec. 1.117 es consistente. Si $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las trayectorias en S, observamos que el valor de la integral que une dos puntos distintos A y B es independiente de la trayectoria. Nuestra premisa es que

$$\oint_{ACBDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

En consecuencia,

$$\int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{BDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{1.120}$$

invertimos el signo al invertir la dirección de la integración. Físicamente, esto significa que el trabajo realizado al pasar de A hasta B es independiente de la trayectoria y que el trabajo realizado al pasar alrededor de una trayectoria cerrada es cero. A esto se debe el denominar a tal fuerza como conservativa: la energía se conserva.

Con el resultado demostrado en la Ec. 1.120, tenemos que el trabajo realizado depende solamente de los puntos extremos, A y B. Es decir,

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(A) - \varphi(B). \tag{1.121}$$

La selección del signo en el lado derecho es arbitraria. La selección en este caso se realiza para lograr la concordancia con la Ec. 1.115 y para asegurar que el agua se desplaza colina abajo más que colina arriba. Para los puntos A y B separados por la longitud $d\mathbf{r}$, la Ec. 1.121 se transforma en

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -d\varphi \\ &= -\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{1.122}$$

Esta puede restablecerse en la forma

$$(\mathbf{F} + \nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{1.123}$$

y ya que $d\mathbf{r}$ es arbitraria, la Ec. 1.115 es la que debe resultar. Si

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

la Ec. 1.116 se puede obtener utilizando el teorema de Stokes (Ec. 1.109).

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\sigma. \tag{1.124}$$

Si consideramos la trayectoria de integración como el perímetro de una área diferencial $d\sigma$, el *integrando* en la integral de superficie debe desaparecer. En consecuencia, la Ec. 1.117 implica a la Ec. 1.116.

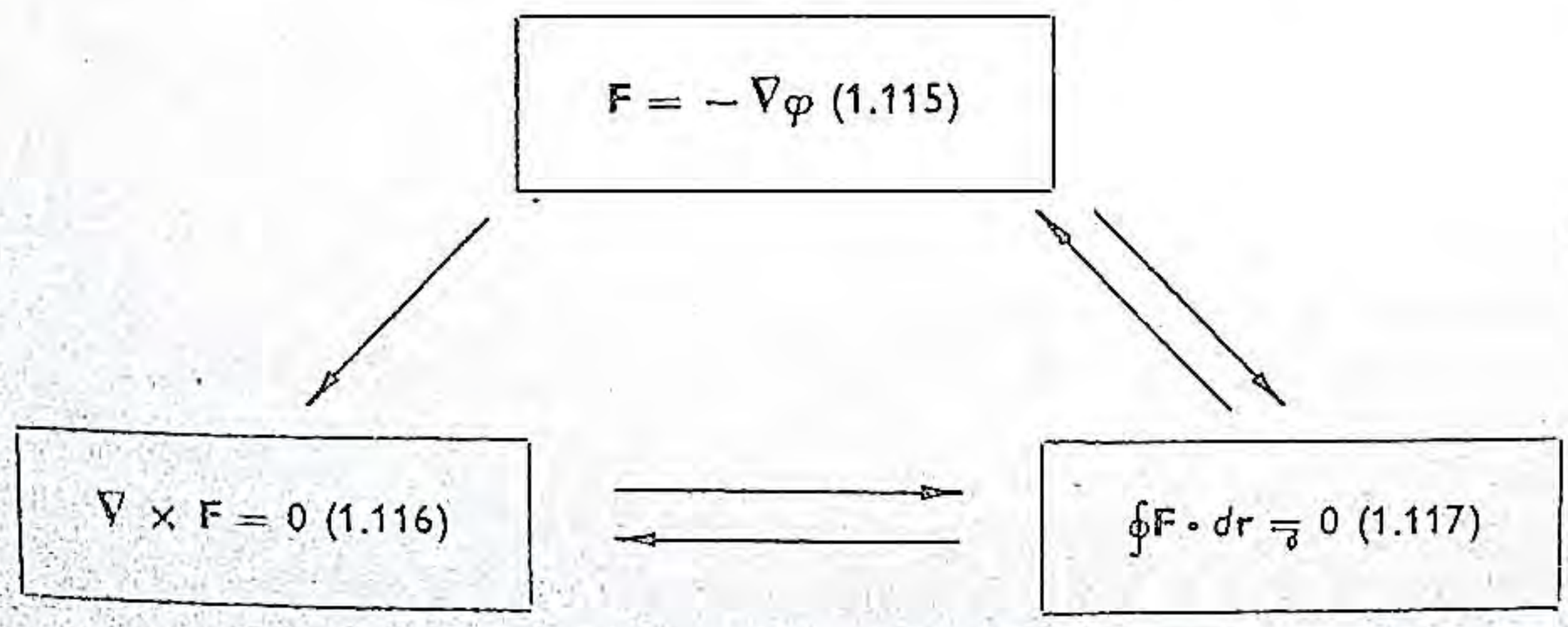


Fig. 1.23 Formulaciones equivalentes

Finalmente, si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, solamente se tiene que invertir el enunciado del teorema de Stokes (Ec. 1.124) para derivar la Ec. 1.117. Siendo así, mediante las Ecs. 1.121 y 1.123 se deriva nuestro enunciado inicial $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$. La equivalencia queda demostrada.

Resumiendo, una función potencial escalar de valor simple φ existe cuando y solamente cuando $\mathbf{F}$ es irrotacional o cuando el trabajo realizado alrededor de cada circuito cerrado es cero. Los campos de fuerza gravitacional y electrostática definidos por la Ec. 1.75 son irrotacionales y consecuentemente conservativos. Existen los potenciales escalares gravitacional y electrostático.

EJEMPLO 1.13.1

Encuentre el potencial escalar para la fuerza gravitacional en una masa unitaria m_1,

$$\mathbf{F}_G = -\frac{Gm_1m_2\mathbf{r}_0}{r^2} = -\frac{k\mathbf{r}_0}{r^2}, \quad \text{radialmente hacia } \textit{adentro}$$

Mediante la integración de la Ec. 1.115 desde el infinito hasta la posición r, se obtiene

$$\varphi_G(r) - \varphi_G(\infty) = -\int_\infty^r \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = +\int_r^\infty \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r}. \tag{1.125}$$

Mediante el uso de $\mathbf{F}_G = -\mathbf{F}_{\text{aplicada}}$, la comparación hecha con la Ec. 1.88 demuestra que el potencial representa el trabajo realizado al llevar la masa unitaria desde el infinito. (Solamente podemos definir la diferencia de potencial. En este caso, asignamos arbitrariamente al infinito un potencial de cero.) La integral en la parte derecha de la Ec. 1.125 es negativa, significando con esto que $\varphi_G(r)$ es negativa. Ya que $\mathbf{F}_G$ es radial, se obtiene la contribución a φ solamente cuando $d\mathbf{r}$ es radial o

$$\varphi_G(r) = \int_r^\infty -\frac{k\,dr}{r^2} = -\frac{k}{r}$$
$$= -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

El signo negativo final es una consecuencia de la fuerza atractiva de la gravedad.

EJEMPLO 1.13.2

Calcule el potencial escalar para la fuerza *centrífuga* por masa unitaria, $\mathbf{F}_C = \omega^2 r\mathbf{r}_0$, radialmente hacia afuera. Físicamente, esto podría corresponder a usted situado en un gran disco giratorio horizontal en un parque de espectáculos. Procediendo como en el Ejemplo 1.13.1, pero integrando desde el origen hacia afuera y considerando $\varphi_C(0) = 0$,

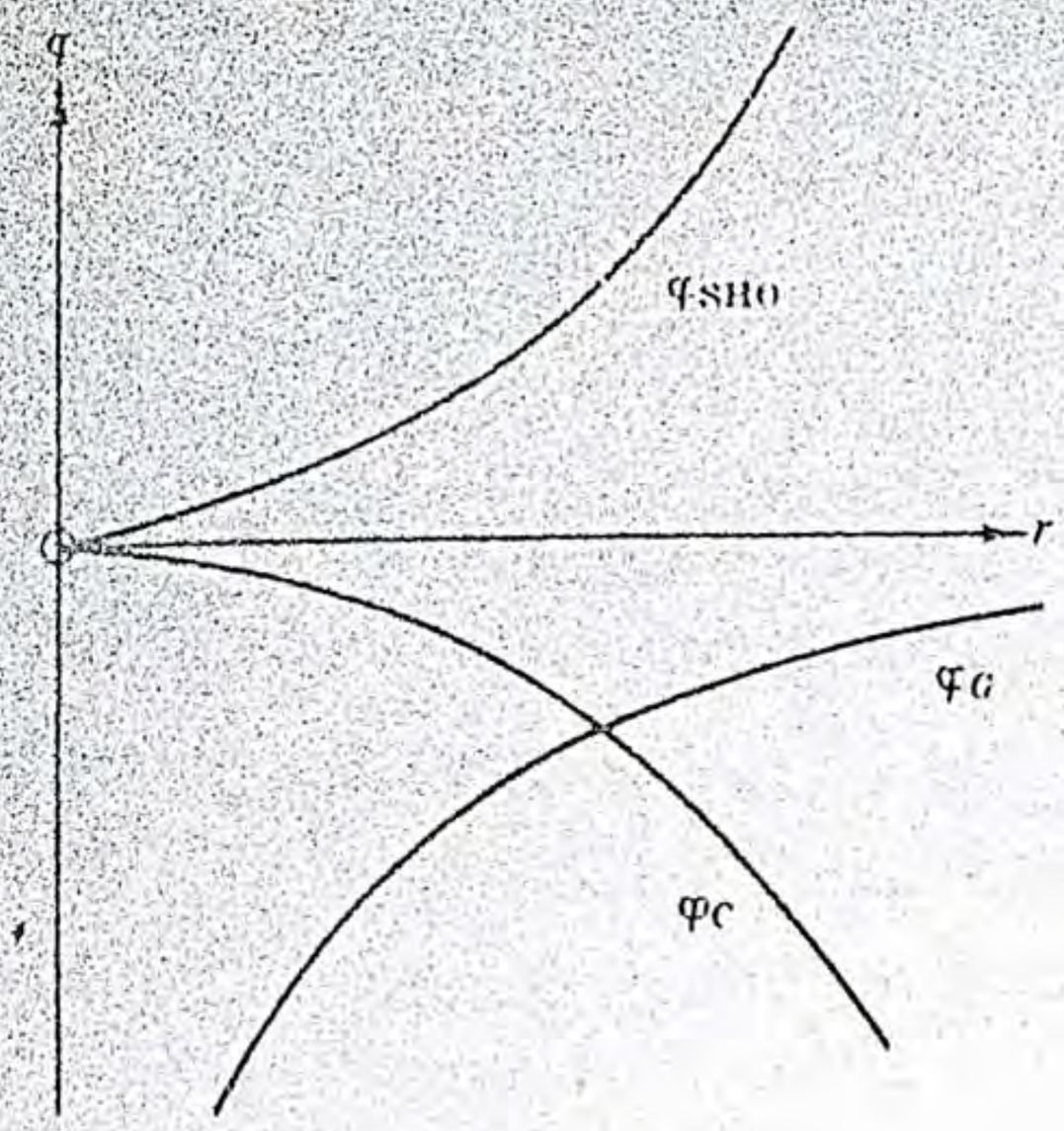


Fig. 1.24 Energía potencial en función de la distancia (oscilador armónico simple, centrífugo y gravitacional)

$$\varphi_C(r) = -\int_0^r \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Si se invierte el signo y considerando $\mathbf{F}_{\text{SHO}} = -k\mathbf{r}$, se obtiene $\varphi_{\text{SHO}} = \frac{1}{2}kr^2$, es decir el potencial de oscilador armónico simple.

Los potenciales de oscilador armónico simple, centrífugo y gravitacional se muestran en la Fig. 1.24. Evidentemente, el oscilador armónico simple genera estabilidad y describe una fuerza de restauración. El potencial centrífugo describe una situación inestable.

En la termodinámica, la cual ocasionalmente se considera como la búsqueda de diferenciales exactas, nos encontramos con ecuaciones de la forma

$$df = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy. \tag{1.126}$$

El problema usual consiste en determinar si $\int (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy)$ depende solamente de los puntos extremos, es decir si df es de hecho una diferencial exacta. La condición necesaria y suficiente es que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{1.126a}$$

o que

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{1.126b}$$

Las Ecs. 1.126*b* dependen de que la relación

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \tag{1.126c}$$

sea satisfecha. Sin embargo, esto es exactamente análogo a la Ec. 1.116, el

requerimiento de que F sea irrotacional. De hecho, el componente z de la Ec. 1.116 da como resultado

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \tag{1.126d}$$

Potencial Vectorial. En algunas ramas de la física, especialmente la teoría electromagnética, es conveniente la introducción del potencial vector A, de tal modo que un campo (fuerza) B esté determinado por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.127}$$

Evidentemente, si la Ec. 1.127 es consistente, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, según la Ec. 1.79 y B, es solenoidal. En este caso, deseamos desarrollar un recíproco, demostrar que cuando B es solenoidal existe un potencial vector A. Demostramos la existencia de A mediante el hecho de calcular verdaderamente esto. Suponga que $\mathbf{B} = \mathbf{i}b_1 + \mathbf{j}b_2 + \mathbf{k}b_3$ y nuestra incógnita $\mathbf{A} = \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$. Mediante la Ec. 1.127

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1, \tag{1.128a}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = b_2, \tag{1.128b}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = b_3. \tag{1.128c}$$

Supongamos que las coordenadas han sido seleccionadas de tal modo que A es paralelo al plano yz, es decir $a_1 = 0$. Siendo así,

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{\partial a_3}{\partial x} \\ b_3 &= \frac{\partial a_2}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1.129}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_{x_0}^{x} b_3\, dx + f_2(y, z), \\ a_3 &= -\int_{x_0}^{x} b_2\, dx + f_3(y, z), \end{aligned} \tag{1.130}$$

en donde f_2 y f_3 son funciones arbitrarias de y y z, pero *no* son funciones de x. La Ec. 1.128a se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} &= -\int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z}\right) dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial b_1}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1.131}$$

utilizando $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Integrando con respecto a x, se obtiene

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1(x, y, z) - b_1(x_0, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}. \tag{1.132}$$

Recordando que f_3 y f_2 son funciones arbitrarias de y y z, seleccionamos

$$f_2 = 0,$$

$$f_3 = \int_{y_0}^{y} b_1(x_0, y, z)\, dy, \tag{1.133}$$

de modo que el lado derecho de la Ec. 1.132 se reduce a $b_1(x, y, z)$ en concordancia con la Ec. 1.128a. Con f_2 y f_3 determinadas por la Ec. 1.133, se puede construir $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{j} \int_{x_0}^{x} b_3(x, y, z)\, dx + \mathbf{k}\left[\int_{y_0}^{y} b_1(x_0, y, z)\, dy - \int_{x_0}^{x} b_2(x, y, z)\, dx\right]. \tag{1.134}$$

Esto aún no esta completo. Se puede agregar cualquier constante ya que $\mathbf{B}$ es una derivada de $\mathbf{A}$. Lo que es mucho más importante, se puede agregar cualquier gradiente de una función escalar $\nabla\varphi$ sin alterar en nada a $\mathbf{B}$. Finalmente, las funciones f_2 y f_3 no son únicas. Se podía haber establecido cualquier otra selección. En la Sección 1.15 se demuestra la posibilidad de que también se pueda especificar $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

EJEMPLO 1.13.3

Para ilustrar la construcción de un potencial vector magnético, consideramos el caso especial pero importante de una inducción magnética constante

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}B_z, \tag{1.135}$$

en donde B_z es una constante. La Ec. 1.128 se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} &= B_z. \end{aligned} \tag{1.136}$$

Si se supone que $a_1 = 0$, como antes, se tendrá mediante la Ec. 1.134

$$\mathbf{A} = \mathbf{j}\int^{x} B_z\, dx$$

$$= \mathbf{j}xB_z, \tag{1.137}$$

lo cual establece que la constante de integración es cero. Como puede observarse fácilmente, esta $\mathbf{A}$ satisface la Ec. 1.127.

Para demostrar que la selección $a_1 = 0$ no ha sido sacrificada o que al menos no era requerida, tratemos de establecer que $a_3 = 0$. De la Ec. 1.136

$$\frac{\partial a_2}{\partial z} = 0, \tag{1.138a}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = 0, \tag{1.138b}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = B_z. \tag{1.138c}$$

De lo cual se puede observar que a_1 y a_2 son independientes de z, o sea

$$a_1 = a_1(x, y), \qquad a_2 = a_2(x, y). \tag{1.139}$$

La Ec. 1.138c se satisface si consideramos

$$a_2 = p\int^{x} B_z\, dx = pxB_z \tag{1.140}$$

y

$$a_1 = (p-1)\int^{y} B_z\, dy = (p-1)yB_z, \tag{1.141}$$

siendo p cualquier constante. De este modo,

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}(p-1)yB_z + \mathbf{j}pxB_z. \tag{1.142}$$

Nuevamente, se tiene que las Ecs. 1.127, 1.135 y 1.142 son consistentes. La comparación de las Ec. 1.137 y 1.142 muestra inmediatamente que $\mathbf{A}$ no es única. La diferencia entre las Ecs. 1.137 y 1.142 y la aparición del parámetro p en la Ec. 1.142 se puede considerar en el reestablecimiento de la Ec. 1.142 en la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -\tfrac{1}{2}(\mathbf{i}y - \mathbf{j}x)B_z \\ &\quad + (p - \tfrac{1}{2})(\mathbf{i}y + \mathbf{j}x)B_z \\ &= -\tfrac{1}{2}(\mathbf{i}y - \mathbf{j}x)B_z + (p - \tfrac{1}{2})B_z\,\nabla\varphi\end{aligned} \tag{1.143}$$

con[1]

$$\varphi = xy. \tag{1.144}$$

[1] $\varphi(x, y) = xy$ evidentemente no es una función escalar en el sentido como ha sido utilizado el término en la Sección 1.3; es decir, xy no resulta invariante a las rotaciones alrededor del eje z. Si se requiere de tal invariancia, el parámetro p debe ser igual a $\frac{1}{2}$.

El primer término en **A** corresponde a la forma usual

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \tag{1.145}$$

para **B**, una constante.

En muchos problemas, el potencial vector magnético **A** se obtendrá a partir de la distribución de corriente que produce la inducción magnética **B**. Esto significa resolver la ecuación (vector) de Poisson (Cf. Ejercicio 1.14.5).

EJERCICIOS

1.13.1 Si la fuerza **F** está dada por

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n\,(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z),$$

encuentre

(a) $\nabla \cdot \mathbf{F}$,

(b) $\nabla \times \mathbf{F}$,

(c) un potencial escalar $\varphi(x, y, z)$ de modo que $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$.

(d) ¿Para qué valor del exponente n se tiene que el potencial escalar difiere tanto en el origen como en el infinito?

Respuesta. (a) $(2n + 3)r^{2n}$ (c) $-\dfrac{1}{2n+2}r^{2n+2}, \quad n \neq -1$

(b) 0 (d) $n = -1, \quad \varphi = -\ln r.$

1.13.2 Una esfera de radio a se carga uniformemente (a través de su volumen). Construya el potencial electrostático $\varphi(r)$ para $0 \leqslant r < \infty$. *Sugerencia.* En la Sección 1.14, se demostró que la fuerza de Coulomb en una carga de prueba cuando $r = r_0$ depende solamente de la carga a distancias menores que r_0 y que es independiente de la carga a una distancia mayor que r_0. Observe que esto se aplica a una distribución de carga *simétrica esféricamente.*

1.13.3 El problema usual en la mecánica clásica consiste en calcular el movimiento de una partícula cuando se conoce el potencial. Para una esfera masiva no rotatoria de densidad uniforme (ρ_0), la ley de Gauss de la Sección 1.14 origina una fuerza gravitacional en una masa unitaria m_0 en el punto r_0 producida por la atracción de la masa en $r \leqslant r_0$. La masa en $r > r_0$ no contribuye en nada a esta fuerza.

(a) Demuestre que $\mathbf{F}/m_0 = -(4\pi G\rho_0/3)\mathbf{r}$, $0 \leqslant r \leqslant a$, en donde a es el radio de la esfera.

(b) Encuentre el potencial gravitacional correspondiente, $0 \leqslant r \leqslant a$.

(c) Imagínese un orificio vertical que se desplaza completamente a través del centro de la Tierra y con salida en el extremo lejano. Despreciando la rotación de la Tierra y suponiendo una densidad uniforme $\rho_0 = 5.5$ gm/cm^3, calcule la naturaleza del movimiento de una partícula que se deje caer dentro del orificio. ¿Cuál es el período?

1.13.4 Un alambre recto largo que lleva la corriente I produce la inducción magnética **B** con los componentes

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right).$$

Encuentre el potencial de vector magnético, A.

Respuesta. $\mathbf{A} = -\mathbf{k}(\mu_0 I/4\pi)\ln(x^2 + y^2)$.

(Esta solución no es única)

1.13.5 Si se tiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}_0}{r^2} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right),$$

encuentre un vector A tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Una solución posible es

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{i}yz}{r(x^2 + y^2)} - \frac{\mathbf{j}xz}{r(x^2 + y^2)}.$$

1.13.6 Demuestre que el par de ecuaciones

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}),$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

se satisface con cualquier vector constante B (cualquier orientación).

1.13.7 La inducción magnética B está relacionada con el potencial de vector magnético A por medio de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Mediante el teorema de Stokes

$$\int \mathbf{B} \cdot d\sigma = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

Demuestre que cada lado de esta ecuación es invariante bajo la *transformación de norma*, $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\psi$.

Nota. La transformación de norma completa se considera en el Ejemplo 3.7.3.

1.13.8 Siendo E el campo eléctrico y A el potencial de vector magnético demuestre que $[\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t]$ es irrotacional y que consecuentemente se puede establecer

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

1.13.9 La fuerza total en una carga q que se mueve con la velocidad v es

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Utilizando los potenciales de vector y escalar, demuestre que

$$\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})\right].$$

Observe que ahora tenemos una derivada de tiempo total de A en lugar de la derivada parcial del Ejemplo 1.13.8.

1.14 Ley de Gauss, Ecuación de Poisson

Ley de Gauss. Considere una carga eléctrica puntal q en el origen de nuestro sistema coordenado. Esto produce el campo eléctrico E determinado por

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{1.146}$$

Ahora derivamos la ley de Gauss en que se establece que la integral de superficie

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0}, \\ 0 \end{cases} \tag{1.147}$$

q/ε_0 cuando la superficie cerrada S incluye el origen (en donde q se encuentra localizada) y cero cuando la superficie no incluye el origen.

Utilizando el teorema de Gauss, Ec. 1.94 (y despreciando $q/4\pi\varepsilon_0$),

$$\int_S \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^2} = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}\right) d\tau = 0 \tag{1.148}$$

mediante el Ejemplo 1.7.2, considerando que la superficie S no incluye el origen, en donde los *integrandos* no se encuentran definidos. Esto proporciona la segunda parte de la ley de Gauss.

La primera parte, en que la superficie S debe incluir el origen, se puede manipular al rodear el origen con una pequeña esfera S' de radio δ. Con objeto de no tener duda acerca de lo que hay en el interior y a qué corresponde el exterior, imaginemos el volumen fuera de la superficie exterior S y el volumen dentro de la superficie $S'(r < \delta)$ conectado por medio de un pequeño orificio. Esto une las superficies S y S', combinando las mismas en una superficie cerrada conectada simplemente. Debido a que el radio del orificio imaginario puede considerarse desvanecidamente pequeño, no se tiene ninguna contribución adicional a la integral de superficie. El teorema de Gauss ahora se aplica al volumen entre S y S' sin ninguna dificultad. Se tiene

$$\int_S \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^2} + \int_{S'} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{\delta^2} = 0. \tag{1.149}$$

Ahora se puede evaluar la segunda integral, para $d\boldsymbol{\sigma}' = -\mathbf{r}_0\delta^2\, d\Omega$, en donde $d\Omega$ es un elemento del ángulo sólido. El signo menos aparece debido a que hemos acordado en la Sección 1.10 tener una normal positiva $\mathbf{r}_0'$ hacia *afuera* del volumen. En este caso, nuestra $\mathbf{r}_0'$ hacia afuera se encuentra en la dirección radial negativa, $\mathbf{r}_0' = -\mathbf{r}_0$. Integrando sobre todos los ángulos

$$\int_{S'} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{\delta^2} = -\int_{S'} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0\delta^2\, d\Omega}{\delta^2} = -4\pi. \tag{1.150}$$

independiente del radio δ. Con las constantes de la Ec. 1.146, esto da como resultado

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{1.151}$$

completando la demostración de la ley de Gauss. Observe cuidadosamente que aun cuando la superficie S puede ser esférica *no hay necesidad* de que sea esférica.

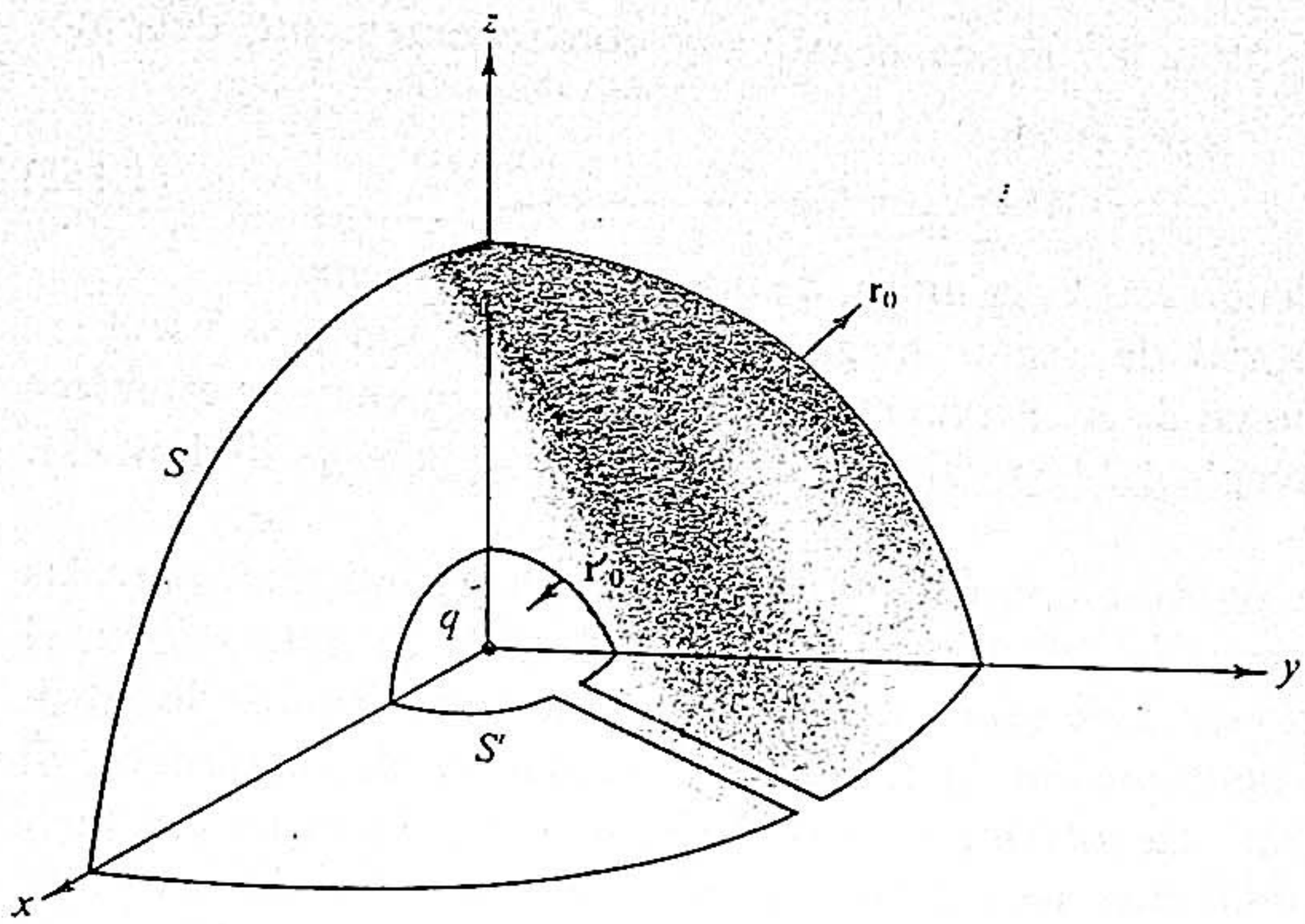


Fig. 1.25 Exclusión del origen

Adelantando, consideremos una carga distribuida de tal modo que

$$q = \int_V \rho \, d\tau. \tag{1.152}$$

La Ec. 1.151 aun puede aplicarse, pero ahora q debe interpretarse como el total de carga distribuida encerrada por la superficie S.

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\sigma = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, d\tau. \tag{1.153}$$

Utilizando el teorema de Gauss, se tiene

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, d\tau. \tag{1.154}$$

Ya que nuestro volumen es completamente arbitrario, los *integrandos* deben ser iguales a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.155}$$

es decir una de las ecuaciones de Maxwell. Si se invierte el argumento, la ley de Gauss es la que sigue inmediatamente de la ecuación de Maxwell.

Ecuación de Poisson. Sustituyendo $\mathbf{E}$ por $-\nabla\varphi$, la Ec. 1.155 se transforma en

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.156}$$

la cual corresponde a la ecuación de Poisson. Para la condición $\rho = 0$ esto se reduce a una ecuación aún más famosa,

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 0, \tag{1.157}$$

es decir la ecuación de Laplace. La ecuación de Laplace se podrá encontrar con bastante frecuencia al describir los diversos sistemas de coordenadas (Capítulo 2) y en la descripción de las funciones especiales de la física matemática que aparecen en su resolución. La ecuación de Poisson resultará ser de suma utilidad en el desarrollo de la teoría de las funciones de Green (Secciones 8.6 y 16.5).

EJERCICIOS

1.14.1 Desarrolle la ley de Gauss para el caso bidimensional en que

$$\varphi = -q\,\frac{\ln \rho}{2\pi\varepsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi = q\,\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{2\pi\varepsilon_0\rho}.$$

Aquí q es la carga en el origen o la carga de línea por longitud unitaria en caso de que nuestro sistema bidimensional consista de una parte de espesor unitario de un sistema tridimensional (cilíndrico circular). La variable ρ se mide radialmente hacia afuera desde la carga de línea. $\boldsymbol{\rho}_0$ es el vector unitario correspondiente (cf. Sección 2.6).

1.14.2 (a) Demuestre que la ley de Gauss se deriva de la ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Aquí, ρ es la densidad de carga usual.

(b) Suponiendo que el campo eléctrico de una carga de punto q es simétricamente estable, demuestre que la ley de Gauss implica la expresión al cuadrado inversa de Coulomb

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

1.14.3 Demuestre que el potencial electrostático φ en cualquier punto P es igual al *promedio* del potencial sobre cualquier superficie esférica centrada en P. No existen cargas eléctricas en o dentro de la esfera.

Sugerencia: Utilice el teorema de Green, Ec. 1.97, con $u^{-1} = r$, la distancia desde P, y $v = \varphi$.

1.14.4 La energía almacenada en un campo electrostático puede indicarse en la forma

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\,d\tau.$$

en donde $\rho(\mathbf{r})$ es la densidad de carga y $\varphi(\mathbf{r})$ es el potencial electrostático. Transforme esto en

$$W = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \int \mathbf{E}^2 d\tau$$

siendo E el campo eléctrico. Esto implica una *densidad* de energía de $\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2$. Suponga que las cargas se encuentran localizadas.

1.14.5 Utilizando las ecuaciones de Maxwell, demuestre que para un sistema estático (corriente uniforme) el potencial de vector magnético **A** satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J},$$

considerando que se requiere que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

1.15 Teorema de Helmholtz

En la Sección 1.13 se acentuó que la selección de un potencial de vector magnético **A** no era única. La divergencia de **A** quedó aún indeterminada. En esta sección se desarrollan dos teoremas acerca de la divergencia y el rotacional de un vector. El primer teorema es como sigue:

un vector se especifica de manera única al proporcionar su divergencia y su rotacional dentro de una región y el componente normal sobre su límite.

Consideremos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}_1 &= s, \\ \nabla \times \mathbf{V}_1 &= \mathbf{c}, \end{aligned} \tag{1.158}$$

en donde s puede interpretarse como una densidad de fuente (carga) y **c** como una densidad de circulación (corriente). Suponiendo también que el componente normal V_{1n} en el límite está determinado, deseamos demostrar que $\mathbf{V}_1$ es único. Esto se logra suponiendo la existencia de un segundo vector $\mathbf{V}_2$, el cual satisface la Ec. 1.158 y tiene el componente normal sobre el límite, y luego demostrando que $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0$. Sea,

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2.$$

Entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = 0 \tag{1.159}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{W} = 0. \tag{1.160}$$

Ya que **W** es irrotacional, podemos indicar (por medio de la Sección 1.13)

$$\mathbf{W} = -\nabla\varphi. \tag{1.161}$$

Sustituyendo esto en la Ec. 1.159, obtenemos

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = 0, \tag{1.162}$$

es decir la ecuación de Laplace.

Ahora consideramos el teorema de Green en la forma proporcionada en la Ec. 1.98, dejando que u y v sean iguales cada una a φ. Ya que

$$W_n = V_{1n} - V_{2n} = 0 \tag{1.163}$$

en el límite, el teorema de Green se reduce a

$$\int_V (\nabla\varphi) \cdot (\nabla\varphi)\, d\tau = \int_V \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}\, d\tau = 0, \tag{1.164}$$

La cantidad $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = W^2$ no es negativa y consecuentemente debemos tener

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0 \tag{1.165}$$

en todo lugar. Siendo así, $\mathbf{V}_1$ es única, demostrando el teorema.

Para el potencial de vector magnético $\mathbf{A}$, la relación $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ especifica al rotacional de $\mathbf{A}$. Frecuentemente, por conveniencia se establece $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (cf. Ejemplo 1.14.5). De este modo (con condiciones limitantes), $\mathbf{A}$ es fija.

Este teorema puede escribirse como un teorema de unicidad para las soluciones de la ecuación de Laplace, Ejemplo 1.15.1. En esta forma, el teorema de unicidad es de gran importancia en la resolución de los problemas de valor limitante con la ecuación de Laplace y electrostáticos. Si podemos encontrar una solución para la ecuación de Laplace que satisfaga las condiciones limitantes necesarias, entonces nuestra solución será una resolución completa. Tales problemas de valor limitante se consideran en las Secciones 12.3 y 12.5.

Teorema de Helmholtz. El segundo teorema que demostraremos es el teorema de Helmholtz:

Un vector $\mathbf{V}$ *que satisface la Ec. 1.158, en que tanto la densidad de fuente como de circulación se desvanecen al infinito, puede indicarse como la suma de dos partes, una de las cuales es irrotacional y la otra solenoidal.*

El teorema de Helmholtz quedará claro y satisfecho, evidentemente, si indicamos $\mathbf{V}$ en la forma

$$\mathbf{V} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}, \tag{1.166}$$

en donde $-\nabla\varphi$ es irrotacional y $\nabla \times \mathbf{A}$ es solenoidal. Procedemos a justificar la Ec. 1.166.

$\mathbf{V}$ es un vector conocido. Considerando la divergencia y el rotacional

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = s(\mathbf{r}) \tag{1.166a}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{c}(\mathbf{r}) \tag{1.166b}$$

con $s(\mathbf{r})$ y $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ son ahora funciones conocidas de posición. A partir de estas dos funciones se construye el potencial escalar $\varphi(\mathbf{r}_1)$,

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2, \tag{1.167a}$$

y un potencial de vector $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2. \tag{1.167b}$$

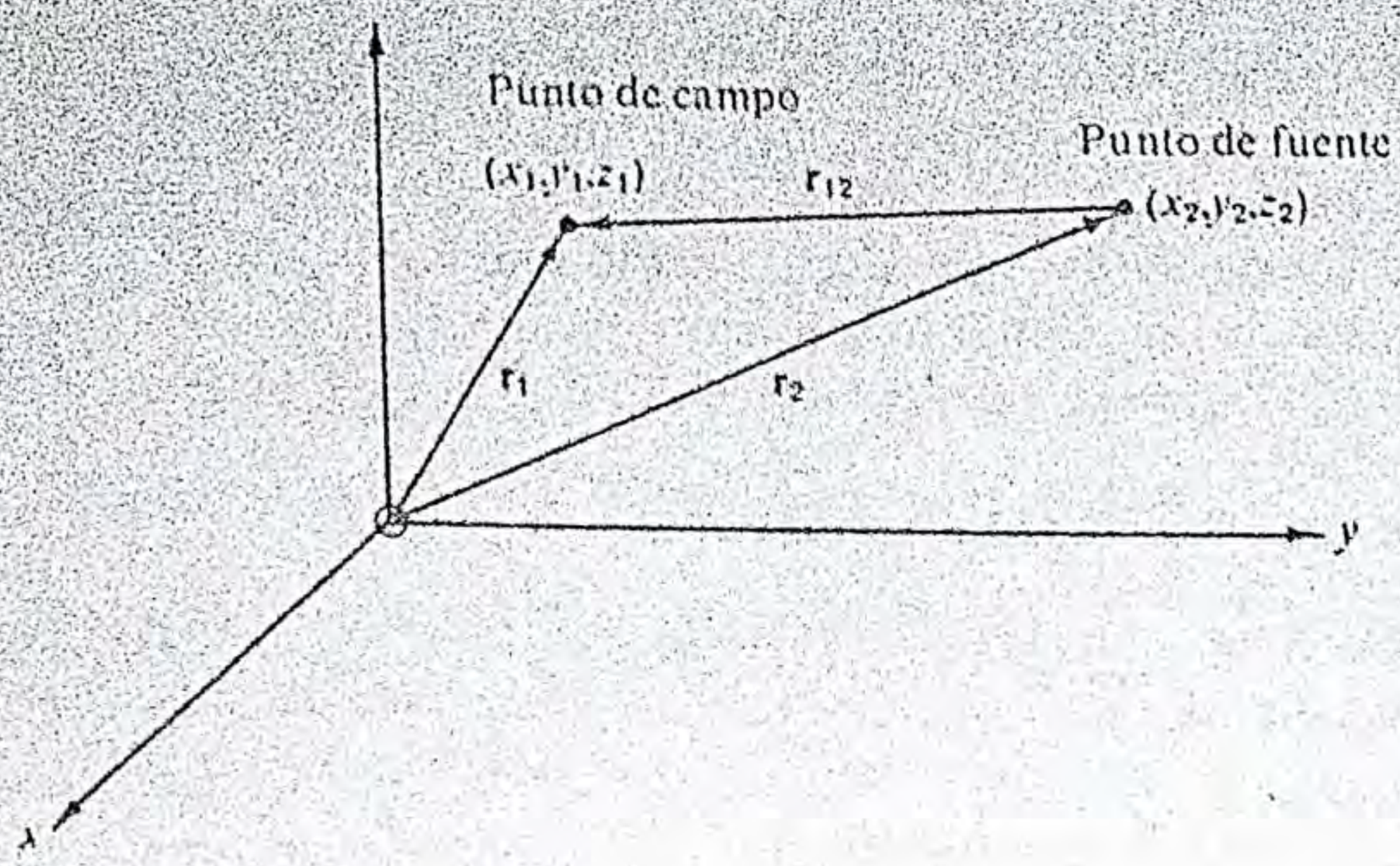


Fig. 1.26 Puntos de campo y fuente

Aquí, el argumento $\mathbf{r}_1$ indica (x_1, y_1, z_1), el punto de campo; $\mathbf{r}_2$, las coordenadas del punto de fuente (x_2, y_2, z_2), con lo cual

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}. \tag{1.168}$$

Cuando una dirección se encuentra asociada con r_{12}, la dirección positiva se toma como alejándose de la fuente y acercándose al punto de campo. Vectorialmente, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, tal como se muestra en la Fig. 1.26. Por supuesto, s y $\mathbf{c}$ deben desaparecer con la suficiente rapidez a grandes distancias como para que existan las integrales.

A partir del teorema de unicidad indicado al principio de esta sección, $\mathbf{V}$ se especifica de manera única por medio de su divergencia, s y el rotacional, $\mathbf{c}$ (y las condiciones limitantes). Regresando a la Ec. 1.66

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = - \nabla \cdot \nabla\varphi, \tag{1.169a}$$

en que la divergencia del rotacional desaparece y

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \tag{1.169b}$$

el rotacional del gradiente desaparece. Si podemos demostrar que

$$-\nabla \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r}_1) = s(\mathbf{r}_1) \tag{1.169c}$$

y

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{c}(\mathbf{r}_1), \tag{1.169d}$$

entonces $\mathbf{V}$, según se define con la Ec. 1.16, tendrá la divergencia y el rotacional adecuados. Nuestra descripción será consistente internamente y la Ec. 1.166 quedará justificada.

Primeramente consideramos la divergencia de $\mathbf{V}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \int \frac{s(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2, \tag{1.170}$$

El operador laplaciano, $\nabla \cdot \nabla$ o sea ∇^2, opera en las coordenadas de campos (x_1, y_1, z_1) y así se conmuta con la integración respecto a (x_2, y_2, z_2). Tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{4\pi} \int s(\mathbf{r}_2) \nabla_1^2 \left(\frac{1}{r_{12}}\right) d\tau_2. \tag{1.171}$$

En la Sección 1.14, hemos demostrado durante el desarrollo de la ley de Gauss que

$$-\int \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}\right) d\tau = \int \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \begin{cases} -4\pi \\ 0 \end{cases}. \tag{1.172}$$

dependiendo de que la integración haya incluido el origen $r=0$. Este resultado puede expresarse convenientemente mediante la introducción de la función delta de Dirac, $\delta(r)$,[1]

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\, \delta(r). \tag{1.173}$$

Esta función delta de Dirac se *define* por medio de sus propiedades asignadas

$$\delta(r) = 0, \qquad r \neq 0, \tag{1.174a}$$

$$\int f(r)\, \delta(r)\, d\tau = f(0), \tag{1.174b}$$

en donde $f(r)$ es cualquier función de comportamiento satisfactorio y el volumen de la integración incluye el origen. Como caso especial de la Ec. 1.174*b*,

$$\int \delta(r)\, d\tau = 1. \tag{1.175}$$

La cantidad $\delta(r)$ realmente no es una función ya que es indefinida (infinita) en $r=0$.

Sin embargo, la propiedad crítica, Ec. 1.174*b*, puede desarrollarse rigurosamente como el límite de una *secuencia* de funciones, es decir una distribución. Este desarrollo aparece en la Sección 8.6. Aquí, procederemos a utilizar la función delta en términos de sus propiedades definidoras.

Debemos establecer dos modificaciones menores en la Ec. 1.173 antes de aplicar la misma. Primeramente, nuestra fuente se encuentra en r_2 y no en el origen. Esto significa que 4π en la ley de Gauss aparece cuando y solamente cuando la superficie incluye el punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$. Para demostrar esto, la Ec. 1.173 se reestablece:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -4\pi\, \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{1.176}$$

[1] Cf. Sección 8.6 para un tratamiento más amplio de la función delta de Dirac.

Este desplazamiento de la fuente a $\mathbf{r}_2$ puede incorporarse en las ecuaciones de definición (1.174) como

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0, \qquad \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2, \tag{1.177a}$$

$$\int f(\mathbf{r}_1)\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,d\mathbf{r}_1 = f(\mathbf{r}_2). \tag{1.177b}$$

En segundo lugar, observando que al diferenciar r_{12}^{-1} dos veces con respecto a x_2, y_2, z_2 es igual que diferenciar *dos veces* con respecto a x_1, y_1, z_1:

$$\begin{aligned}\nabla_1^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = \nabla_2^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right) &= -4\pi\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\\ &= -4\pi\,\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).\end{aligned} \tag{1.178}$$

también podríamos haber notado que de sus propiedades definidoras

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{1.179}$$

Reestableciendo la Ec. 1.171 y utilizando la función delta de Dirac, la Ec. 1.178 se puede integrar para obtener

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{V} &= -\frac{1}{4\pi}\int s(\mathbf{r}_2)\nabla_2^2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int s(\mathbf{r}_2)(-4\pi)\,\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,d\tau_2\\ &= s(\mathbf{r}_1).\end{aligned} \tag{1.180}$$

La etapa final se deriva de la Ec. 1.177*b* con los subíndices 1 y 2 cambiados. Nuestro resultado, la Ec. 1.180, demuestra que la forma supuesta de $\mathbf{V}$ y del potencial escalar φ están acordes con la divergencia establecida (Ec. 1.166*a*).

Para completar la demostración del teorema de Helmholtz necesitamos demostrar que nuestras suposiciones son consistentes con la Ec. 1.166*a*, es decir que el rotacional de $\mathbf{V}$ es igual a $\mathbf{c}(\mathbf{r}_1)$. A partir de la Ec. 1.166

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{V} &= \nabla\times\nabla\times\mathbf{A}\\ &= \nabla\nabla\cdot\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}.\end{aligned} \tag{1.181}$$

El primer término, $\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}$ lleva a

$$4\pi\nabla\nabla\cdot\mathbf{A} = \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_2)\cdot\nabla_1\nabla_1\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2 \tag{1.182}$$

mediante la Ec. 1.167*b*. Nuevamente, al sustituir las segundas derivadas con respecto a x_1, y_1, z_1 por las segundas derivadas con respecto a x_2, y_2, z_2, integramos cada componente[1] de la Ec. 1.182 por partes:

$$\begin{aligned}4\pi\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}\Big|_x &= \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_2)\cdot\nabla_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2\\ &= \int \nabla_2\cdot\left[\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\right]d\tau_2 - \int[\nabla_2\cdot\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)]\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)d\tau_2.\end{aligned} \tag{1.183}$$

[1] Esto evita originar el *tensor* $\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)\nabla_2$.

La segunda integral desaparece debido a que la densidad de circulación $\mathbf{c}$ es solenoidal.[1] La primera integral se puede transformar a una integral por medio del teorema de Gauss. Si $\mathbf{c}$ se limita en el espacio o desaparece con mayor rapidez que $1/r$ para una r grande, de modo que la integral en la Ec. 1.167*b* exista, entonces, mediante la selección de una superficie lo suficientemente grande, la primera integral del lado derecho de la Ec. 1.183 también desaparece.

Con $\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, la Ec. 1.181 se reduce ahora a

$$\nabla \times \mathbf{V} = -\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{c}(\mathbf{r}_2) \nabla_1^2 \left(\frac{1}{r_{12}}\right) d\tau_2 . \tag{1.184}$$

Esto es exactamente igual a la Ec. 1.171, excepto que el escalar $s(\mathbf{r}_2)$ se sustituye por el vector densidad de circulación $\mathbf{c}(\mathbf{r}_2)$. Introduciendo la función delta de Dirac, igual que antes, con una forma conveniente de realizar la integración, se observa que la Ec. 1.184 se reduce a la Ec. 1.158. De este modo, se tendrá que nuestra forma supuesta para $\mathbf{V}$, definido por la Ec. 1.66, y la correspondiente al potencial de vector $\mathbf{A}$, definido por la Ec. 1.167*b*, son consistentes con la Ec. 1.158 especificando el rotacional de $\mathbf{V}$.

Esto completa la demostración del teorema de Helmholtz, demostrando así que un vector puede resolverse en las partes irrotacional y solenoidal. Aplicado al campo electromagnético, hemos resuelto nuestro vector de campo $\mathbf{V}$ en el campo eléctrico irrotacional $\mathbf{E}$, derivado del potencial escalar φ, y el campo de inducción magnética solenoidal $\mathbf{B}$, derivado del potencial de vector $\mathbf{A}$. Esta densidad de fuente $s(\mathbf{r})$ puede interpretarse como una densidad de carga eléctrica (dividida por la permitividad eléctrica ε), mientras que la densidad de circulación $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ se convierte en la densidad de corriente eléctrica (multiplicada por la permeabilidad magnética μ).

EJERCICIOS

1.15.1 Implícita en esta sección se tiene una demostración de que una función $\psi(\mathbf{r})$ se especifica de manera única al requerirse que (1) satisfaga la ecuación de Laplace y (2) un conjunto completo de condiciones limitantes. Desarrolle esta demostración explícitamente.

1.15.2 (a) Suponiendo que $\mathbf{P}$ es una solución de la ecuación vectorial de Poisson, $\nabla_1^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}_1) = -\mathbf{V}(\mathbf{r}_1)$,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{V}(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2 ,$$

[1] Recuerde que $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{V}$ es conocida.

desarrolle una demostración alternativa del teorema de Helmholtz indicando que $\mathbf{V}$ puede indicarse en la forma

$$\mathbf{V} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A},$$

en donde

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{P},$$

y

$$\varphi = \nabla \cdot \mathbf{P}.$$

(b) Resolviendo la ecuación vectorial de Poisson, encontramos que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{V}(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2 .$$

Demuestre que esta resolución sustituida en φ y $\mathbf{A}$ de la parte (a) da lugar a las expresiones proporcionadas para φ y $\mathbf{A}$ en la Sección 1.15.

REFERENCIAS

KELLOGG, O. D., *Foundations of Potential Theory.* Nueva York: Dover (1953). Publicado originalmente en 1929.

Este texto es clásico en la teoría potencial.

LASS, H., *Vector and Tensor Analysis.* Nueva York: McGraw-Hill (1950).

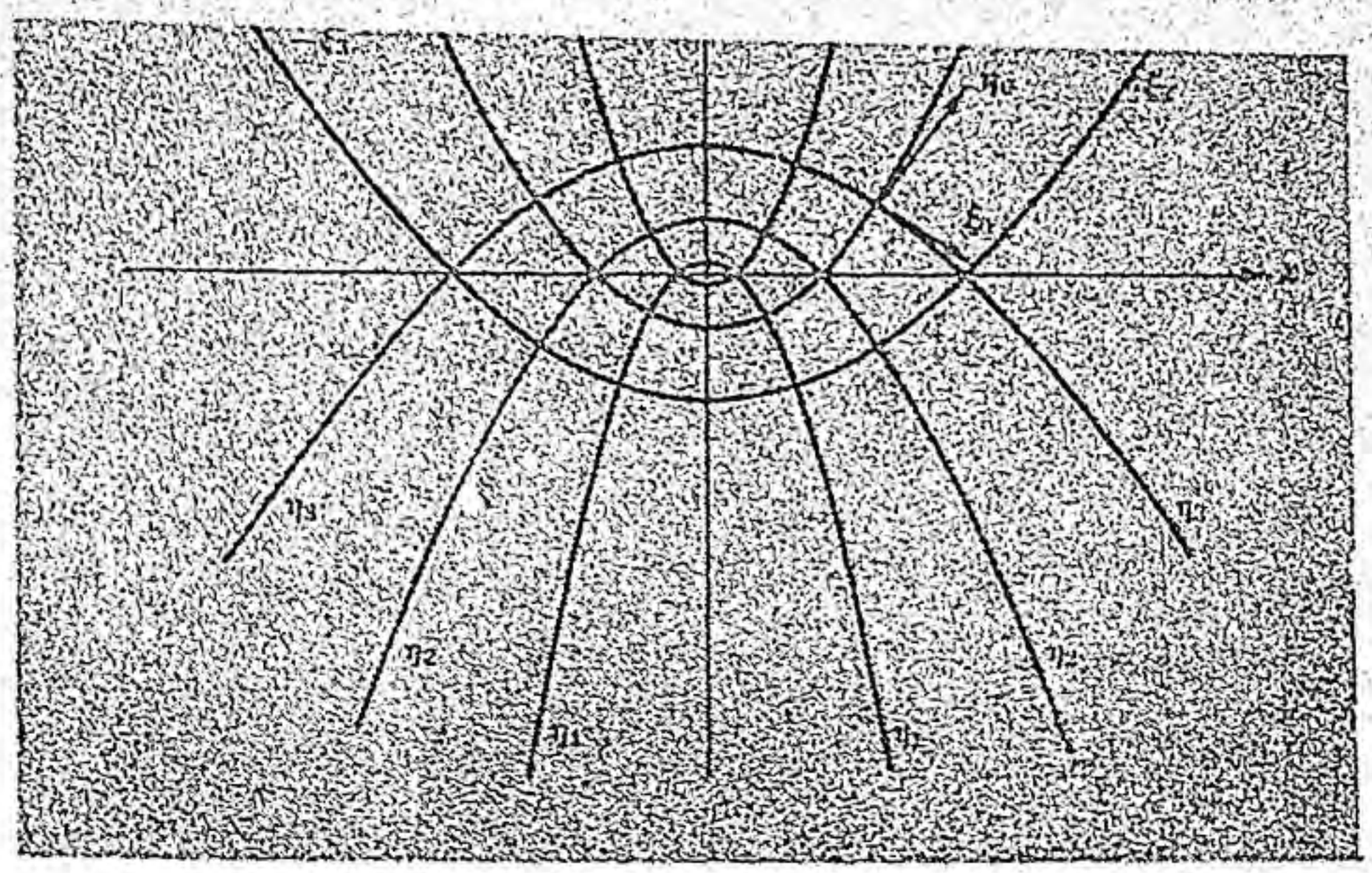
Una de las presentaciones más explicativas del análisis vectorial. Escrito para su lectura y comprensión.

SCHWARTZ, M., S. GREEN, W. A. RUTLEDGE, *Vector Analysis with Applications to Geometry and Physics.* Nueva York: Harper & Row (1960).

Recopilación excelente de los elementos del análisis vectorial con una gran diversidad de aplicaciones en el electromagnetismo.

WREDE, R. C., *Introduction to Vector and Tensor Analysis.* Nueva York: Wiley (1963).

Una exposición e introducción histórica excelentes, sobre la diferenciación de los vectores y las aplicaciones a la mecánica.



CAPITULO 2

SISTEMAS COORDENADOS

En el Capítulo 1 nos hemos limitado casi exclusivamente a los sistemas coordenados cartesianos. El sistema coordenado cartesiano ofrece la ventaja única de que los tres vectores unitarios **i**, **j** y **k** son constantes. En dicho capítulo introdujimos la distancia radial **r**, pero aun esta se consideró como una función de x, y y z. Desafortunadamente, no todos los problemas físicos se adaptan bien para su resolución en las coordenadas cartesianas. Por ejemplo, si se tiene un problema de fuerza central, $\mathbf{F} = \mathbf{r}_0 F(r)$, tal como una fuerza gravitacional o electrostática, las coordenadas cartesianas generalmente resultan inapropiadas. Tal problema literalmente vocifera por el uso de un sistema coordenado en que la distancia radial se considere como una de las coordenadas, es decir coordenadas polares esféricas.

El asunto es que el sistema coordenado debe seleccionarse de modo que se adapte al problema, para aprovecharse de cualquier apremio o simetría presente en el mismo. Luego, con buena disposición, resultará de más fácil resolución que cuando se fuerza a adaptar a una estructura cartesiana. Con bastante frecuencia, el término "de más fácil resolución" significará que tenemos una ecuación diferencial parcial que puede separarse en ecuaciones diferenciales ordinarias, frecuentemente en la "forma estándar" en el nuevo sistema coordenado. Esta técnica, es decir la separación de las variables, se describe en la Sección 2.5.

Principalmente estamos interesados en las coordenadas donde la ecuación

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{2.1}$$

se puede separar. La Ec. 2.1 es bastante más general de lo que pudiera parecer. Si

$k^2 = 0$	Ec. 2.1 →	ecuación de Laplace
$k^2 = (+)$ constante		ecuación de Helmholtz
$k^2 = (-)$ constante		ecuación de difusión (parte de espacio)
$k^2 =$ constante × energía cinética		ecuación de onda de Schrödinger

Se ha demostrado (L. P. Eisenhart, *Phys. Rev.* 45, 427 [1934] que existen once sistemas coordenados en donde la Ec. 2.1 puede separarse, todos los cuales pueden considerarse casos particulares del sistema elipsoidal confocal. Asimismo, se describirán brevemente otros tres sistemas que son de utilidad para la resolución de la ecuación de Laplace.

Naturalmente existe un precio que debe pagarse por el uso del sistema coordenado no cartesiano. Aún no hemos establecido expresiones para el gradiente, la divergencia o el rotacional en cualquiera de los sistemas coordenados no cartesianos. Tales expresiones se desarrollan en una forma bastante general en la Sección 2.2. Primeramente debemos desarrollar un sistema para coordenadas curvilíneas, un sistema general que pueda especializarse para cualquiera de los catorce sistemas particulares de interés.

2.1 Coordenadas Curvilíneas

En las coordenadas cartesianas tratamos con tres familias de planos mutuamente perpendiculares: $x =$ constante, $y =$ constante y $z =$ constante. Imagine que sobreponemos en este sistema otras tres familias de superficies. Las superficies de cualquier familia no tienen que ser paralelas entre sí y tampoco tienen necesidad de ser planas. Las tres nuevas familias de superficies no tienen que ser mutuamente perpendiculares, pero por simplicidad impondremos rápidamente esta condición (Ec. 2.7). Podemos describir cualquier punto (x, y, z) como la intersección de tres planos en las coordenadas cartesianas o como la intersección de las tres superficies que forman las nuevas coordenadas curvilíneas. Definiendo las superficies coordenadas curvilíneas por $q_1 =$ constante, $q_2 =$ constante, $q_3 =$ constante, podemos identificar nuestro punto por (q_1, q_2, q_3) así como por medio de (x, y, z). Esto significa que en principio podemos indicar

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3), \end{aligned} \tag{2.2}$$

especificando x, y, z en términos de las q y las relaciones inversas,

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z), \\ q_2 &= q_2(x, y, z), \\ q_3 &= q_3(x, y, z). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Con cada familia de superficie $q_i =$ constante, podemos asociar el vector unitario $\mathbf{a}_i$ normal a la superficie $q_i =$ constante y en la dirección de q_i creciente.

El cuadrado de la distancia entre dos puntos vecinos está dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{ij} h_{ij}^2 \, dq_i \, dq_j . \tag{2.4}$$

Los coeficientes h_{ij}^2, que ahora procedemos a investigar, se puede considerar que especifican la naturaleza del sistema coordenado (q_1, q_2, q_3). En conjunto, estos coeficientes se denominan *métrica*.

La primera etapa en la determinación de h_{ij}^2 es la diferenciación parcial de la Ec. 2.2, con lo cual se obtiene

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 , \tag{2.5}$$

y similarmente para dy y dz. Elevando al cuadrado y sustituyendo en la Ec. 2.4, se tiene

$$h_{ij}^2 = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} . \tag{2.6}$$

En este momento nos limitamos nosotros mismos a los sistemas coordenados ortogonales (superficies mutuamente perpendicualres), lo cual significa (cf. Ejercicio 2.1.1)

$$h_{ij} = 0, \qquad i \neq j. \tag{2.7}$$

Ahora, para simplificar la notación, escribimos $h_{ii} = h_i$ de modo que

$$ds^2 = (h_1 \, dq_1)^2 + (h_2 \, dq_2)^2 + (h_3 \, dq_3)^2. \tag{2.8}$$

Nuestros sistemas coordenados específicos se describen en secciones subsecuentes al especificar estos factores de escalamiento h_1, h_2, y h_3. Alternativamente, los factores de escalamiento pueden identificarse convenientemente mediante la relación

$$ds_i = h_i \, dq_i \tag{2.9}$$

para cualquier dq_i, conservando las otras q constantes. Observe que las tres coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 no tienen que representar longitudes. Los factores de escalamiento h_i pueden depender de las q y pueden tener dimensiones. El *producto* $h_i \, dq_i$ debe tener dimensiones de longitud.

A partir de la Ec. 2.9 podemos desarrollar inmediatamente los elementos de área y volumen

$$d\sigma_{ij} = ds_i \, ds_j = h_i h_j \, dq_i \, dq_j \tag{2.10}$$

y

$$d\tau = ds_1 \, ds_2 \, ds_3 = h_1 h_2 h_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3 . \tag{2.11}$$

Las expresiones en las Ecs. 2.10 y 2.11 concuerdan, evidentemente, con los resultados de utilizar las ecuaciones de transformación, Ec. 2.2, y los jacobianos.

EJERCICIOS

2.1.1 Demuestre que el limitar nuestra atención a los sistemas coordenados ortogonales implica que $h_{ij} = 0$ para $i \neq j$ (Ec. 2.7).

2.1.2 En el sistema coordenado polar esférico $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$. Las ecuaciones de transformación correspondientes a la Ec. 2.2 son

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$
$$z = r \cos \theta.$$

(a) Calcule los factores de escala coordenados polar esféricos h_r, h_θ y h_φ.
(b) Compruebe sus factores de escala calculados por medio de la relación $ds_i = h_i dq_i$.

2.1.3 El sistema coordenado u, v, z que se utiliza frecuentemente en la electrostática y la hidrodinámica está definido por

$$xy = u,$$
$$x^2 - y^2 = v,$$
$$z = z.$$

Este sistema u, v, z es ortogonal.
(a) En términos de palabras, describa brevemente la naturaleza de las tres familias de superficies coordenadas.
(b) Trace el sistema en el plano xy mostrando las intersecciones de las superficies de u constante y las superficies de v constante con el plano xy.
(c) Indique las direcciones del vector unitario $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{v}_0$ en los cuatro cuadrantes.
(d) Finalmente, indique si este sistema u, v, z es izquierdo o derecho.

2.1.4 Un sistema bidimensional está definido por las coordenadas ortogonales q_1 y q_2. Demuestre que el jacobiano

$$J\left(\frac{x, y}{q_1, q_2}\right) = h_1 h_2$$

está de acuerdo con la Ec. 2.10.

2.2 Operaciones con Vectores Diferenciales

El punto de partida para desarrollar los operadores rotacional, divergencia y gradiente en las coordenadas curvilíneas es nuestra interpretación del gradiente como un vector que tiene la magnitud y dirección de la máxima tasa de cambio de espacio (cf. Sección 1.6). A partir de esta interpretación, el componente de $\nabla\psi(q_1, q_2, q_3)$ en la dirección normal a la familia de superficies q_1 = constante está dado por [1]

[1] Aquí se evita el uso de φ para indicar la función debido a que es convencional el uso de este símbolo para asignar una coordenada acimutal.

$$\nabla\psi\,|_1 = \frac{\partial\psi}{\partial s_1} = \frac{\partial\psi}{h_1\,\partial q_1}, \tag{2.12}$$

ya que esta es la tasa de cambio de ψ para la q_1 variante, manteniendo q_2 y q_3 fijas. La cantidad ds_1 es una longitud diferencial en la dirección de q_1 creciente (cf. Ec. 2.9). En la Sección 2.1 hemos introducido el vector unitario $\mathbf{a}_1$ para indicar esta dirección. Repitiendo la Ec. 2.12 para q_2 y nuevamente para q_3, y sumando vectorialmente el gradiente, se transforma en

$$\begin{aligned}\nabla\psi(q_1, q_2, q_3) &= \mathbf{a}_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial\psi}{\partial s_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial\psi}{\partial s_3} \\ &= \mathbf{a}_1 \frac{\partial\psi}{h_1\,\partial q_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial\psi}{h_2\,\partial q_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial\psi}{h_3\,\partial q_3}\end{aligned} \tag{2.13}$$

El operador de divergencia se puede obtener de la segunda definición (Ec. 1.91) del Capítulo 1 o equivalentemente del teorema de Gauss, Sección 1.11. Utilizando la Ec. 1.91:

$$\nabla\cdot\mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) = \lim_{\int d\tau\to 0} \frac{\int \mathbf{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\int d\tau} \tag{2.14}$$

con un volumen diferencial $h_1h_2h_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3$ Observe que las direcciones positivas se han seleccionado de tal modo que (q_1, q_2, q_3) o $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ formen el conjunto del lado derecho.

El área integral para dos caras de q_1 = constante está dada por

$$\begin{aligned}\left[V_1h_2h_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3)\,dq_1\right]dq_2\,dq_3 - V_1h_2h_3\,dq_2\,dq_3 \\ = \frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3)\,dq_1\,dq_2\,dq_3\end{aligned} \tag{2.15}$$

exactamente como en las secciones 1.7 y 1.10.[1] Sumando resultados similares para los otros dos pares de superficies, obtenemos

$$\begin{aligned}&\int \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3)\cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right] dq_1\,dq_2\,dq_3.\end{aligned} \tag{2.16}$$

La división por el volumen diferencial (Ec. 2.14) da como resultado

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2)\right].\end{aligned} \tag{2.17}$$

[1] Ya que se ha considerado el límite $dq_1, dq_2, dq_3 \to 0$, las derivadas de segundo orden y superiores desaparecen.

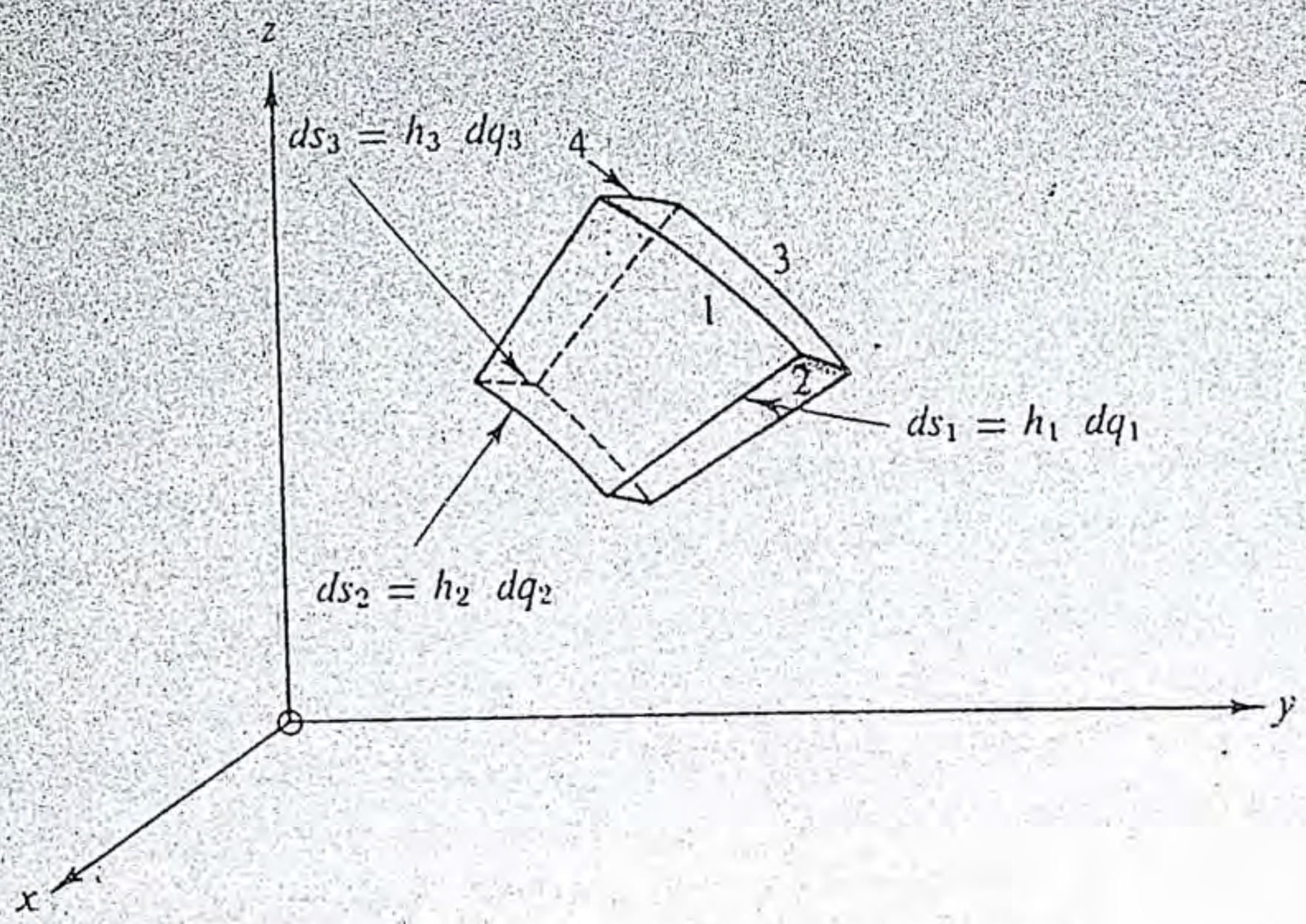


Fig. 2.1 Elemento de volumen curvilíneo

En la Ec. 2.17, V_i es el componente de $\mathbf{V}$ en la dirección $\mathbf{a}_i, q_i$ creciente, es decir $V_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{V}$.

Podemos obtener el laplaciano combinando las Ecs. 2.13 y 2.17, utilizando $\mathbf{V} = \nabla\psi(q_1, q_2, q_3)$. Esto lleva a

$$\nabla \cdot \nabla\psi(q_1, q_2, q_3)$$
$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right]. \quad (2.18a)$$

Finalmente, para desarrollar $\nabla \times \mathbf{V}$, apliquemos el teorema de Stokes (Sección 1.12) y, de modo similar a la divergencia, considere el límite como el área superficial volviéndose desvanecidamente pequeña. Trabajando con un componente a la vez, se considera un elemento de superficie diferencial en la superficie curvilínea q_1 = constante. A partir de

$$\int_s \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\sigma = \nabla \times \mathbf{V}\,|_1\, h_2 h_3\, dq_2\, dq_3 \quad (2.18b)$$

el teorema de Stokes da como resultado

$$\nabla \times \mathbf{V}\,|_1\, h_2 h_3\, dq_2\, dq_3 = \oint \mathbf{V} \cdot d\lambda, \quad (2.19)$$

de modo que la integral de línea queda en la superficie q_1 = constante. Siguiendo el circuito (1, 2, 3, 4) de la Fig. 2.2,

$$\oint \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\lambda = V_2 h_2\, dq_2 + \left[V_3 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_3 h_3)\, dq_2\right] dq_3$$
$$- \left[V_2 h_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_2 h_2)\, dq_3\right] dq_2 - V_3 h_3\, dq_3$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 V_2)\right] dq_2\, dq_3. \quad (2.20)$$

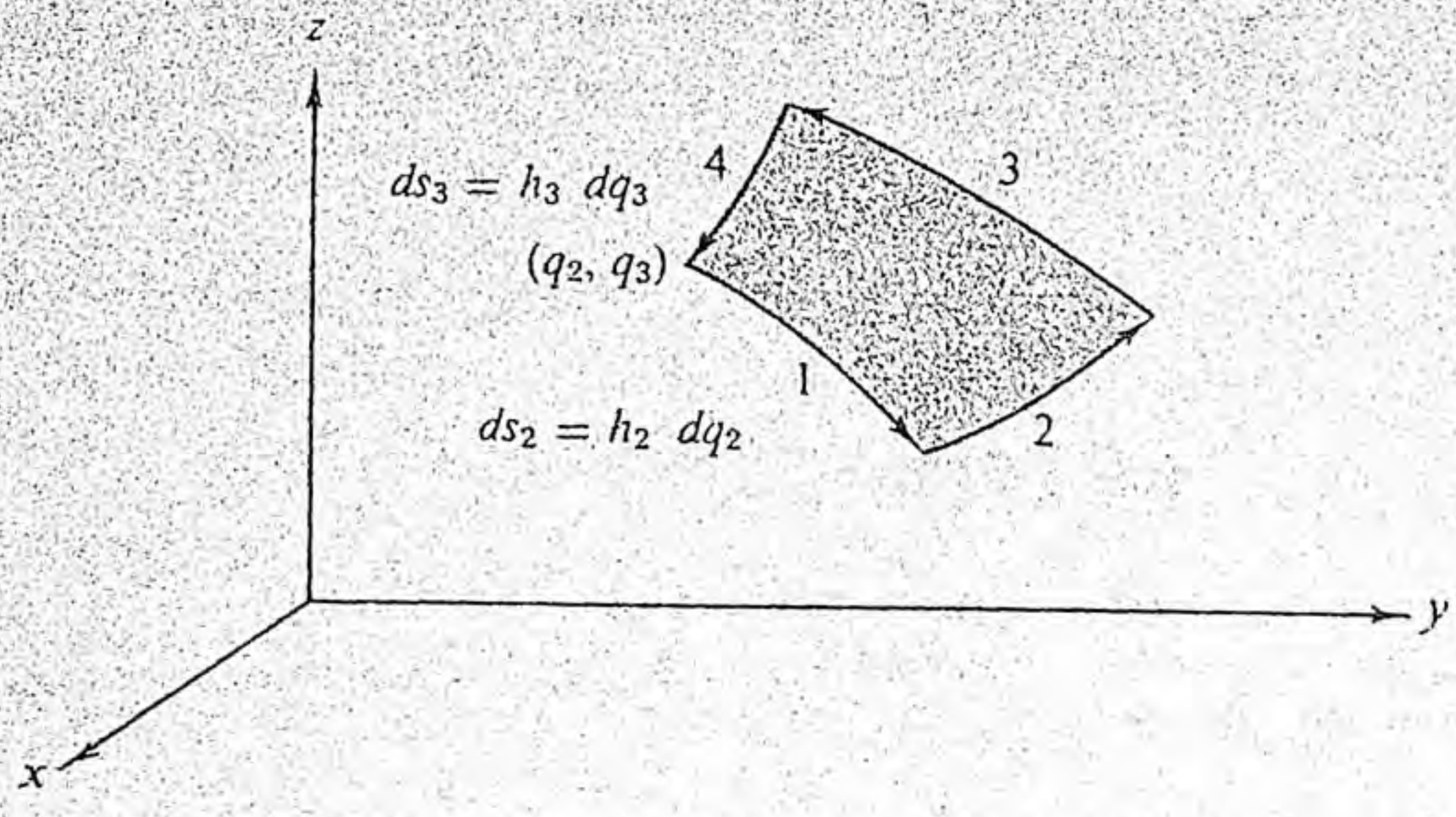


Fig. 2.2 Elemento de superficie curvilínea

Se tiene un signo positivo al ir en la dirección positiva en las partes 1 y 2 y un signo negativo en las partes 3 y 4 debido a que en este caso nos desplazamos en la dirección negativa. A partir de la Ec. 2.19

$$\nabla \times \mathbf{V}\,|_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 V_2)\right]. \tag{2.21}$$

Los dos componentes restantes de $\nabla \times \mathbf{V}$ pueden recolectarse mediante la permutación cíclica de los índices. Como en el Capítulo 1, con frecuencia conviene establecer el rotacional en la forma de determinante:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 h_1 & \mathbf{a}_2 h_2 & \mathbf{a}_3 h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}. \tag{2.22}$$

Esto completa la determinación de ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, y el laplaciano ∇^2 en las coordenadas curvilíneas. Provistos de estas expresiones generales, procederemos al estudio de los once sistemas en donde la Ec. 2.1 puede separarse (cf. Sección 2.5) para $k^2 \neq 0$ y tres sistemas coordenados especiales (coordenadas bipolares, toroidales y biesféricas).

EJERCICIOS

2.2.1 Siendo $\mathbf{a}_1$ un vector unitario en la dirección de q_1 creciente, demuestre que

(a) $\nabla \cdot \mathbf{a}_1 = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\dfrac{\partial(h_2 h_3)}{\partial q_1}$

(b) $\nabla \times \mathbf{a}_1 = \dfrac{1}{h_1}\left[\mathbf{a}_2 \dfrac{\partial h_1}{h_3\,\partial q_3} - \mathbf{a}_3 \dfrac{\partial h_1}{h_2\,\partial q_2}\right]$

2.2.2 Demuestre que los vectores unitarios ortogonales $\mathbf{a}_i$ se pueden definir por medio de

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \qquad (a)$$

En particular, demuestre que $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ lleva a una expresión para h_i de acuerdo con la Ec. 2.6. La Ec. (*a*) anterior puede considerarse como el punto de partida para la derivación de

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial q_j} = \mathbf{a}_j \frac{\partial h_j}{h_i\, \partial q_i}, \qquad i \neq j$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial q_i} = -\sum_{j \neq i} \mathbf{a}_j \frac{\partial h_i}{h_j\, \partial q_j}.$$

2.2.3 Desarrolle los argumentos para demostrar que los productos escalar y vectorial ordinarios (sin implicar a ∇) en las coordenadas curvilíneas ortogonales se realizan del mismo modo que en las coordenadas cartesianas *sin que queden implicados los factores de escala.*

2.2.4 Derive

$$\nabla\psi = \mathbf{a}_1 \frac{\partial\psi}{h_1 \partial q_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial\psi}{h_2\, \partial q_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial\psi}{h_3\, \partial q_3}$$

mediante la aplicación directa de la Ec. 1.90,

$$\nabla\psi = \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \psi\, d\sigma}{\int d\tau}.$$

Sugerencia: La evaluación de la integral de superficie lleva a los términos como $(h_1 h_2 h_3)^{-1}(\partial/\partial q_1)(\mathbf{a}_1 h_2 h_3)$. Los resultados que se incluyen en el Ejemplo 2.2.2 serán de utilidad.

2.3 Sistemas Coordenados Especiales. Coordenadas Cartesianas Rectangulares

Se ha enfatizado que la selección del sistema coordenado puede depender de las condiciones necesarias o de simetría del problema por resolver. Probablemente sea conveniente preparar una lista de nuestros catorce sistemas, clasificando los mismos de acuerdo con el hecho de que tengan o no un eje de translación (perpendicular a la familia de superficies de plano paralelo) o un eje de simetría rotacional.

La tabla 2.1 contiene quince entradas: coordenadas cilíndricas circulares con un eje de translación que también constituye un eje de simetría rotacional. El espaciamiento en la tabla ha sido seleccionado para indicar las relaciones entre los diversos sistemas coordenados. Si se considera la versión bidimensional ($z = 0$) de un sistema con un eje de translación (columna izquierda) y se le hace girar alrededor de un eje de simetría de reflexión, se genera el sistema coordenado correspondiente indicado en la columna central hacia la derecha. Ejemplo: la rotación del plano ($z = 0$) del sistema cilíndrico elíptico alrededor del eje principal genera el sis-

TABLA 2.1

Eje de translación	Eje de rotación	Ninguno
Cartesiano (3 ejes)		Confocal elipsoidal
Circular cilíndrico	Circular cilíndrico	
	Polar esferoidal (3 ejes)	
Elíptico cilíndrico	Esferoidal prolato o alargado	
	Esferoidal oblato	
Parabólico cilíndrico	Parabólico	
Bipolar	Toroidal	
	Biesférico	
		Cónico
		Confocal paraboloidal

tema esferoidal alargado; la rotación alrededor del eje menor resulta en el sistema esferoidal oblato.

También se consideran tres sistemas que no tienen eje de translación o eje de rotación. Es de hacerse notar que en este grupo asimétrico, el sistema elipsoidal confocal se toma algunas veces como el sistema más general y que casi todos los otros[1] se derivan del mismo.

Coordenadas Cartesianas Rectangulares. Estas son las coordenadas cartesianas en que se basa el Capítulo 1 Este sistema es el más simple de todos.

$$\begin{aligned} h_1 &= h_x = 1, \\ h_2 &= h_y = 1, \\ h_3 &= h_z = 1. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Las familias de superficies coordenadas son tres conjuntos de planos paralelos: $x =$ constante, $y =$ constante y $z =$ constante. El sistema coordenado cartesiano es único en cuanto a que todas sus h_i son constantes. Esto representará una ventaja considerable en el tratamiento de los tensores que se describen en el Capítulo 3 Observe también que los vectores unitarios, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ o $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, tienen direcciones fijas.

A partir de las Ecs. 2.13, 2.17, 2.18 y 2.22, reproducimos los resultados del Capítulo 1,

$$\nabla\psi = \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{2.24}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{2.25}$$

[1] Excluyendo el sistema bipolar y sus dos formas rotacionales, toroidal y biesférico.

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \tag{2.26}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \tag{2.27}$$

2.4 Coordenadas Polares Esféricas (r, θ, φ)

Considerando la nueva rotulación (q_1, q_2, q_3) como (r, θ, φ), el sistema coordenado polar esférico consiste de lo siguiente:

1. Esferas concéntricas centradas en el origen,

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \text{constante}.$$

2. Conos circulares rectos centrados en el eje z (polar), vértices en el origen.

$$\theta = \arccos \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \text{constante}$$

3. Planos medios a través del eje z (polar)

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \text{constante}.$$

De acuerdo con nuestra selección arbitraria de definiciones para θ, el ángulo polar, y φ, el ángulo acimutal, el eje z es el elegido para el tratamiento especial. Las ecuaciones de transformación correspondientes a la Ec. 2.2 son

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \tag{2.28}$$

midiendo θ desde el eje z positivo y φ en el plano xy desde el eje x positivo. Los intervalos de valores son $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$ y $0 \le \varphi \le 2\pi$. De la Ec. 2.6

$$\begin{aligned} h_1 &= h_r = 1, \\ h_2 &= h_\theta = r, \\ h_3 &= h_\varphi = r \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Es de hacerse notar que los vectores unitarios $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\varphi}_0$ varían en dirección igual que lo hacen los ángulos θ y φ. En términos de los vectores unitarios cartesianos de dirección fija $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$,

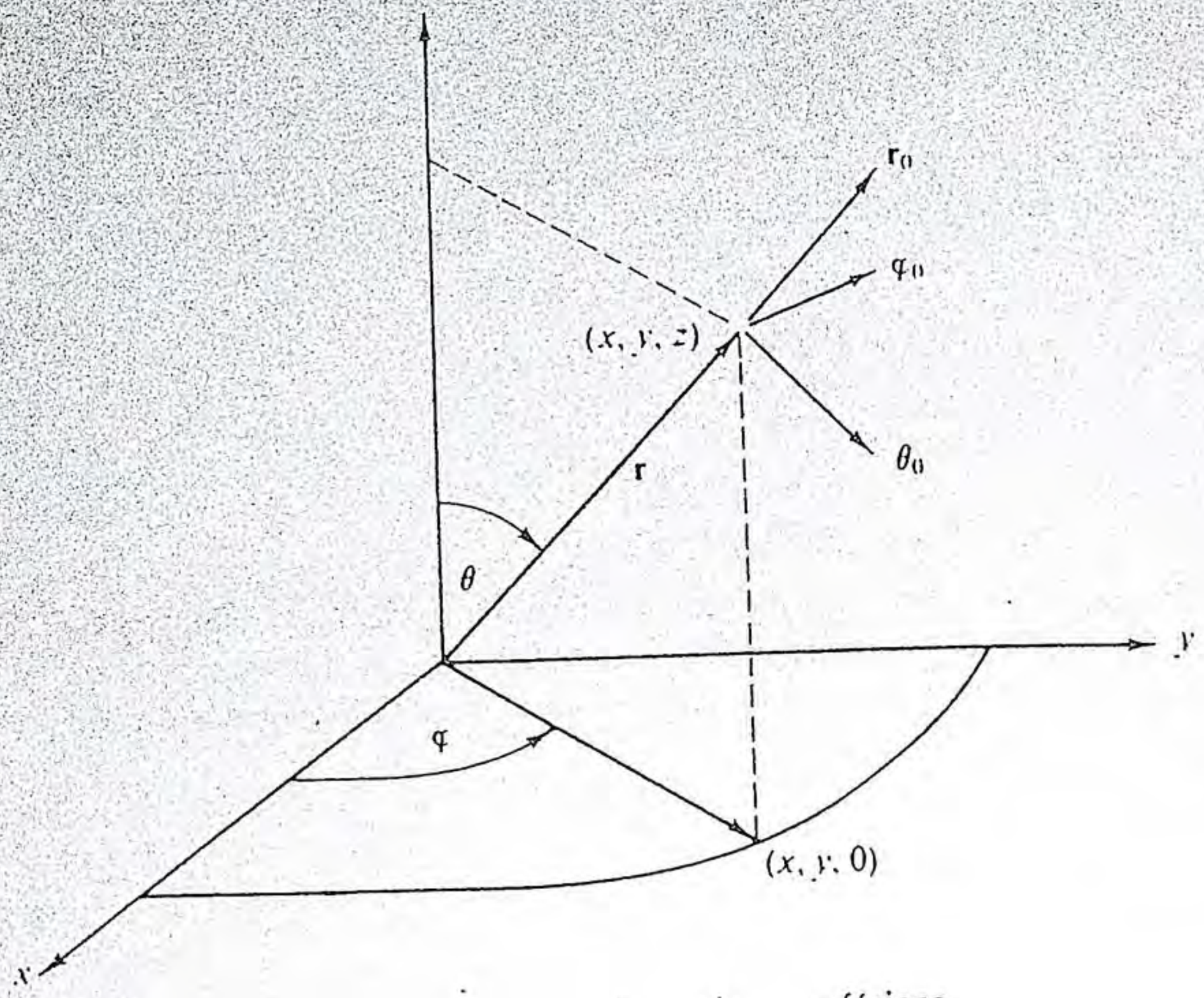


Fig. 2.3 Coordenadas polares esféricas

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + \mathbf{k}\cos\theta,$$
$$\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{i}\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi - \mathbf{k}\,\text{sen}\,\theta,$$
$$\boldsymbol{\varphi}_0 = -\mathbf{i}\,\text{sen}\,\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi.$$

De acuerdo con la Sección 2.2, volviendo a rotular los vectores unitarios coordenados curvilíneos $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ como $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\varphi}_0$,

$$\nabla\psi = \mathbf{r}_0\frac{\partial\psi}{\partial r} + \boldsymbol{\theta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \tag{2.30}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\left[\text{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2V_r\right) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\text{sen}\,\theta\,V_\theta) + r\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right], \tag{2.31}$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi = \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\left[\text{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right], \tag{2.32}$$

$$\nabla\times\mathbf{V} = \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\,\text{sen}\,\theta\boldsymbol{\varphi}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ V_r & rV_\theta & r\,\text{sen}\,\theta V_\varphi \end{vmatrix} \tag{2.33}$$

Ocasionalmente se requiere del vector laplaciano $\nabla^2\mathbf{V}$ en las coordenadas polares esféricas. Se obtiene de modo más conveniente utilizando la identidad vectorial (Ec. 1.80) del Capítulo 1. Como referencia futura,

$$\nabla^2 \mathbf{V}|_r = \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)V_r$$

$$+\left(-\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta}\right)V_\theta + \left(-\frac{2}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)V_\varphi$$

$$= \nabla^2 V_r - \frac{2}{r^2}V_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta}V_\theta - \frac{2}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{2.34}$$

$$\nabla^2 \mathbf{V}|_\theta = \nabla^2 V_\theta - \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}V_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{2.35}$$

$$\nabla^2 \mathbf{V}|_\varphi = \nabla^2 V_\varphi - \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}V_\varphi + \frac{2}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}. \tag{2.36}$$

Estas expresiones para los componentes de $\nabla^2\mathbf{V}$ están innegablemente desarregladas, pero algunas veces son necesarias. No existe ninguna garantía de que la naturaleza sea siempre simple.

EJEMPLO 2.4.1

Utilizando las Ecs. 2.30-2.33, podemos reproducir mediante inspección algunos de los resultados derivados en el Capítulo 1 por medio de la aplicación laboriosa de las coordenadas cartesianas.

De la Ec. 2.30

$$\nabla f(r) = \mathbf{r}_0 \frac{df}{dr}, \tag{2.37}$$

$$\nabla r^n = \mathbf{r}_0 n r^{n-1}.$$

De la Ec. 2.31

$$\nabla\cdot\mathbf{r}_0 f(r) = \frac{2}{r}f(r) + \frac{df}{dr}, \tag{2.38}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{r}_0 r^n = (n+2)r^{n-1}.$$

De la Ec. 2.32

$$\nabla^2 f(r) = \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}, \tag{2.39}$$

$$\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}. \tag{2.40}$$

Y finalmente de la Ec. 2.33

$$\nabla\times\mathbf{r}_0 f(r) = 0. \tag{2.41}$$

EJEMPLO 2.4.2

El cómputo del potencial de vector magnético para un circuito de corriente simple en el plano xy implica la evaluación de

$$\mathbf{V} = \nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{\varphi}_0 A_\varphi(r,0)]. \tag{2.41a}$$

En las coordenadas polares esféricas, esto se reduce como sigue:

$$\mathbf{V} = \nabla \times \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{\varphi}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r \operatorname{sen}\theta A_\varphi(r, \theta) \end{vmatrix}$$

$$= \nabla \times \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial \theta}(r \operatorname{sen}\theta A_\varphi) - r\boldsymbol{\theta}_0 \frac{\partial}{\partial r}(r \operatorname{sen}\theta A_\varphi)\right]. \tag{2.41b}$$

Considerando el rotacional por segunda vez,

$$\mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{\varphi}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(r \operatorname{sen}\theta A_\varphi) & -\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial r}(r \operatorname{sen}\theta A_\varphi) & 0 \end{vmatrix} \tag{2.41c}$$

Desarrollando el determinante

$$\mathbf{V} = -\boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA_\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta A_\varphi)\right]\right\}$$

$$= -\boldsymbol{\varphi}_0\left[\nabla^2 A_\varphi(r, \theta) - \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} A_\varphi(r, \theta)\right].$$

En el Capítulo 12 se podrá observar que $\mathbf{V}$ lleva a la ecuación de Legendre asociada y que A_φ puede estar dada por una serie de polinomios de Legendre asociados.

EJERCICIOS

2.4.1 Resuelva los vectores unitarios polares esféricos en sus componentes cartesianos

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \mathbf{j} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \mathbf{k} \cos\theta,$$
$$\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{i} \cos\theta \cos\varphi + \mathbf{j} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi - \mathbf{k} \operatorname{sen}\theta,$$
$$\boldsymbol{\varphi}_0 = -\mathbf{i} \operatorname{sen}\varphi + \mathbf{j} \cos\varphi.$$

2.4.2 (a) A partir de los resultados del Ejercicio 2.4.1, calcule las derivadas parciales de $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\varphi}_0$ con respecto a r, θ y φ.

(b) Con ∇ dado por

$$\mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{\theta}_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

(mayor tasa de cambio del espacio), utilice los resultados de la parte (a) para calcular $\nabla \cdot \nabla \psi$. Aquí, se tiene una derivación alternativa del laplaciano.

2.4.3 Resuelva los vectores unitarios cartesianos en sus componentes polares esféricos.

$$\mathbf{i} = \mathbf{r}_0 \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \boldsymbol{\theta}_0\cos\theta\cos\varphi \quad \boldsymbol{\varphi}_0 \operatorname{sen}\varphi,$$
$$\mathbf{j} = \mathbf{r}_0 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \boldsymbol{\theta}_0\cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \boldsymbol{\varphi}_0\cos\varphi,$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{r}_0\cos\theta - \boldsymbol{\theta}_0 \operatorname{sen}\theta.$$

2.4.4 La dirección de un vector está determinada por los ángulos θ_1 y φ_1. Para un segundo vector, los ángulos correspondientes son θ_2 y φ_2. Demuestre que el coseno del ángulo incluído γ está dado por

$$\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

(Cf. Fig. 12.15)

2.4.5 Un vector $\mathbf{V}$ es tangencial a la superficie de una esfera. El rotacional de V es radial. ¿Qué es lo que se implica con esto acerca de la dependencia radial de los componentes polares esféricos de $\mathbf{V}$?

2.4.6 La física moderna manifiesta un gran interés en la propiedad de la paridad: el hecho de que una cantidad se conserve invariable o que cambie de signo bajo la inversión del sistema coordenado.

(a) Demuestre que la inversión (reflexión a través del origen) de un punto (r, θ, φ) con relación a los ejes *fijos* x, y, z consiste en la transformación

$$r \to r,$$
$$\theta \to \pi - \theta,$$
$$\varphi \to \pi + \varphi.$$

(b) Demuestre que $\mathbf{r}_0$ y $\boldsymbol{\varphi}_0$ tienen paridad impar (inversión de la dirección) y que $\boldsymbol{\theta}_0$ tiene paridad par.

2.4.7 La Ec. 1.72 fue una demostración de que

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega},$$

utilizando las coordenadas cartesianas. Verifique este resultado empleando las *coordenadas polares esféricas.* En el lenguaje de la diádica (Sección 3.5) $\nabla\mathbf{r}$ es el indemfactor, una diádica unitaria.

2.4.8 Una partícula se mueve a través del espacio. Encuentre los componentes de coordenada esférica de su velocidad y aceleración

$$v_r = \dot{r},$$
$$v_\theta = r\dot{\theta},$$
$$v_\varphi = r \operatorname{sen}\theta\dot{\varphi},$$
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2,$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2,$$
$$a_\varphi = r \operatorname{sen}\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r} \operatorname{sen}\theta\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}.$$

Sugerencia: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t)r(t)$
$$= [\mathbf{i} \operatorname{sen}\theta(t)\cos\varphi(t) + \mathbf{j} \operatorname{sen}\theta(t) \operatorname{sen}\varphi(t) + \mathbf{k}\cos\theta(t)]r(t).$$

Nota. Utilizando las técnicas de Lagrange de la Sección 17.3, estos resultados pueden obtenerse en una forma más elegante. El punto en $\dot{r}$ significa la derivada de tiempo, $\dot{r} = dr/dt$. Esta notación fue establecida por Newton.

2.4.9 Una partícula m se mueve en respuesta a una fuerza central de acuerdo con la segunda ley de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 f(\mathbf{r}).$$

Demuestre que $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}$, una constante, y que la interpretación geométrica de este lleva a la segunda ley de Kepler.

2.4.10 Exprese $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ en coordenadas polares esféricas.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \operatorname{sen}\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Sugerencia: Iguale ∇_{xyz} y $\nabla_{r\theta\varphi}$.

2.4.11 A partir del Ejercicio 2.4.10, demuestre que

$$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Este es el operador mecánico cuántico correspondiente al componente z del momento angular.

2.4.12 Con el operador de momento angular mecánico cuántico definido como $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$, demuestre que

(a) $L_x + iL_y = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$,

(b) $L_x - iL_y = -e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$.

Estos son los operadores de aumento y reducción de las Secciones 12.6 y 7.

2.4.13 Verifique que $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$ en las coordenadas polares esféricas. $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ es el operador de momento angular mecánico cuántico.
Sugerencia: Utilice las coordenadas polares esféricas para $\mathbf{L}$, pero los componentes cartesianos para el producto vectorial.

2.4.14 Con $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ verifique las identidades de operador

(a) $\nabla = \mathbf{r}_0\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{L}}{r^2}$,

(b) $\mathbf{r}\nabla^2 - \nabla\left(1 + r\frac{\partial}{\partial r}\right) = i\nabla \times \mathbf{L}$.

Esta última identidad es de utilidad al relacionar el momento angular y la ecuación diferencial de Legendre, Ejemplo 8.2.3.

2.4.15 Demuestre que las tres siguientes formas (coordenadas esféricas) de $\nabla^2\psi(r)$ son equivalentes.

(a) $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\psi(r)}{dr}\right]$,

(b) $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\psi(r)\right]$,

(c) $\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr}$.

La segunda forma es particularmente conveniente al establecer una correspondencia entre las descripciones polar esférica y cartesiana de un problema.

2.4.16 Un modelo de la corona solar supone que la ecuación de estado uniforme del flujo de calor

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0$$

se satisface. Aquí, k, la conductividad térmica, es proporcional a $T^{5/2}$. Suponiendo que la temperatura T es proporcional a r^n, demuestre que la ecuación de flujo de calor se satisface con $T = T_0(r_0/r)^{2/7}$.

2.4.17 Cierto campo de fuerza está dado por

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_0 \frac{2P\cos\theta}{r^3} + \boldsymbol{\theta}_0 \frac{P}{r^3}\operatorname{sen}\theta, \qquad r \geq P/2,$$

(en coordenadas polares esféricas).

(a) Examine $\nabla \times \mathbf{F}$ para determinar si existe un potencial.

(b) Calcule $\oint \mathbf{F} \cdot d\lambda$ para un círculo unitario en el plano $\theta = \pi/2$. ¿Qué indica esto acerca de que la fuerza sea conservativa o no conservativa?

(c) Si usted considera que $\mathbf{F}$ puede describirse mediante $\mathbf{F} = -\nabla\psi$, encuentre ψ. De otro modo, simplemente establezca que no existe un potencial aceptable.

2.4.18 (a) Demuestre que $\mathbf{A} = -\boldsymbol{\varphi}_0(\cot\theta/r)$ es una solución de $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{r}_0/r^2$.

(b) Demuestre que esta solución coordenada polar esférica concuerda con la solución establecida para el Ejercicio 1.13.5:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\frac{yz}{r(x^2+y^2)} - \mathbf{j}\frac{xz}{r(x^2+y^2)}.$$

Observe que la solución difiere para $\theta = 0, \pi$ correspondiente a $x, y = 0$.

(c) Finalmente, demuestre que $\mathbf{A} = -\boldsymbol{\theta}_0\varphi\,(\operatorname{sen}\theta/r)$ es una solución. Observe que aun cuando esta solución no difiere $(r \neq 0)$, ya no tiene un valor simple para todos los ángulos acimutales posibles.

2.4.19 Un potencial de vector magnético está dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Demuestre que esto lleva a la inducción magnética $\mathbf{B}$ de un dipolo magnético puntal, momento dipolar $\mathbf{m}$.

Respuesta. Para $\mathbf{m} = \mathbf{k}m$,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{r}_0 \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\cos\theta}{r^3} + \boldsymbol{\theta}_0 \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\operatorname{sen}\theta}{r^3}.$$

cf. Ecs. 12.146 y 12.147.

2.4.20 A grandes distancias de su fuente, la radiación de dipolo eléctrico tiene los campos

$$\mathbf{E} = a_E \operatorname{sen}\theta \frac{e^{i(kr-wt)}}{r}\boldsymbol{\theta}_0, \qquad \mathbf{B} = a_B \operatorname{sen}\theta \frac{e^{i(kr-wt)}}{r}\boldsymbol{\varphi}_0.$$

Demuestre que las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

se satisfacen si se considera que

$$a_E/a_B = \omega/k = c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}.$$

Sugerencia: Ya que r es grande, los términos del orden r^{-2} pueden despreciarse.

2.5 Separación de Variables

En las coordenadas cartesianas, la ecuación de Helmholtz (Ec. 2.1) se transforma en

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0, \tag{2.42}$$

utilizando la Ec. 2.26 para el laplaciano. Para lo presente, considere k^2 como una constante. Probablemente la forma más simple de tratar una ecuación diferencial parcial tal como la 2.42 consiste en separar la misma en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto puede realizarse como sigue: Sea

$$\psi(x, y, z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z) \tag{2.43}$$

y vuelva a sustituir en la Ec. 2.42. ¿Cómo sabemos que la Ec. 2.43 es válida? La respuesta es bastante simple. ¡De hecho no sabemos que sea válida! Más bien estamos procediendo con el concepto de intentarlo y saber si funciona. En caso de tener éxito en nuestro intento, entonces la Ec. 2.43 quedará justificada. En caso contrario, lo sabremos muy pronto y luego tendremos que intentar otro ataque tal como las funciones de Green, las transformadas integrales o el análisis numérico de fuerza bruta. Suponiendo que ψ está dada por la Ec. 2.43, la Ec. 2.42 se transforma en

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y}{dy^2}+XY\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2XYZ=0. \tag{2.44}$$

Dividiendo entre $\psi=XYZ$ y volviendo a arreglar los términos se obtiene

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k^2-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}. \tag{2.45}$$

La Ec. 2.45 manifiesta una separación de variables. El lado izquierdo es una función solo de x, mientras que el lado derecho depende tan solo de y y z. Siendo así, la Ec. 2.45 es cierta clase de paradoja. Una función de x se iguala con una función de y y z, pero x, y y z son coordenadas independientes. Esta independencia significa que el comportamiento de x como variable independiente no está determinado por y y z. La paradoja se resuelve al definir que cada lado es igual a una constante, es decir una constante de separación. Seleccionamos[1]

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-l^2, \tag{2.46}$$

$$-k^2-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-l^2. \tag{2.47}$$

Regresando ahora nuestra atención a la Ec. 2.47,

[1] La selección del signo, completamente arbitrario en este caso, quedará fijo en los problemas específicos debido a la necesidad de satisfacer las condiciones limitantes específicas.

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 + l^2 - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}, \tag{2.48}$$

se ha logrado una segunda separación. En este caso tenemos una función de y igualada con una función de z y aparece la misma paradoja. Resolvemos como antes igualando cada lado con otra constante de separación, $-m^2$,

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -m^2, \tag{2.49}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -n^2, \tag{2.50}$$

introduciendo una constante n^2 por $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$ para producir un conjunto simétrico de ecuaciones. Ahora tenemos tres ecuaciones diferenciales ordinarias (2.46, 2.49 y 2.50) para sustituir la Ec. 2.42. Nuestra suposición (Ec. 2.43) ha tenido éxito y consecuentemente se justifica.

Nuestra solución debe designarse de acuerdo con la selección de las constantes l, m y n, es decir

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = X_l(x)\, Y_m(y)\, Z_n(z). \tag{2.50a}$$

Dependiendo de las condiciones del problema que se resuelve y de la condición $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$, podemos seleccionar l, m y n como sea de nuestro gusto y la Ec. 2.50a aún será una solución de la Ec. 2.1, siempre que $X_l(x)$ sea una solución de la Ec. 2.46, etc. Podemos desarrollar la solución más general de la Ec. 2.1 considerando la combinación lineal de las soluciones ψ_{lmn},

$$\Psi = \sum_{l,m,n} a_{lmn}\psi_{lmn}. \tag{2.50b}$$

Los coeficientes constantes a_{lmn} se escogen finalmente para permitir que Ψ satisfaga las condiciones limitantes del problema.

¿Cómo es posible esto? ¿Cuál es la justificación para escribir la Ec. 2.50b? La justificación se encuentra al observar que $\nabla^2 + k^2$ es un operador (diferencial) lineal. El operador lineal $\mathscr{L}$ se define como el operador con las dos siguientes propiedades:

$$\mathscr{L}(a\psi) = a\mathscr{L}\psi,$$

en donde a es una constante y

$$\mathscr{L}(\psi_1 + \psi_2) = \mathscr{L}\psi_1 + \mathscr{L}\psi_2.$$

Como consecuencia de estas propiedades, cualquier combinación lineal de soluciones de una ecuación diferencial lineal también es una función. A partir de esta forma explícita, se observa que $\nabla^2 + k^2$ tiene estas dos propiedades (y consecuentemente es un operador lineal). La Ec. 2.50b se deriva luego como una aplicación directa de estas dos propiedades de definición.[1]

[1] Estamos interesados especialmente en los operadores lineales debido a que en la mecánica cuántica las cantidades físicas se representan por medio de operadores lineales en el espacio complejo, de dimensiones infinitas de Hilbert.

Es de hacerse notar una generalización adicional. El proceso de separación descrito justamente antes también podría haber pasado a través de

$$k^2 = f(x) + g(y) + h(z) + k'^2, \tag{2.50c}$$

con k'^2 como una nueva constante.

Simplemente se tendría

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + f(x) = -l^2 \tag{2.50d}$$

sustituyendo la Ec. 2.46. Las soluciones X, Y y Z serían diferentes, pero la técnica de separación de la ecuación diferencial parcial y el hecho de considerar la combinación lineal de las soluciones serían los mismos.

Es de hacer notar al lector que esta técnica de separación de variables de una ecuación diferencial parcial ha sido introducida para ilustrar la utilidad de estos sistemas coordenados. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias se desarrollan en los Capítulos 8 al 13.

Tratemos de separar la Ec. 2.1, nuevamente con k^2 constante, en coordenadas polares esféricas. Utilizando la Ec. 2.32, obtenemos

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] = -k^2\psi. \tag{2.51}$$

Ahora, por analogía con la Ec. 2.43, intentamos lo siguiente

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi). \tag{2.52}$$

Sustituyendo nuevamente en la Ec. 2.51 y dividiendo por $R\Theta\Phi$, tenemos

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -k^2. \tag{2.53}$$

Observe que todas las derivadas son ahora derivadas ordinarias más bien que derivadas parciales. Multiplicando por $r^2 \operatorname{sen}^2\theta$ podemos separar $(1/\Phi)(d^2\Phi/d\varphi^2)$ para obtener

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = r^2\operatorname{sen}^2\theta\left[-k^2 - \frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right]. \tag{2.54}$$

La Ec. 2.54 relaciona una función de φ solamente con una función de r y θ solamente. Ya que r, θ y φ son variables independientes, podemos igualar cada lado de la Ec. 2.54 con una constante. En este caso, un poco de atención puede simplificar este último análisis. En casi todos los problemas físicos, φ aparece como un ángulo acimutal. Esto sugiere una solución periódica más bien que una exponencial. Considerando esto, utilicemos $-m^2$ como la constante de separación. Cualquier constante será la adecuada, pero esta hará que la realización sea más fácil. Siendo así,

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \tag{2.55}$$

y

$$\frac{1}{r^2 R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}=-k^2. \tag{2.56}$$

Multiplicando la Ec. 2.56 por r^2 y volviendo a arreglar los términos, se obtiene

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+r^2k^2=-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \tag{2.57}$$

Nuevamente se han separado las variables. Igualamos cada lado con una constante Q y finalmente se obtiene

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\Theta+Q\Theta=0, \tag{2.58}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2R-\frac{QR}{r^2}=0. \tag{2.59}$$

Una vez más hemos sustituido una ecuación diferencial parcial de tres variables por tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales ordinarias se describen en los Capítulos 11 y 12. En el Capítulo 12, por ejemplo, la Ec. 2.58 se identifica como la ecuación de Legendre asociada, en que la constante Q se transforma en $l(l+1)$; l es un número íntegro.

Nuevamente, nuestra solución más general puede indicarse en la forma

$$\psi_{Qm}(r,\theta,\varphi)=\sum_{Q,m}R_Q(r)\,\Theta_{Qm}(\theta)\,\Phi_m(\varphi). \tag{2.60a}$$

La restricción de que k^2 sea una constante resulta innecesariamente rigurosa. El proceso de separación aún es posible para k^2 con un valor tan general como

$$k^2=f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}h(\varphi)+k'^2 \tag{2.60b}$$

En el problema del átomo de hidrógeno, uno de los ejemplos más importantes de la ecuación de onda de Schrödinger con una solución de forma cerrada, se tiene $k^2=f(r)$. La Ec. 2.59 para el átomo de hidrógeno se transforma en la ecuación de Laguerre asociada. La separación de variables y la investigación de las ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes se consideran nuevamente en la Sección 8.2. Ahora regresaremos a la investigación del resto de los sistemas coordenados especiales.

EJERCICIOS

2.5.1 Permitiendo que el operador ∇^2+k^2 actúe en la forma general $a_1\psi_1(x,y,z)+a_2\psi_2(x,y,z)$, demuestre que es lineal, es decir $(\nabla^2+k^2)(a_1\psi_1+a_2\psi_2)=a_1(\nabla^2+k^2)\psi_1+a_2(\nabla^2+k^2)\psi_2$.

2.5.2 Verifique que

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi) + \left[k^2 + f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}h(\varphi)\right]\psi(r,\theta,\varphi) = 0$$

puede separarse (en coordenadas polares esféricas). Las funciones f, g y h son funciones solamente de las variables indicadas; k^2 es una constante.

2.5.3 Una partícula atómica (cuanto mecánico) se confina dentro de una caja rectangular cuyos lados son a, b y c. La partícula está definida por una función de onda ψ que satisface la ecuación de onda de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi.$$

Requerimos que la función de onda desaparezca en cada superficie de la caja (pero que no sea exactamente igual a cero). Esta condición impone limitaciones a las constantes de separación y consecuentemente a la energía E. ¿Cuál es el valor más pequeño de E para el cual puede obtenerse tal solución?

Respuesta. $E = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right).$

2.6 Coordenadas Cilíndricas Circulares (ρ, φ, z)

De la Fig. 2.4 se pueden obtener las relaciones de transformación

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\,\text{sen}\,\varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{2.61}$$

utilizando ρ para la distancia perpendicular desde el eje z y conservando r para la distancia desde el origen. De acuerdo con estas ecuaciones o a partir de los elementos de longitud, los factores de escala son

$$\begin{aligned} h_1 &= h_\rho = 1, \\ h_2 &= h_\varphi = \rho, \\ h_3 &= h_z = 1. \end{aligned} \tag{2.62}$$

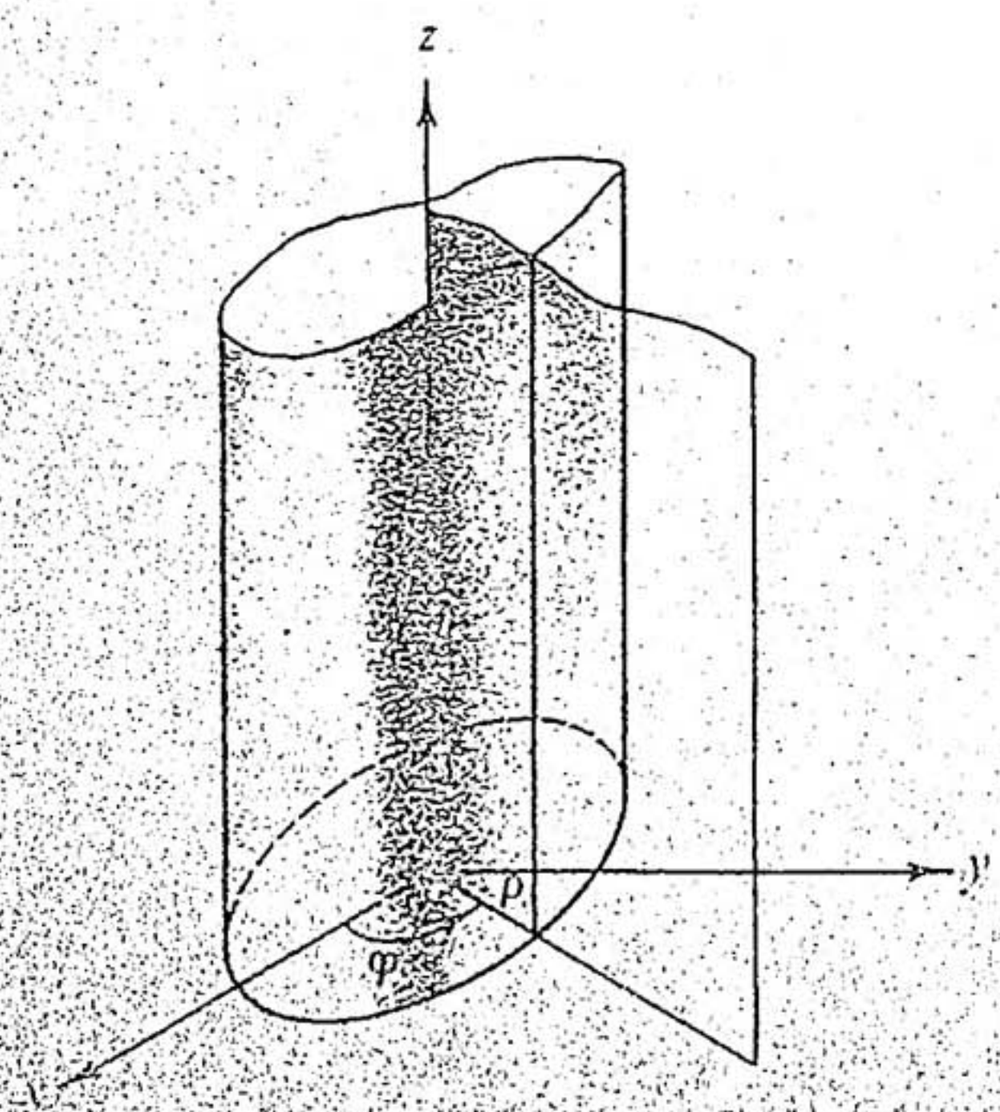


Fig. 2.4 Coordenadas cilíndricas circulares.

Las familias de superficies coordenadas en la Fig. 2.4 son

1. Cilindros circulares rectos que tienen el eje z como eje común

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = \text{constante}.$$

2. Planos medios a través del eje z,

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{constante}.$$

3. Planos paralelos al plano xy, tal como en el sistema cartesiano,

$$z = \text{constante}.$$

Los límites en ρ, φ y z, son

$$0 \leqslant \rho < \infty, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad \text{y} \qquad -\infty < z < \infty.$$

A partir de las Ecs. 2.13, 2.17, 2.18 y 2.22

$$\nabla\psi(\rho, \varphi, z) = \boldsymbol{\rho}_0 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \mathbf{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{2.63}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{2.64}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \tag{2.65}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_0 & \rho\boldsymbol{\varphi}_0 & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix} \tag{2.66}$$

Finalmente, para los problemas tales como las guías de onda circulares o los resonadores de cavidad cilíndrica, se tiene que el laplaciano de vector $\nabla^2\mathbf{V}$ resuelto en coordenadas cilíndricas circulares es

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{V}|_\rho &= \nabla^2 V_\rho - \frac{1}{\rho^2}V_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}, \\ \nabla^2\mathbf{V}|_\varphi &= \nabla^2 V_\varphi - \frac{1}{\rho^2}V_\varphi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}, \\ \nabla^2\mathbf{V}|_z &= \nabla^2 V_z. \end{aligned} \tag{2.67}$$

La razón básica para la forma del componente z es que el eje z es un eje cartesiano, es decir

$$\begin{aligned} \nabla^2(\boldsymbol{\rho}_0 V_\rho + \boldsymbol{\varphi}_0 V_\varphi + \mathbf{k} V_z) &= \nabla^2(\boldsymbol{\rho}_0 V_\rho + \boldsymbol{\varphi}_0 V_\varphi) + \mathbf{k}\,\nabla^2 V_z \\ &= \boldsymbol{\rho}_0 f(V_\rho, V_\varphi) + \boldsymbol{\varphi}_0 g(V_\rho, V_\varphi) + \mathbf{k}\,\nabla^2 V_z. \end{aligned}$$

El operador ∇^2 que opera en los vectores unitarios $\boldsymbol{\rho}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_0$ permanece en el plano $\boldsymbol{\rho}_0\boldsymbol{\varphi}_0$. Este comportamiento se conserva igual en todos estos sistemas cilíndricos.

EJEMPLO 2.6.1 CAVIDAD RESONANTE CILINDRICA

Considere una cavidad cilíndrica circular (radio a) con paredes perfectamente conductoras. Las ondas electromagnéticas oscilarán en tal cavidad. Si se supone que nuestros campos eléctrico y magnético tienen una dependencia de tiempo $e^{-i\omega t}$, entonces las ecuaciones de Maxwell llevan a

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}. \qquad \text{(cf. Ejemplo 1.9.2)} \tag{2.68}$$

Con $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (vacío, sin cargas),

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \alpha^2 \mathbf{E} = 0,$$

en donde ∇^2 es el *vector* laplaciano y $\alpha^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$. En coordenadas cilíndricas, E_z se separa y tenemos la ecuación *escalar* de Helmholtz

$$\nabla^2 E_z + \alpha^2 E_z = 0, \tag{2.69}$$

y la condición limitante $E_z(\rho = a) = 0$.

Utilizando la Ec. 2.65, la Ec. 2.69 se transforma en

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \alpha^2 E_z = 0. \tag{2.70}$$

Intentamos $\qquad E_z(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$

para obtener
$$\frac{1}{P\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dP}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Phi \rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \alpha^2 = 0. \tag{2.71}$$

Eliminando la dependencia en z con una constante de separación $-k^2$,

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2.$$

Para nuestro problema de cavidad, sen kz y cos kz son las soluciones apropiadas (en cuanto a que las hemos seleccionado para equivaler a las condiciones limitantes en los extremos de la cavidad). Los exponenciales $e^{\pm ikz}$ serían apropiados para una guía de onda (ondas progresivas), cf. Sección 11.3.

Utilizando $\gamma^2 = \alpha^2 - k^2$, aislamos la dependencia en φ al multiplicar por ρ^2. Establecemos

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2,$$

con $\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$, sen $m\varphi$, cos $m\varphi$. Luego, la dependencia en ρ restante es

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dP}{d\rho}\right) + (\gamma^2 \rho^2 - m^2) P = 0. \tag{2.72}$$

Esta es la ecuación de Bessel. Las soluciones se desarrollan en el Capítulo 11. Este ejemplo particular, con las funciones de Bessel, se continúa como Ejemplo 11.1.2.

EJERCICIOS

2.6.1 Resuelva los vectores unitarios cilíndricos circulares en sus componentes cartesianos.

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$
$$\boldsymbol{\varphi}_0 = -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi,$$
$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}.$$

2.6.2 Resuelva los vectores unitarios cartesianos en sus componentes cilíndricos circulares.

$$\mathbf{i} = \boldsymbol{\rho}_0\cos\varphi - \boldsymbol{\varphi}_0\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$
$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\rho}_0\,\mathrm{sen}\,\varphi + \boldsymbol{\varphi}_0\cos\varphi,$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0.$$

2.6.3 Una partícula se mueve a través del espacio. Encuentre los componentes cilíndricos circulares de su velocidad y aceleración.

$$v_\rho = \dot{\rho}, \qquad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,$$
$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \qquad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi},$$
$$v_z = \dot{z}, \qquad a_z = \ddot{z}.$$

Sugerencia:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \boldsymbol{\rho}_0(t)\rho(t) + \mathbf{k}z(t)\\ &= [\mathbf{i}\cos\varphi(t) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\varphi(t)]\rho(t) + \mathbf{k}z(t).\end{aligned}$$

Nota. $\dot{\rho} = d\rho/dt$, $\ddot{\rho} = d^2\rho/dt^2$, etc.

2.6.4 Demuestre que la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

puede separarse aun en coordenadas cilíndricas circulares si k^2 se generaliza a $k^2 + f(\rho) + (1/\rho^2)g(\varphi) + h(z)$.

2.6.5 Resuelva la ecuación de Laplace $\nabla^2\psi = 0$, en coordenadas cilíndricas para $\psi = \psi(\rho)$.

Respuesta. $\psi = k\ln\dfrac{\rho}{\rho_0}$

2.6.6 En coordenadas cilíndricas circulares rectas, una función de vector particular está definida por

$$\mathbf{V}(\rho, \varphi) = \boldsymbol{\rho}_0 V_\rho(\rho, \varphi) + \boldsymbol{\varphi}_0 V_\varphi(\rho, \varphi).$$

Demuestre que $\nabla \times \mathbf{V}$ tiene solamente un componente z. Observe que este resultado es consistente para cualquier vector confinado a la superficie $q_3 =$ constante, mientras cada uno de los productos h_1V_1 y h_2V_2 sean independientes de q_3.

2.6.7 Un alambre conductor a lo largo del eje z lleva la corriente I. El potencial de vector magnético resultante está definido por

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}\,\frac{\mu I}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Demuestre que la inducción magnética $\mathbf{B}$ está definida por

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\varphi}_0\,\frac{\mu I}{2\pi\rho}.$$

2.6.8 Una fuerza está definida por

$$\mathbf{F} = -\mathbf{i}\,\frac{y}{x^2+y^2} + \mathbf{j}\,\frac{x}{x^2+y^2}$$

(a) Exprese $\mathbf{F}$ en coordenadas cilíndricas circulares.
Operando completamente en coordenadas cilíndricas circulares para (b) y (c).
(b) Calcule el rotacional de $\mathbf{F}$ y
(c) Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al circundar el círculo unitario una vez en el sentido contrario a las manecillas del reloj.
(d) ¿Cómo se pueden reconciliar los resultados de (b) y (c)?

2.6.9 Una onda electromagnética transversal (TEM) en una guía de onda coaxial tiene un campo eléctrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\rho, \varphi)e^{i(kz-\omega t)}$ y un campo de inducción magnética de $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho, \varphi)e^{i(kz-\omega t)}$. Ya que la onda es transversal, ninguno de los componentes $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ tiene un componente z. Los dos campos satisfacen la ecuación laplaciana de *vector*

$$\nabla^2\mathbf{E}(\rho, \varphi) = 0$$
$$\nabla^2\mathbf{B}(\rho, \varphi) = 0.$$

(a) Demuestre que $\mathbf{E} = \boldsymbol{\rho}_0 E_0(a/\rho)e^{i(kz-\omega t)}$ y $\mathbf{B} = \boldsymbol{\varphi}_0 B_0(a/\rho)e^{i(kz-\omega t)}$ son soluciones. En este caso, a es el radio del conductor interno.
(b) Suponiendo un vacío dentro de la guía de onda, verifique que las ecuaciones de Maxwell se satisfacen con

$$B_0/E_0 = k/\omega = \mu_0\,\varepsilon_0(\omega/k) = 1/c.$$

2.6.10 El cálculo del efecto de retracción magnetohidrodinámica implica la evaluación de $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}$. Si la inducción magnética $\mathbf{B}$ se considera que es $\mathbf{B} = \boldsymbol{\varphi}_0 B_\varphi(\rho)$, demuestre que

$$(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} = -\boldsymbol{\rho}_0 B_\varphi{}^2/\rho.$$

2.6.11 (a) Explique por qué ∇^2 en las coordenadas polares planas se deriva de ∇^2 en las coordenadas cilíndricas circulares con $z =$ constante.
(b) Explique por qué el considerar a ∇^2 en coordenadas polares esféricas y limitando θ a $\pi/2$ *NO* origina la forma polar plana de ∇^2.

Nota. $$\nabla^2(\rho, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

2.7 Coordenadas Cilíndricas Elípticas (u, v, z)

Una forma razonable de clasificar los sistemas coordenados separables consiste en comenzar con el sistema elipsoidal confocal (Sección 2.15) y

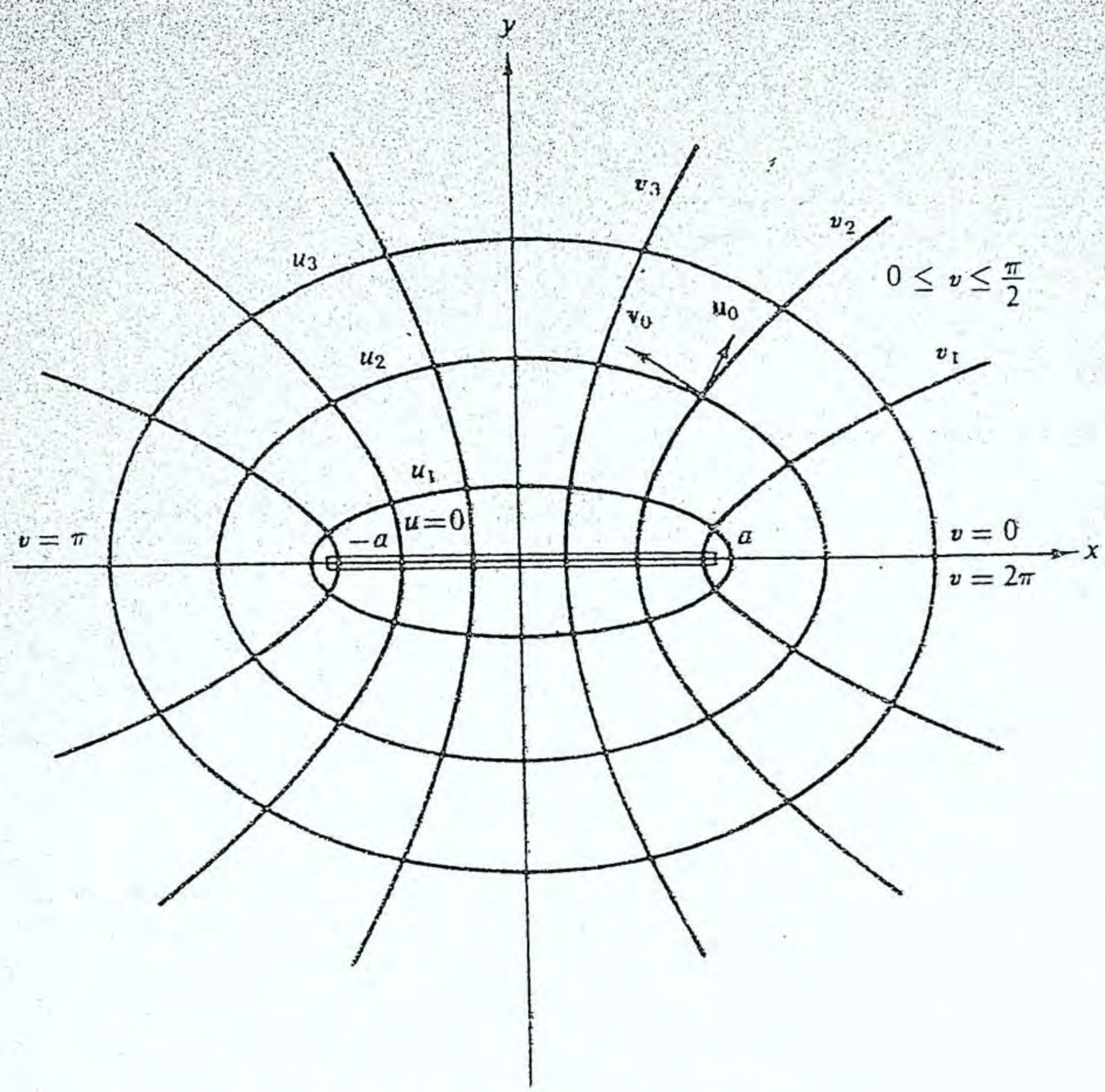


Fig. 2.5 Coordenadas cilíndricas elípticas

derivar los otros sistemas como casos degenerados. Los detalles de este procedimiento se pueden encontrar en la obra de Morse y Feshbach, *Methods of Mathematical Physics,* Capítulo 5. Aquí, para enfatizar la aplicación en lugar de la derivación, se consideran los sistemas coordenados en el orden de sus propiedades de simetría, procediendo con aquellos que tienen un eje de translación. Todos aquellos que tienen un eje de translación son sistemas esencialmente bidimensionales con una tercera dimensión adjunta (el eje z).

Para el sistema cilíndrico elíptico, se tiene

$$x = a \cosh u \cos v,$$

$$y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \tag{2.73}$$

$$z = z.$$

Las familias de superficies coordenadas son las siguientes:

1. Cilindros elípticos, $u =$ constante, $0 \leqslant u < \infty$.
2. Cilindros hiperbólicos, $v =$ constante, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.
3. Planos paralelos al plano xy, $z =$ constante, $-\infty < z < \infty$.

Esto puede observarse al invertir la Ec. 2.73. Elevando al cuadrado cada lado,

$$x^2 = a^2 \cosh^2 u \cos^2 v, \tag{2.74}$$

$$y^2 = a^2 \operatorname{senh}^2 u \operatorname{sen}^2 v, \tag{2.75}$$

de lo cual se tiene

$$\frac{x^2}{a^2 \cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{senh}^2 u} = 1, \tag{2.76}$$

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 v} = 1. \tag{2.77}$$

Mantenimiento constante a u, la Ec. 2.76 origina una familia de elipses con el eje x, en el principal. Para $v =$ constante, la Ec. 2.77 proporciona hipérbolas con puntos focales en el eje x.

Los factores de escala son

$$\begin{aligned} h_1 &= h_u = a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2}, \\ h_2 &= h_v = a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2}, \\ h_3 &= h_z = 1. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Este sistema será tratado nuevamente como sistema bidimensional en el Capítulo 6 cuando se describa la representación conformal.

EJERCICIOS

2.7.1 Sea $\cosh u = q_1$, $\cos v = q_2$, $z = q_3$. Encuentre los nuevos factores de escala h_{q_1} y h_{q_2}.

$$h_{q_1} = a\left(\frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - 1}\right)^{1/2},$$

$$h_{q_2} = a\left(\frac{q_1^2 - q_2^2}{1 - q_2^2}\right)^{1/2}$$

2.7.2 Demuestre que la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas elípticas se separa en

(a) la ecuación de oscilador lineal para la dependencia en z,

(b) la ecuación de Mathieu

$$\frac{d^2 g}{dv^2} + (b - 2q \cos 2v)\, g = 0,$$

y

(c) la ecuación modificada de Mathieu

$$\frac{d^2 f}{du^2} - (b - 2q \cosh 2u)\, f = 0.$$

2.8 Coordenadas Cilíndricas Parabólicas (ξ, η, z)

Las ecuaciones de transformación,

$$x = \xi\eta,$$
$$y = \tfrac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2), \tag{2.79}$$
$$z = z,$$

generan dos conjuntos de cilindros parabólicos ortogonales (Fig. 2.6). Mediante la solución de la Ec. 2.79 para ξ y η, se obtiene lo siguiente:

1. Cilindros parabólicos, ξ = constante,[1] $\quad -\infty < \xi < \infty.$

2. Cilindros parabólicos, η = constante, $\quad 0 \leqslant \eta < \infty.$

3. Planos paralelos al plano xy, z = constante $\quad -\infty < z < \infty.$

De la Ec. 2.6, los factores de escala son

$$h_1 = h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2},$$
$$h_2 = h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \tag{2.80}$$
$$h_3 = h_z = 1.$$

2.9 Coordenadas Bipolares (ξ, η, z)

Este es un sistema coordenado de características peculiares. No constituye un caso degenerado de las coordenadas elipsoidales confocales. La Ec. 2.1 no puede separarse completamente en este sistema, ni siquiera para $k^2 = 0$ (cf. Ejercicio 2.9.2). Se incluye como un ejemplo de la forma en que un sistema coordenado poco usual puede seleccionarse para adaptarse a un problema. Las ecuaciones de transformación son

$$x = \frac{a \operatorname{senh} \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \tag{2.81a}$$

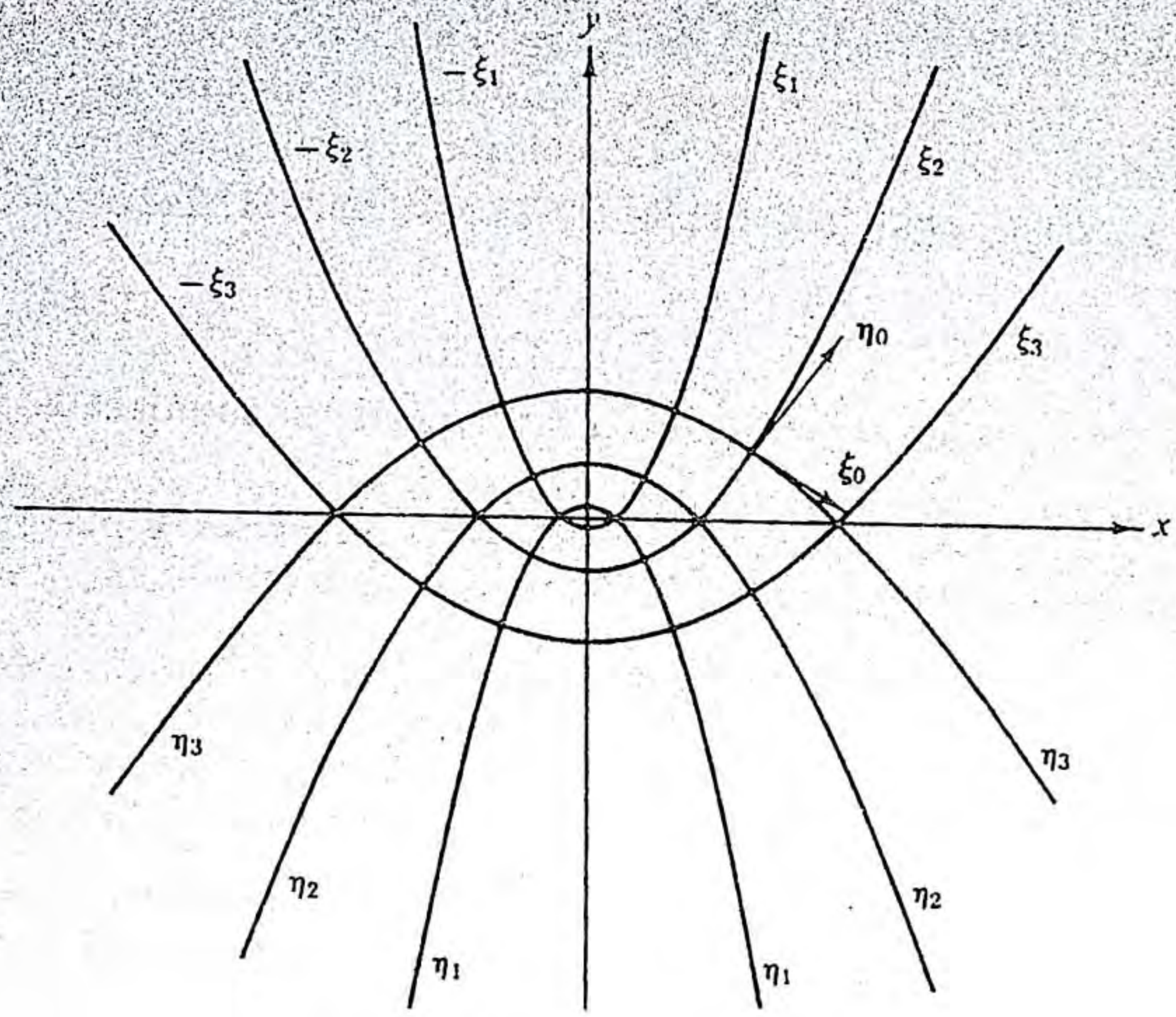
$$y = \frac{a \operatorname{sen} \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \tag{2.81b}$$

$$z = z. \tag{2.81c}$$

Dividiendo la Ec. 2.81a entre la Ec. 2.81b, se tiene

$$\frac{x}{y} = \frac{\operatorname{senh} \eta}{\operatorname{sen} \xi}. \tag{2.82}$$

[1] El cilindro parabólico ξ = constante es invariante al signo de ξ. Debemos permitir que ξ (o η) continúe siendo negativo para cubrir los valores negativos de x.



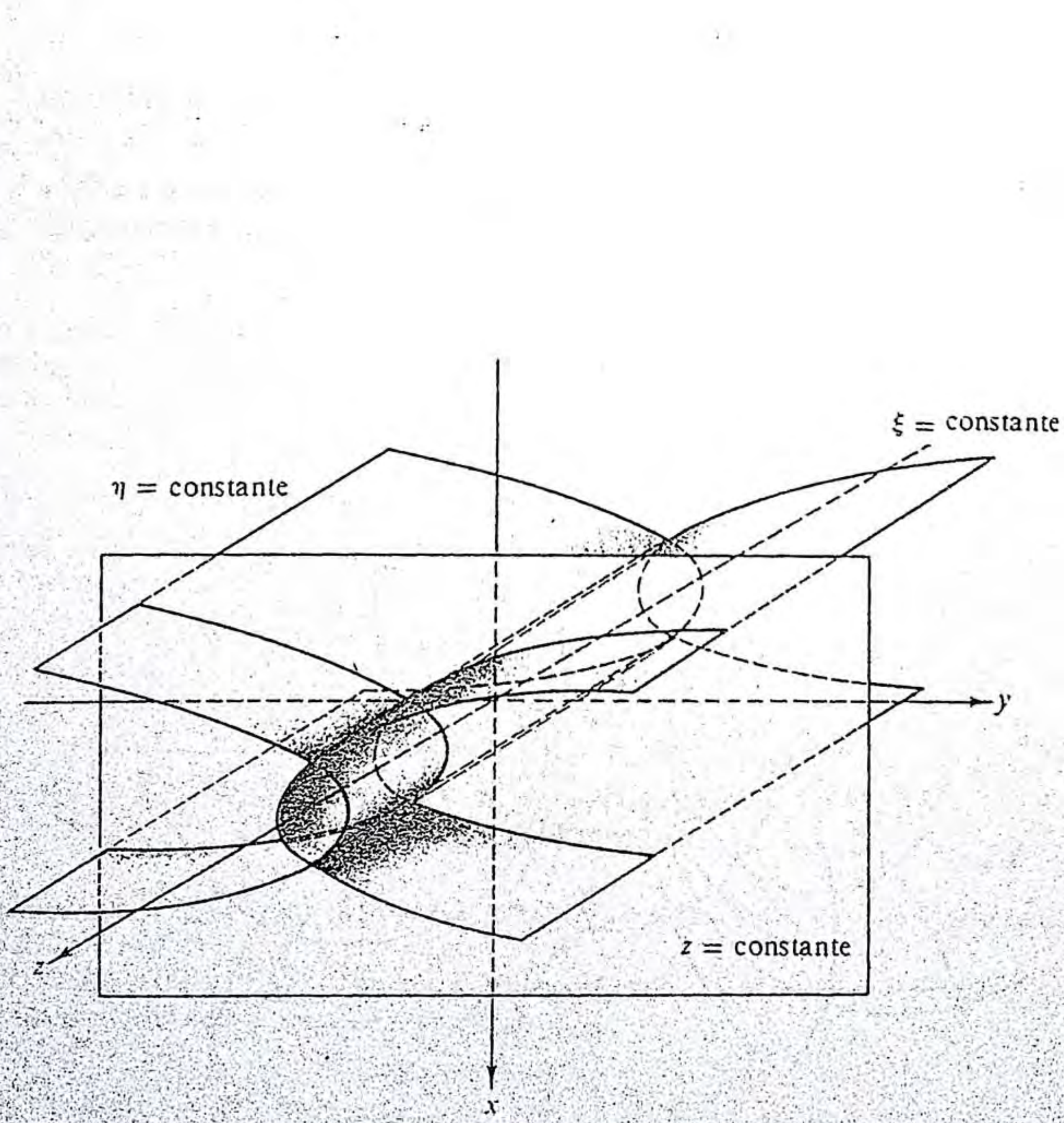


Fig. 2.6 Coordenadas cilíndricas parabólicas (arriba). Sección transversal (abajo)

Utilizando la Ec. 2.82 para eliminar ξ de la Ec. 2.81*a*, se obtiene

$$(x - a \coth \eta)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{csch}^2 \eta. \tag{2.83}$$

Utilizando la Ec. 2.82 para eliminar η de la Ec. 2.81*b*, se tiene

$$x^2 + (y - a \cot \xi)^2 = a^2 \csc^2 \xi. \tag{2.84}$$

De las Ecs. 2.83 y 2.84 hemos identificado a las superficies coordenadas como sigue:

1. Cilindros circulares, centro en $y = a \cot \xi$,

$$\xi = \text{constante}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi.$$

2. Cilindros circulares, centro en $x = a \coth \eta$,

$$\eta = \text{constante}, \quad -\infty < \eta < \infty.$$

3. Planos paralelos al plano xy,

$$z = \text{constante}, \quad -\infty < z < \infty.$$

Cuando $\eta \to \infty$, $\coth \eta \to 1$ y $\operatorname{csch} \eta \to 0$. La Ec. 2.83 tiene la solución $x = a$, $y = 0$. De modo similar, cuando $\eta \to -\infty$, una solución es $x = -a$, $y = 0$, el círculo degenera en un punto, el cilindro en una línea. La familia de círculos (en el plano xy) descrita por la Ec. 2.84 pasa por ambos pun-

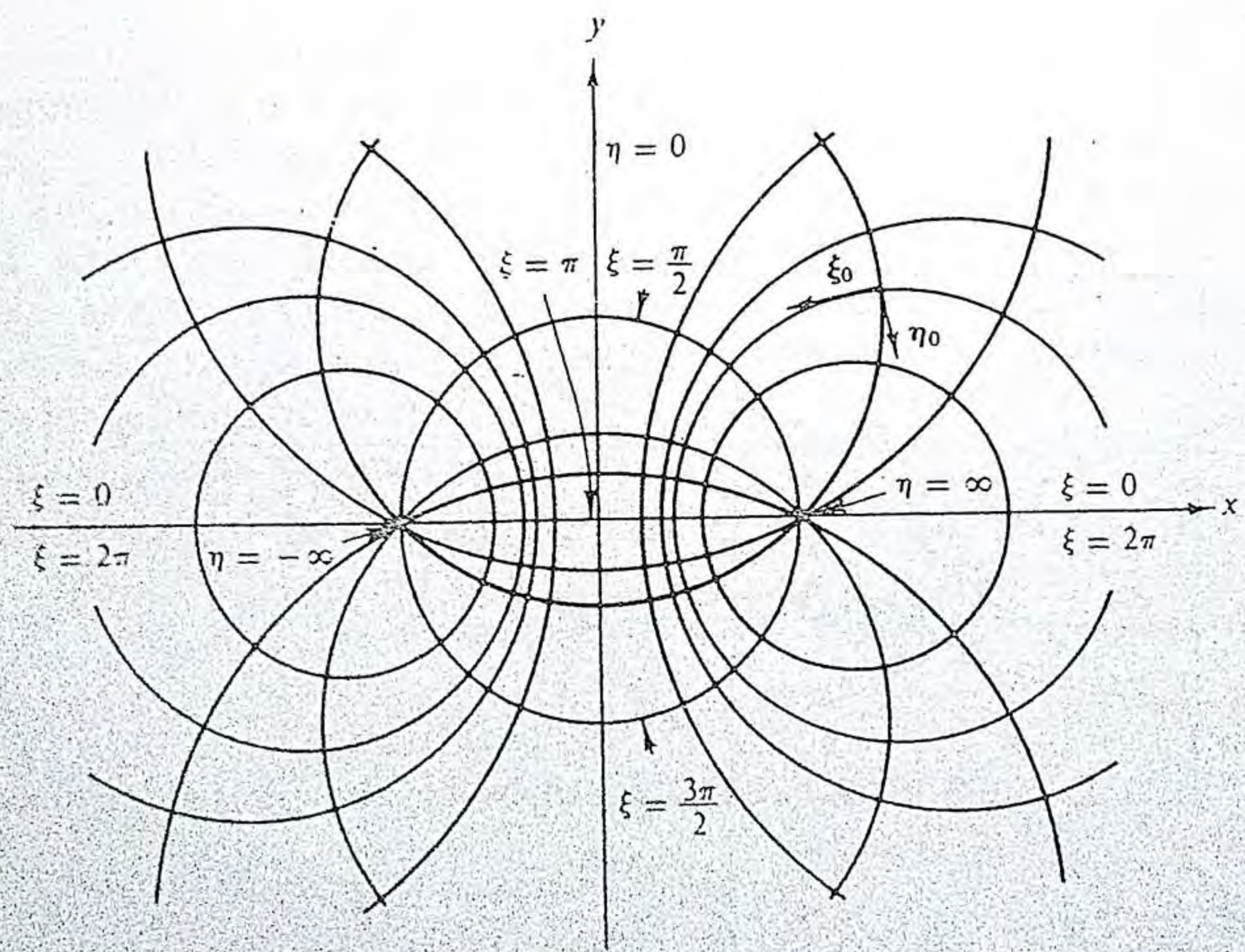


Fig. 2.7 Coordenadas bipolares

los. Esto se deriva al observar que $x = \pm a$, $y = 0$ son soluciones de la Ec. 2.84 para cualquier valor de ξ.

Los factores de escala para el sistema bipolar son

$$h_1 = h_\xi = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi},$$

$$h_2 = h_\eta = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi}, \tag{2.85}$$

$$h_3 = h_z = 1.$$

Para establecer la forma en que el sistema bipolar puede ser de utilidad, comencemos con los tres puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$ y (x, y) y los dos vectores de distancia ρ_1 y ρ_2 en los ángulos θ_1 y θ_2 desde el eje x positivo.

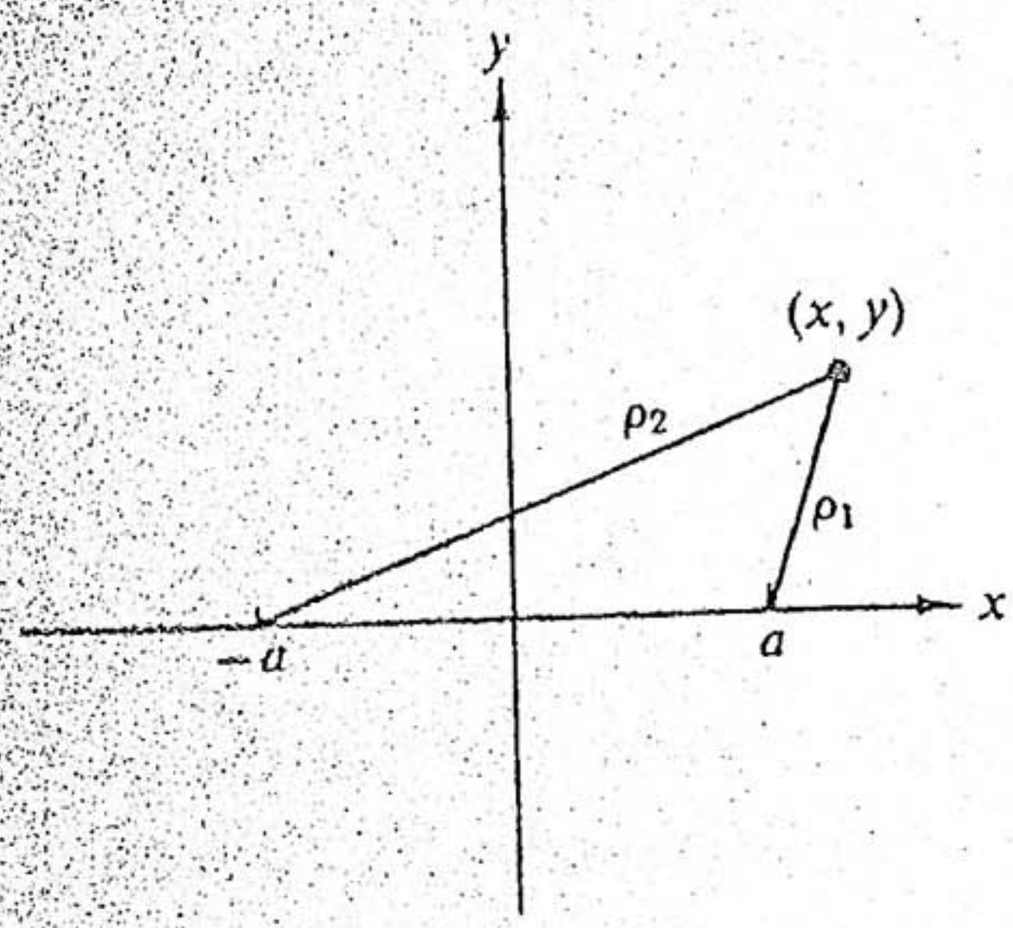


Fig. 2.8

De la Fig. 2.8

$$\rho_1^2 = (x - a)^2 + y^2,$$

$$\rho_2^2 = (x + a)^2 + y^2, \tag{2.86}$$

y

$$\tan \theta_1 = \frac{y}{x - a},$$

$$\tan \theta_2 = \frac{y}{x + a}. \tag{2.87}$$

Definimos[1]

$$\eta_{12} = \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}, \tag{2.88a}$$

$$\xi_{12} = \theta_1 - \theta_2. \tag{2.88b}$$

Tomando $\tan \xi_{12}$ y la Ec. 2.87

$$\tan \xi_{12} = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

$$= \frac{y/(x - a) - y/(x + a)}{1 + y^2/(x - a)(x + a)}. \tag{2.89}$$

De la Ec. 2.89, se deriva directamente la Ec. 2.84. Esto identifica a ξ como $\xi_{12} = \theta_1 - \theta_2$. Resolviendo la Ec. 2.88a para ρ_2/ρ_1 y combinando esto con la Ec. 2.86 obtenemos

$$e^{2\eta_{12}} = \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2} \tag{2.90}$$

[1] La notación ln se utiliza para designar $\log_e$.

La multiplicación por $e^{-\eta_{12}}$ y el uso de las definiciones del seno y coseno hiperbólico da la Ec. 2.83, que identifica a η como $\eta_{12} = \ln(\rho_2/\rho_1)$. El siguiente ejemplo utiliza esta identificación.

EJEMPLO 2.9.1

Un alambre recto infinitamente largo lleva la corriente I en la dirección z negativa. Un segundo alambre, paralelo al primero, lleva la corriente I en la dirección z positiva. Utilizando

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\lambda}{r}, \tag{2.91}$$

encuentre $\mathbf{A}$, el potencial de vector magnético, y $\mathbf{B}$, la inductancia magnética.

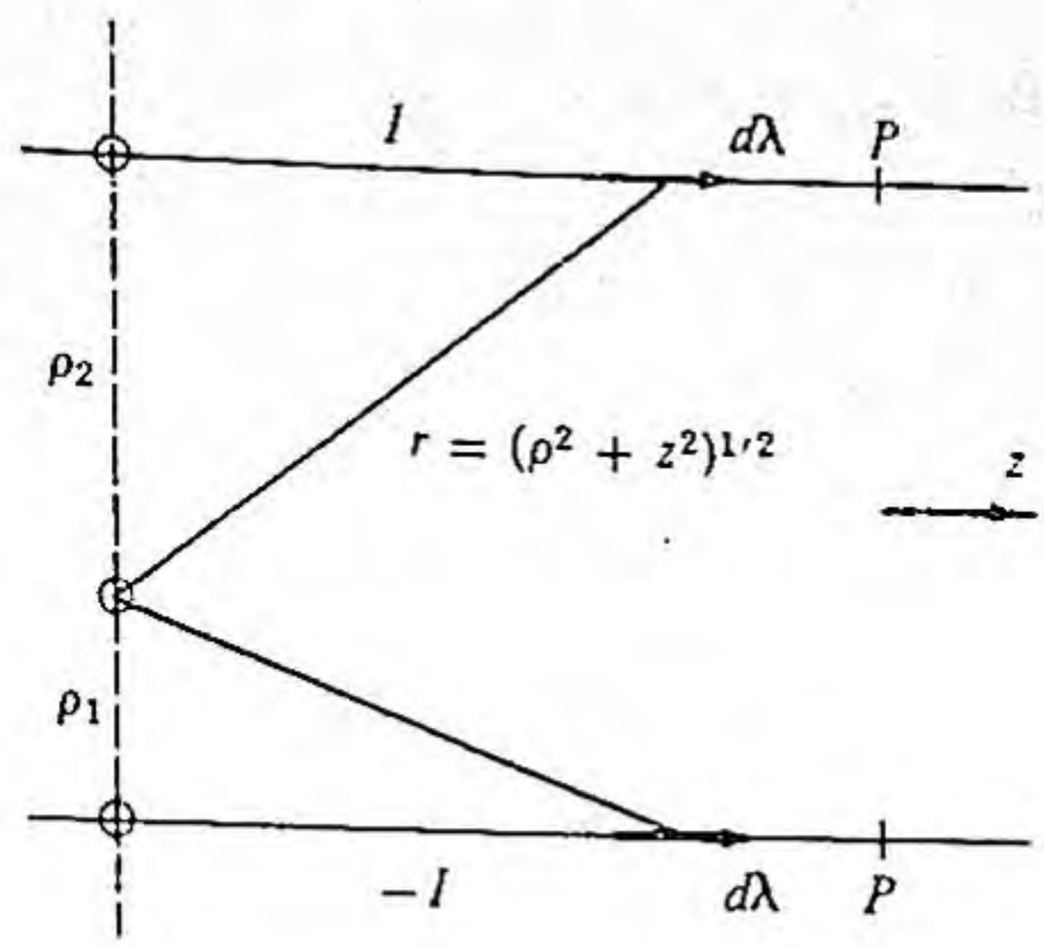


Fig. 2.9 Corrientes eléctricas antiparalelas

De la Ec. 2.91, $\mathbf{A}$ solamente tiene el componente z. Integrando sobre cada alambre desde 0 hasta P y tomando el límite como $P \to \infty$, obtenemos

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{P\to\infty}\left(2\int_0^P \frac{dz}{\sqrt{\rho_2^2 + z^2}} - 2\int_0^P \frac{dz}{\sqrt{\rho_1^2 + z^2}}\right), \tag{2.92}$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{P\to\infty} 2[\ln(z + \sqrt{\rho_2^2 + z^2})|_0^P - \ln(z + \sqrt{\rho_1^2 + z^2})|_0^P],$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\lim_{P\to\infty} 2\ln\frac{P + \sqrt{\rho_2^2 + P^2}}{P + \sqrt{\rho_1^2 + P^2}} - 2\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right). \tag{2.93}$$

Esto se reduce a

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\eta. \tag{2.94}$$

Hasta ahora no se ha tenido necesidad de las coordenadas bipolares. Sin embargo, ahora procedamos a calcular la inductancia magnética $\mathbf{B}$ a partir de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Teniendo como base las Ecs. 2.22 y 2.85

$$\mathbf{B} = \frac{(\cosh\eta - \cos\xi)^2}{a^2}\begin{vmatrix} h_\xi\xi_0 & h_\eta\eta_0 & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \dfrac{-\mu_0 I}{2\pi}\eta \end{vmatrix},$$

$$= -\xi_0\frac{(\cosh\eta - \cos\xi)}{a}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi}. \tag{2.95}$$

El campo magnético solamente dispone del componente ξ_0. Se sugiere que el lector trate de calcular $\mathbf{B}$ en algún otro sistema coordenado.

Ahora regresaremos a las coordenadas bipolares en las Secciones 2.13 y 2.14 para derivar los sistemas coordenados toroidal y biesférico.

EJERCICIOS

2.9.1 Demuestre que al especificar el radio de cada uno de dos cilindros paralelos y la distancia centro a centro queda establecido un sistema bipolar coordenado en el sentido de que η_1 (primer círculo), η_2 (segundo) y a quedan determinados de manera única.

2.9.2 (a) Demuestre que la ecuación de Laplace, $\nabla^2 \psi(\xi, \eta, z,) = 0$ *no* puede separarse completamente en coordenadas bipolares.

(b) Demuestre que la separación completa es posible cuando se requiere que $\psi = \psi(\xi, \eta)$, es decir cuando nos limitamos a un sistema bidimensional.

2.9.3 Encuentre la capacitancia por longitud unitaria de dos cilindros conductores de radios b y c y de longitud infinita, con ejes paralelos y separados por la distancia d.

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\eta_1 - \eta_2}.$$

2.9.4 Como caso limitante del Ejercicio 2.9.3, encuentre la capacitancia por unidad de longitud entre un cilindro conductor y un plano conductor infinito paralelo al eje del cilindro.

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\eta_1}.$$

2.9.5 Una guía de onda de alambre paralelo (línea de transmisión) consiste de dos cilindros conductores infinitamente largos definidos por $\eta = \pm\eta_1$.

(a) Demuestre que

$$\eta_1 = \cosh^{-1}\left\{\frac{\text{distancia centro a centro}}{\text{diámetro del cilindro}}\right\}.$$

(b) De los ejercicios 2.9.1 y 2.9.3 sería de esperarse un modelo TEM con campos eléctrico y magnético de la forma

$$\mathbf{E} = \eta_0 \frac{1}{h_1} E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\mathbf{H} = -\xi_0 \frac{1}{h_1} H_0 e^{i(kz-\omega t)}.$$

Demuestre que $E_0 = V_0/\eta_1$ en donde $2V_0$ es la máxima diferencia de voltaje entre los dos cilindros.

(c) Con $H_0 = (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}E_0$, demuestre que las ecuaciones de Maxwell se satisfacen.

(d) Integrando el vector ponderado de tiempo

$$\mathbf{P} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

calcule la tasa a la cual se propaga la energía a lo largo de la línea de transmisión.

Respuesta. Energía $= 2\pi(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}(V_0^2/\eta_1)$.

2.10 Coordenadas Esferoidales Prolatas o Alargadas (u, v, φ)

Comencemos con las coordenadas elípticas de la Sección 2.7 como sistema bidimensional. Podemos generar un sistema tridimensional mediante la rotación alrededor de los ejes elípticos mayor o menor e introduciendo φ como ángulo acimutal (Fig. 2.10). Efectuando la rotación primeramente, alrededor del eje mayor se obtienen las coordenadas esferoidales prolatas con las siguientes superficies coordenadas:

1. Esferoides prolatos,

$$u = \text{constante}, \quad 0 \leqslant u < \infty.$$

2. Hiperboloides de dos hojas,

$$v = \text{constante}, \quad 0 \leqslant v \leqslant \pi.$$

3. Planos medios a través del eje z,

$$\varphi = \text{constante}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \cos \varphi, \\ y &= a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= a \cosh u \cos v. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Observe que hemos permutado nuestros ejes cartesianos para lograr que el eje de simetría sea el eje z. Los factores de escala para este sistema son

$$\begin{aligned} h_1 = h_u &= a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2}, \\ &= a(\cosh^2 u - \cos^2 v)^{1/2}, \\ h_2 = h_v &= a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2}, \\ h_3 = h_\varphi &= a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Las coordenadas esferoidales prolatas son más bien importantes en la física, principalmente debido a su utilidad en el tratamiento de los problemas de "dos centros". Los dos centros corresponden a los dos puntos focales, $(0, 0, a)$ y $(0, 0, -a)$, de los elipsoides e hiperboloides de revolución. Como se muestra en la Fig. 2.11, hemos denominado la distancia desde el punto focal izquierdo hasta el punto (z, x) como r_1, mientras que la distancia correspondiente desde el punto focal derecho es r_2.

$$r_1 + r_2 = \text{constante}, \quad \text{para } u \text{ fija}.$$

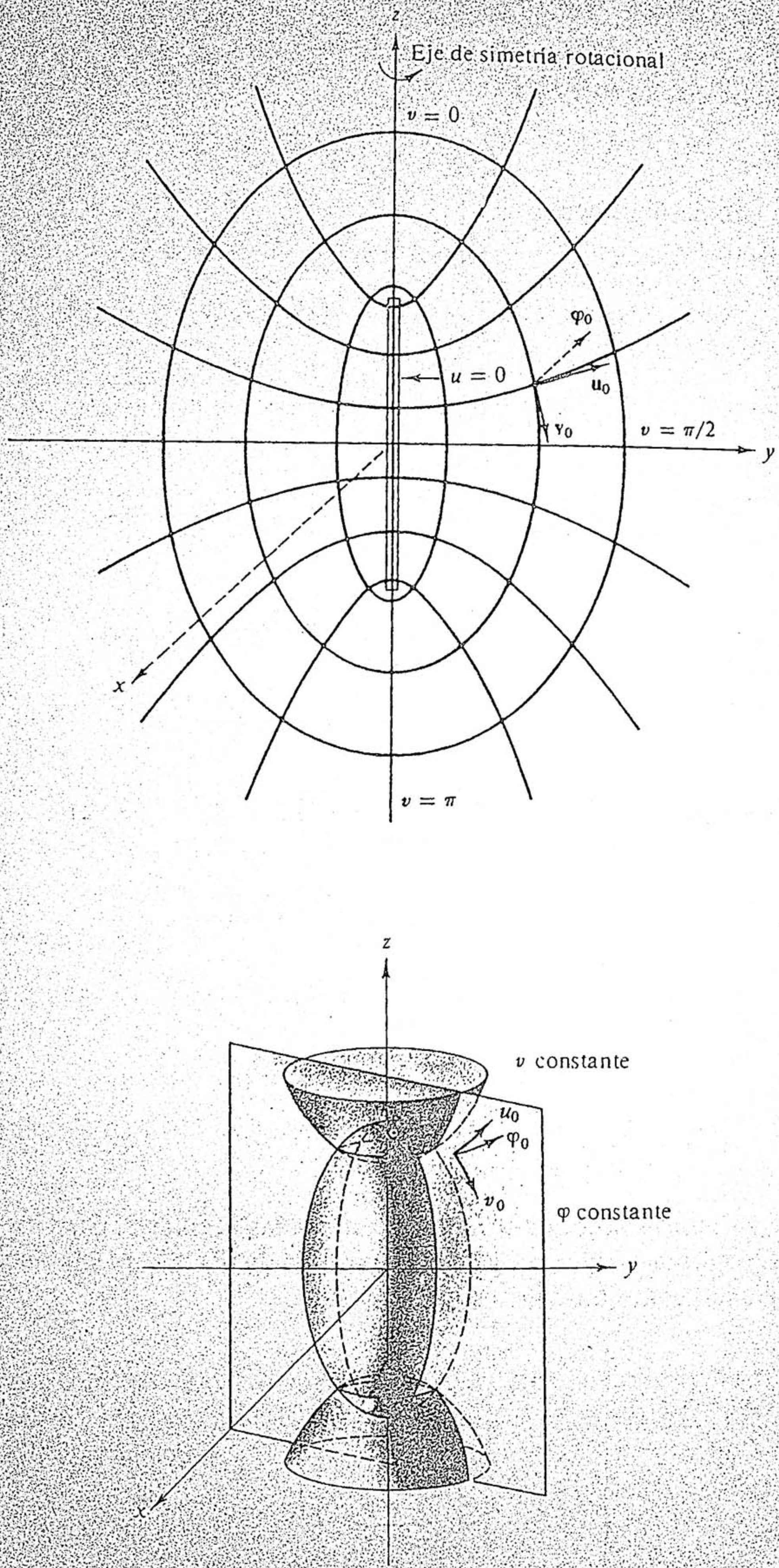


Fig. 2.10 Coordenadas esferoidales prolatas (*arriba*). Sección transversal (*abajo*).

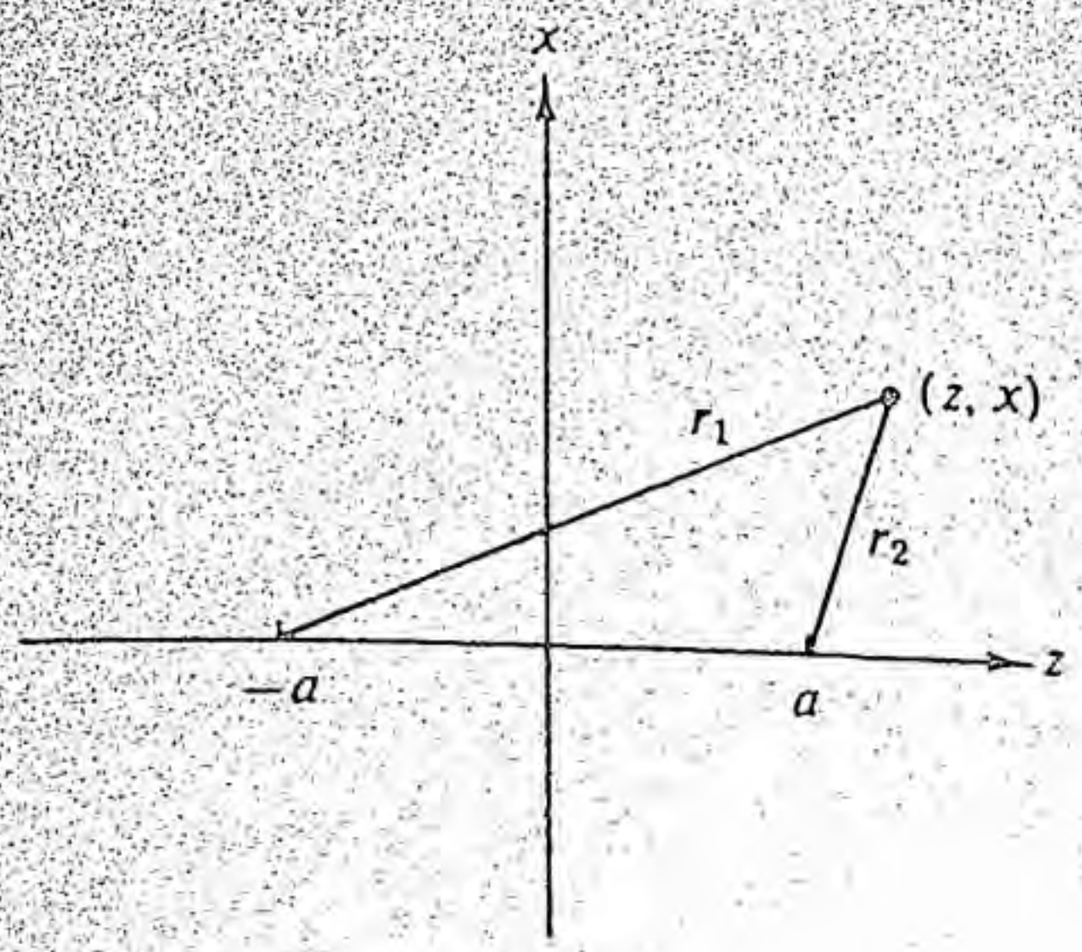


Fig. 2.11

El punto (z, x) se describe en términos de u y v mediante las Ecs. 2.96. El acimutal es de poca importancia en este caso. A partir de las propiedades de la elipse y la hipérbola se conoce que

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \text{constante}, \quad \text{para } u \text{ fija} \\ r_1 - r_2 &= \text{constante}, \quad \text{para } v \text{ fija} \end{aligned} \tag{2.98}$$

Utilizando

$$\begin{aligned} r_1 &= [(a+z)^2 + x^2]^{1/2}, \\ r_2 &= [(a-z)^2 + x^2]^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.99}$$

y la Ec. 2.96, se encuentra que

$$\begin{aligned} r_1 &= a(\cosh u + \cos v), \\ r_2 &= a(\cosh u - \cos v), \end{aligned} \tag{2.100}$$

o

$$\begin{aligned} \frac{r_1 + r_2}{2a} &= \cosh u \\ \frac{r_1 - r_2}{2a} &= \cos v \end{aligned} \tag{2.101}$$

Esto significa que u es una función de la suma de distancias desde los dos centros, mientras que v es función de la diferencia de distancias desde los dos centros.

Para facilitar esta aplicación del sistema coordenado, se cambian las variables introduciendo

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cosh u, & 1 \leqslant \xi_1 < \infty, \\ \xi_2 &= \cos v, & -1 \leqslant \xi_2 \leqslant 1, \\ \xi_3 &= \varphi, & 0 \leqslant \xi_3 \leqslant 2\pi. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Observe cuidadosamente que

$$h_{\xi_1} = h_{\cosh u} \neq h_u. \tag{2.103}$$

Las nuevas variables implican factores de escala nuevos.

EJEMPLO 2.10.1

El ion de molécula de hidrógeno es un sistema formado de dos protones que consideramos fijos en los puntos focales y un electrón. La ecuación de onda de Schrödinger para este sistema es

$$\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi - \frac{e^2}{r_1}\psi - \frac{e^2}{r_2}\psi + \frac{e^2}{r_{12}}\psi = E\psi. \tag{2.104}$$

Las variables r_1 y r_2 están definidas en la Fig. 2.11, y r_{12}, la distancia protón-protón es justamente $2a$. El problema consiste en separar las variables en la Ec. 2.104.

Al seleccionar las coordenadas esferoidales prolatas, ξ_1, ξ_2, ξ_3, nuestro primer paso consiste en calcular los factores de escala. De las Ecs. 2.96 y 2.102,

$$h_{\xi_1} = a\left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - 1}\right)^{1/2}, \quad h_{\xi_2} = a\left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{1 - \xi_2^2}\right)^{1/2}, \tag{2.105}$$

$$h_{\xi_3} = a(\xi_1^2 - 1)^{1/2}(1 - \xi_2^2)^{1/2}$$

Utilizando estos factores de escala y la Ec. 2.18*a*, se encuentra

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left[(\xi_1^2 - 1)\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\right] + \frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left[(1 - \xi_2^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_3^2}\right\}. \tag{2.106}$$

De la Ec. 2.100

$$\frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} = \frac{e^2 2a\xi_1}{a^2(\xi_1^2 - \xi_2^2)}. \tag{2.107}$$

Mediante la sustitución de las Ecs. 2.106 y 2.107 en la Ec. 2.104 y utilizando el ahora procedimiento estándar,

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_1(\xi_1)\, f_2(\xi_2)\, f_3(\xi_3), \tag{2.108}$$

podemos aislar rápidamente la dependencia acimutal (ξ_3) para obtener

$$-\frac{\hbar^2}{2Ma^2}\left\{\frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}\frac{1}{f_1}\frac{d}{d\xi_1}\left[(\xi_1^2 - 1)\frac{df_1}{d\xi_1}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}\frac{1}{f_2}\frac{d}{d\xi_2}\left[(1 - \xi_2^2)\frac{df_2}{d\xi_2}\right]\right\} - \frac{2e^2}{a}\frac{\xi_1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)} - E'$$
$$= \frac{\hbar^2}{2Ma^2}\frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}\frac{1}{f_3}\frac{d^2 f_3}{d\xi_2^2}. \tag{2.109}$$

En este caso hemos utilizado $E' = E - e^2/r_{12}$, una constante. Igual que en las secciones 2.5 y 2.6, establecemos

$$\frac{1}{f_3}\frac{d^2 f_3}{d\xi_3^2} = -m^2. \tag{2.110}$$

La Ec. 2.109 puede simplificarse para que resulte en

$$\frac{1}{f_1}\frac{d}{d\xi_1}\left[(\xi_1^2 - 1)\frac{df_1}{d\xi_1}\right] + \frac{1}{f_2}\frac{d}{d\xi_2}\left[(1 - \xi_2^2)\frac{df_2}{d\xi_2}\right] + \frac{4Mae^2\xi_1}{\hbar^2} + \frac{2Ma^2E'}{\hbar^2}(\xi_1^2 - \xi_2^2)$$
$$= m^2\left[\frac{1}{\xi_1^2 - 1} + \frac{1}{1 - \xi_2^2}\right]. \tag{2.111}$$

Las variables ξ_1 y ξ_2 se separan por inspección, y se tiene una ecuación diferencial de segundo orden para $f_1(\xi_1)$ y otra para $f_2(\xi_2)$.

Un ejemplo del uso de las coordenadas esferoidales prolatas aparece en la Sección 12.11.

EJERCICIOS

2.10.1 Utilizando $\xi = \cosh u$, $\eta = \cos v$, demuestre que el elemento de volumen en las coordenadas esferoidales prolatas obtenido mediante la transformación directa de la siguiente igualdad

$$d\tau = a^3 (\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v) \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \, du \, dv \, d\varphi$$

es

$$d\tau = -a^3(\xi^2 - \eta^2)\, d\xi \, d\eta \, d\varphi.$$

(El signo menos debe eliminarse invirtiendo los límites de la integración sobre η.)

2.10.2 Utilizando las coordenadas esferoidales prolatas, establezca la integral de volumen que representa el volumen de una elipsoide prolata dada utilizando (a) u, v, φ y (b) ξ, η, φ. Evalúe las integrales y muestre que sus resultados son equivalentes al resultado usual proporcionado en términos de los semiejes,

$$V = \frac{4}{3}\pi a_0^2 b_0,$$

en donde a_0 es el eje semimenor y b_0 es el eje semimayor.

2.10.3 En el análisis mecánico cuántico de la molécula de hidrógeno, por medio del método de Heitler-London, se encuentra la integral

$$I_{\mathrm{HL}} = \frac{1}{\pi a_0^3}\int e^{-(r_1+r_2)/a_0}\, d\tau,$$

en donde la integral de volumen es, sobre todo, el espacio. Introduzca las coordenadas esferoidales prolatas y evalúe la integral. *Respuesta.* $I_{\mathrm{HL}} = \left(1 + \frac{2a}{a_0} + \frac{4a^2}{3a_0^2}\right)e^{-2a/a_0}$.

2.11 Coordenadas Esferoidales Oblatas (u, v, φ)

Cuando las coordenadas elípticas de la Sección 2.7 (consideradas como un conjunto bidimensional) se hacen girar alrededor del eje elíptico menor, se genera otro sistema esferoidal tridimensional, es decir el sistema coordenado esferoidal oblato. Nuevamente, φ es el ángulo acimutal. Las superficies coordenadas son las siguientes:

1. Esferoides oblatos,

$$u = \text{constante}, \qquad 0 \leqslant u < \infty.$$

2. Hiperboloides de una hoja,

$$v = \text{constante},^{1} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3. Planos medios a través del eje z,

$$\varphi = \text{constante}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Las ecuaciones de transformación que relacionan las coordenadas cartesianas pueden indicarse en la forma

$$x = a \cosh u \cos v \cos \varphi$$

$$y = a \cosh u \cos v \operatorname{sen} \varphi$$

$$z = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v.$$

Los factores de escala se transforman en

$$\begin{aligned} h_1 = h_u &= a\,(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2} \\ &= a(\cosh^2 u - \cos^2 v)^{1/2}, \\ h_2 = h_v &= a(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)^{1/2}, \\ h_3 = h_\varphi &= a \cosh u \cos v. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Ya que el hecho de conservar constante a u resulta en un esferoide oblato que constituye una buena aproximación a una superficie planetaria, este sistema coordenado ha sido de utilidad para describir el campo gravitacional de la Tierra. (J. P. Vinti, *Phys. Rev. Letters* 3, 8, 1959). Ambas coordenadas esferoidales prolatas y oblatas se utilizan en la Sección 12.11 para ilustrar las funciones de Legendre de la segunda clase.

Observe cuidadosamente que en caso de requerir φ para avanzar desde x hasta y como es usual y en caso de insistir en el orden (u, v, φ) ¡este sistema es izquierdo! Esto introducirá un (-1) total en la expresión para el

[1] Observe que v tiene un intervalo de tan solo π en contraste con el intervalo de 2π para las coordenadas cilíndricas elípticas (Sección 2.7). Los valores negativos de v generan los valores negativos de z.

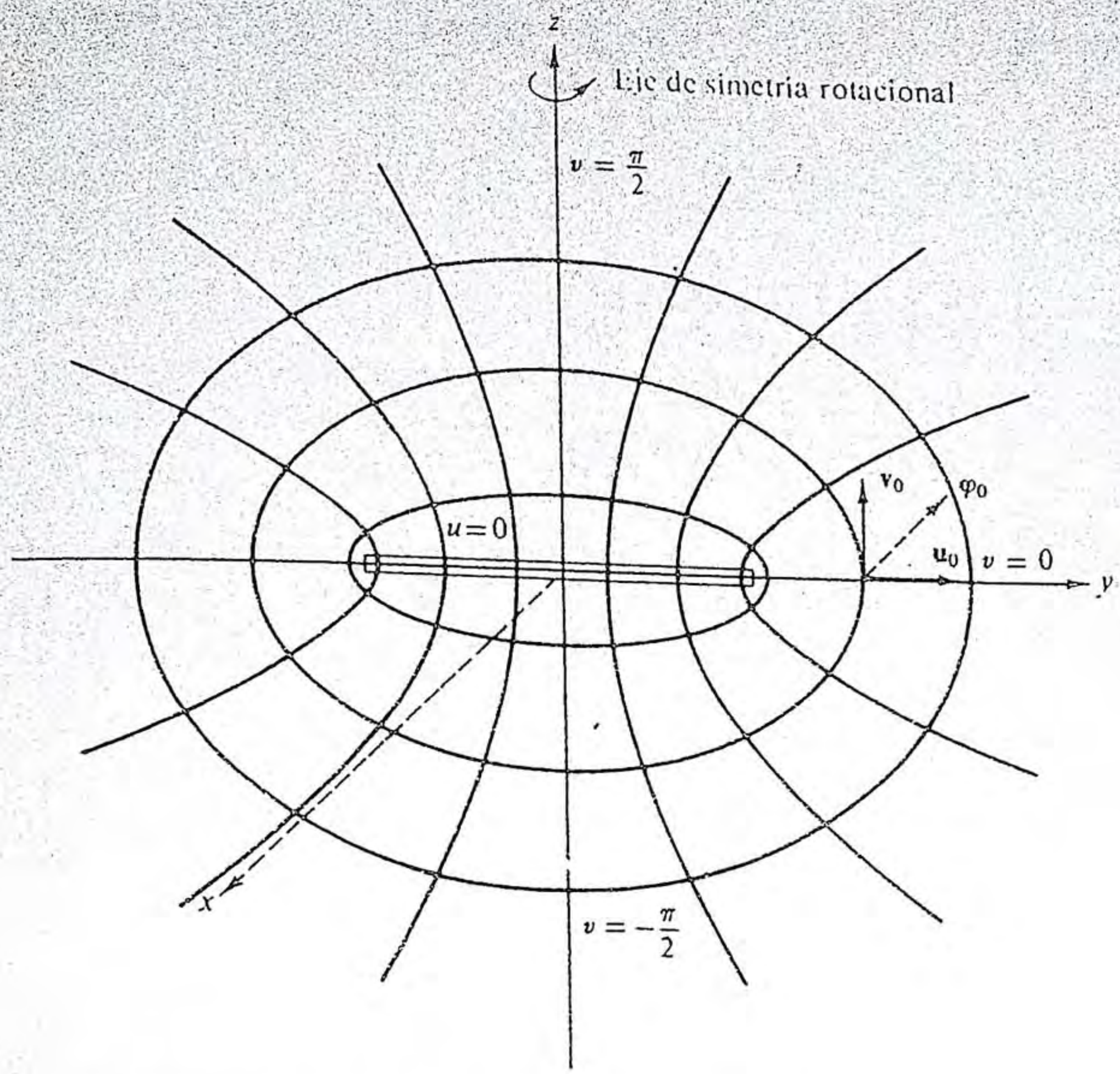


Fig. 2.12 Coordenadas esferoidales oblatas. Sección transversal

rotacional. Para volver al sistema derecho es necesario utilizar tan solo (v, u, φ),

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{u}_0 = +\boldsymbol{\varphi}_0$$

o dejar que $v \to (\pi/2) - v$ en las ecuaciones de transformación.

EJERCICIOS

2.11.1 Separe la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas. Resuelva la ecuación diferencial dependiente de φ.

2.11.2 Un disco de metal conductor delgado de radio a lleva una carga eléctrica total Q. Encuentre la capacitancia del disco y la distribución de carga sobre la superficie del disco.

$$C = 8a\varepsilon_0,$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a\sqrt{a^2 - r^2}} \quad \text{(en cada lado).}$$

2.12 Coordenadas Parabólicas (ξ, η, φ)

En la sección 2.8 se han descrito dos conjuntos de parábolas confocales ortogonales. Imagínese que consideramos el sistema mostrado en el plano xy (Fig. 2.6) y que alrededor del eje y se hace girar el eje de simetría de cada conjunto de parábolas. Esto genera dos conjuntos de paraboloides confocales ortogonales. Mediante la permutación de las coordenadas (cíclicamente) de modo que el eje de rotación sea el eje z, se tiene lo siguiente:

1. Paraboloides alrededor del eje z positivo,

$$\xi = \text{constante}, \quad 0 \leqslant \xi < \infty.$$

2. Paraboloides alrededor del eje z negativo,

$$\eta = \text{constante}, \quad 0 \leqslant \eta < \infty.$$

3. Planos medios a través del eje z,

$$\varphi = \text{constante}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Midiendo el acimutal desde el eje x en el plano xy, como es usual, se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \xi\eta \cos \varphi, \\ y &= \xi\eta \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= \tfrac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2). \end{aligned} \tag{2.113}$$

A partir de la Ec. 2.113 se encuentran los factores de escala

$$\begin{aligned} h_1 &= h_\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \\ h_2 &= h_\eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \\ h_3 &= h_\varphi = \xi\eta. \end{aligned} \tag{2.114}$$

De la Fig. 2.13, se observa que

$$\xi_0 \times \eta_0 = -\varphi_0,$$

es decir, el sistema parabólico (ξ, η, φ) proporcionado aquí es un sistema izquierdo. Las Ecs. 2.113 implican que ξ y η tienen dimensiones individuales de (longitud)$^{1/2}$. Debido a esto, algunos escritores prefieren el uso de $\xi^{1/2}$ en lugar de nuestra ξ y $\eta^{1/2}$ en lugar de nuestra η. Otros han intercambiado ξ y η.

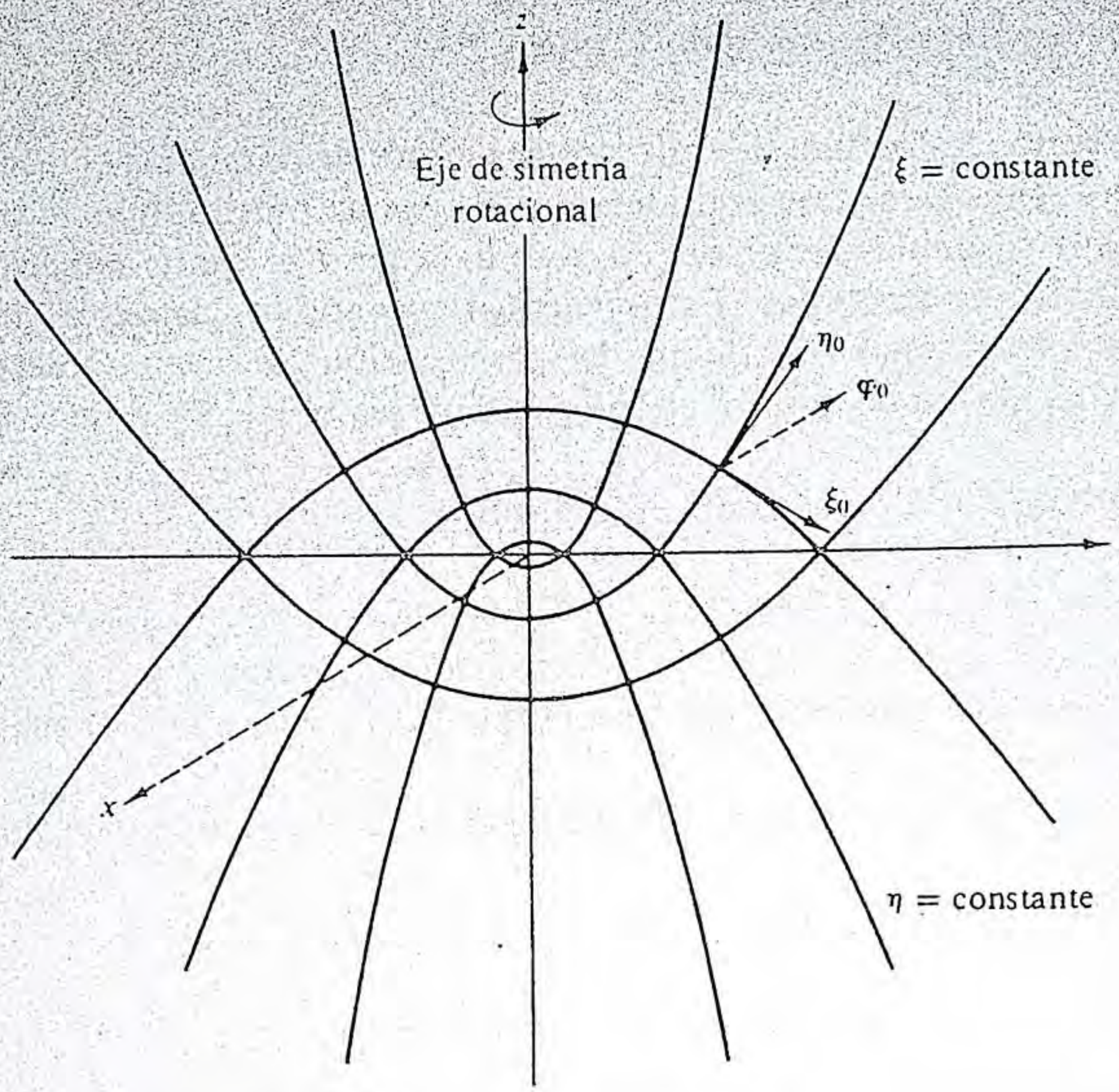


Fig. 2.13 Coordenadas parabólicas

Las coordenadas parabólicas han encontrado aplicación en el análisis del efecto de Stark,[1] es decir el desplazamiento de los niveles de energía que resulta cuando un átomo se coloca en un campo *eléctrico.*

EJEMPLO 2.12.1 EL EFECTO STARK

La presencia de un campo eléctrico externo E_0, a lo largo del eje z positivo, agrega un término de energía potencial $-eE_0z$ a la ecuación de onda de Schrödinger. Para el hidrógeno se tiene

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi - \frac{e^2}{r}\psi - eE_0z\psi = E\psi. \tag{2.115}$$

Una vez más, el problema consiste en separar las variables.

Utilizando las Ecs. 2.18*a* y 2.114, obtenemos

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\xi\eta(\xi^2+\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi\eta\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\xi\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]\right\} + \frac{1}{\xi^2\eta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \tag{2.116}$$

También se encuentra que

[1] H. A. Bethe y E. S. Salpeter. *Quantum Mechanics of One-and Two-Electron Atoms.* Nueva York; Academic Press (1957).

$$r = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}. \tag{2.117}$$

Utilizando las Ecs. 2.116, 2.117 y $\psi = f(\xi)\, g(\eta)\, \Phi(\varphi)$, la Ec. 2.115 se transforma en

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \left[\frac{1}{\xi f} \frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{df}{d\xi}\right) + \frac{1}{\eta g} \frac{d}{d\eta}\left(\eta \frac{dg}{d\eta}\right) \right]$$
$$+ \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\xi^2 \eta^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{2e^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{eE_0}{2}(\eta^2 - \xi^2) + E = 0. \tag{2.118}$$

Estableciendo

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2, \tag{2.119}$$

La Ec. 2.118 puede separarse fácilmente en dos ecuaciones:

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{\xi f} \frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{df}{d\xi}\right) - \frac{m^2}{\xi^2} \right] + E\xi^2 - \frac{eE_0 \xi^4}{2} + A = 0 \tag{2.120}$$

y

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{\eta g} \frac{d}{d\eta}\left(\eta \frac{dg}{d\eta}\right) - \frac{m^2}{\eta^2} \right] + E\eta^2 + \frac{eE_0 \eta^4}{2} + B = 0. \tag{2.121}$$

Las constantes A y B son arbitrarias, excepto en cuanto a la limitación de que $A + B = 2e^2$.

Otras aplicaciones de las coordenadas parabólicas se incluyen en los problemas.

EJERCICIOS

2.12.1 Encuentre h_ξ^2, h_η^2 y h_φ^2, si las coordenadas parabólicas (ξ, η, φ) se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos\varphi, \qquad y = \sqrt{\xi\eta} \operatorname{sen}\varphi,$$
$$z = \tfrac{1}{2}(\xi - \eta).$$

2.12.2 Utilizando las ξ, η, φ definidas en el Ejemplo 2.12.1, derive la ecuación del efecto de Stark correspondiente a la Ec. 2.120. La ecuación resultante aparece en el Ejercicio 8.4.11 (solución de series) y 13.2.12 (polinomios de Laguerre).

2.12.3 Un concepto de particular importancia en la física atómica y nuclear es la paridad, es decir la propiedad de una función de onda de ser par e impar bajo la inversión de las coordenadas. En las coordenadas cartesianas esta inversión u operador de paridad P que actúa en (x, y, z) da lugar a lo siguiente

$$P(x, y, z) = (-x, -y, -z).$$

Establezca las ecuaciones de operador correspondientes en los siguientes sistemas de coordenadas:
(a) polar esférico (r, θ, φ)
(b) cilíndrico circular (ρ, φ, z)
(c) esferoidal prolato (u, v, φ)
(d) esferoidal prolato (ξ, η, φ)
(e) esferoidal oblato (u, v, φ)
(f) parabólico (ξ, η, φ)

2.12.4 (a) La ecuación de onda para el átomo similar al hidrógeno es

$$-\frac{h^2}{2m}\nabla^2 u + Vu = Eu,$$

en donde V, la energía potencial del electrón, es

$$V = -\frac{Ze^2}{r}$$

y E es la energía total, un número. Demuestre que las variables se pueden separar mediante el uso de las coordenadas parabólicas.
(b) Demuestre que las variables también se pueden separar en las coordenadas esferoidales prolatas con el núcleo en uno de los focos.

2.13 Coordenadas Toroidales (ξ, η, φ)

Este sistema se forma mediante la rotación del plano xy del sistema bipolar (Sección 2.9) alrededor del eje y de la Fig. 2.7. Los círculos centrados en el eje y (ξ = constante) dan lugar a esferas, mientras que los círculos centrados en el eje x (η = constante) originan toroides. Mediante la rerrotulación de las coordenadas de modo que el eje de rotación sea nuevamente el eje z, las ecuaciones de transformación son

$$x = \frac{a \operatorname{senh}\eta \cos\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi},$$
$$y = \frac{a \operatorname{senh}\eta \operatorname{sen}\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi}, \tag{2.122}$$
$$z = \frac{a \operatorname{sen}\xi}{\cosh\eta - \cos\xi}.$$

A partir de estas ecuaciones, los factores de escala son

$$h_1 = h_\xi = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi},$$
$$h_2 = h_\eta = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}, \tag{2.123}$$
$$h_3 = h_\varphi = \frac{a \operatorname{senh}\eta}{\cosh\eta - \cos\xi}.$$

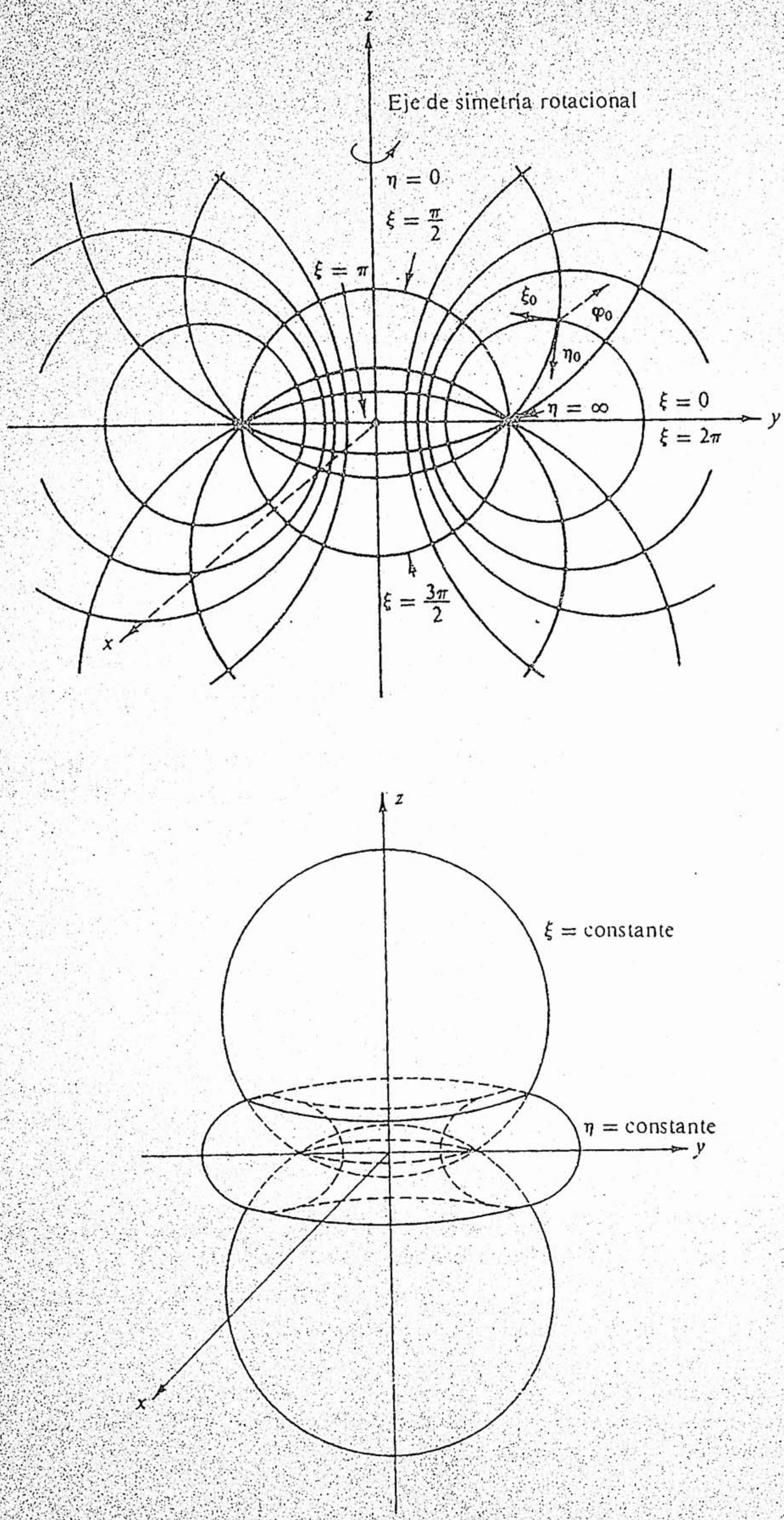


Fig. 2.14 Coordenadas toroidales (*arriba*). Sección transversal (*abajo*).

Las superficies coordenadas formadas por la rotación son las siguientes:

1. Esferas centradas en $(0, 0, \cot \xi)$ con radio $a|\csc \xi|$,

$$\xi = \text{constante}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi.$$

$$2az \cot \xi = x^2 + y^2 + z^2 - a^2. \tag{2.124}$$

2. Toroides,

$$\eta = \text{constante}, \quad 0 \leqslant \eta < \infty.$$

Las secciones transversales son círculos desplazados a la distancia $a \coth \eta$ del eje z y de radio $a \operatorname{csch} \eta$,

$$4a^2(x^2 + y^2) \coth^2 \eta = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2. \tag{2.125}$$

3. Medios planos a través del eje z,

$$\varphi = \text{constante}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

La ecuación de Laplace no puede separarse completamente en las coordenadas toroidales. Este sistema coordenado tiene algunas aplicaciones (tales como en la descripción de los anillos de vértice), pero estas son poco usuales y el sistema se utiliza raramente.

Nuevamente, como en las dos secciones anteriores, observe que (ξ, η, φ) origina un conjunto izquierdo. Para transformarlo a un sistema derecho, probablemente la forma más sencilla consiste en considerar las coordenadas en el orden (η, ξ, φ).

EJERCICIOS

2.13.1 Demuestre que el área superficial de un toroide definido por la Fig. 2.15 es $(2\pi a) \times (2\pi b) = 4\pi^2 ab$.

2.13.2 Como etapa en la resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas toroidales, suponga que el potencial $\psi(\xi, \eta, \varphi)$ tiene la forma

$$\psi(\xi, \eta, \varphi) = \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi}\, X(\xi) N(\eta) \Phi(\varphi).$$

Suponga también que (a) $X(\xi) = \operatorname{sen} n\xi, \cos n\xi$, (b) $\Phi(\varphi) = \operatorname{sen} m\varphi, \cos m\varphi$, con n y m números enteros. ¿Cuál es la base para estas formas para $X(\xi)$ y $\Phi(\varphi)$? Demuestre que la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{\operatorname{senh} \eta} \frac{d}{d\eta}\left[\operatorname{senh} \eta \frac{dN}{d\eta}\right] - \frac{m^2}{\operatorname{senh}^2 \eta} N - (n^2 - \tfrac{1}{4})N = 0.$$

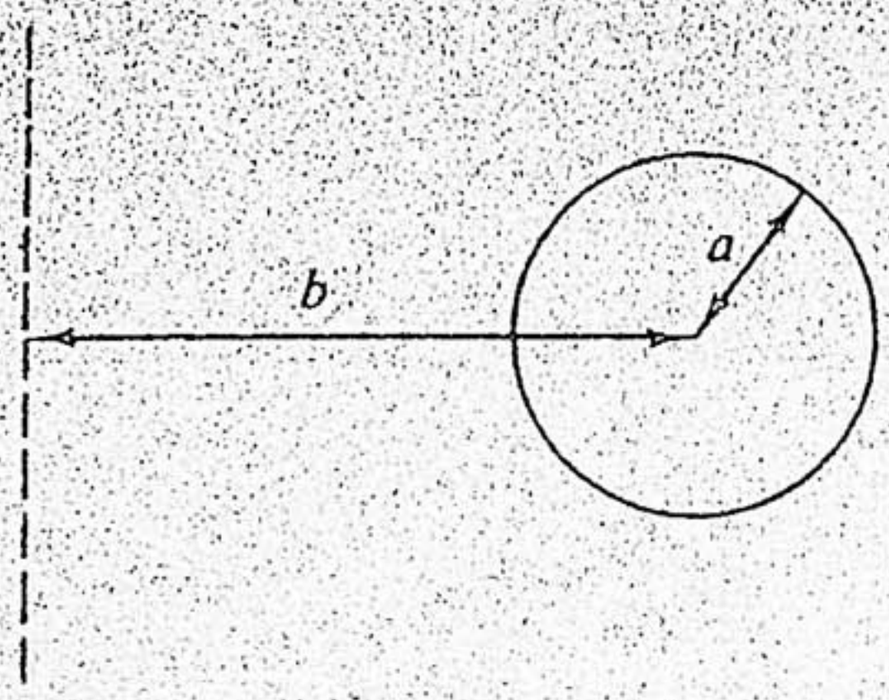


FIG. 2.15

2.14 Coordenadas Biesféricas (ξ, η, φ)

Regresando a las coordenadas bipolares de la Sección 2.9, la rotación del plano xy mostrado en la Fig. 2.7 alrededor del eje x origina dos familias de esferas de intersección ortogonal. Sumando los planos de acimutal constante, se tiene el sistema biesférico con las ecuaciones de transformación:

$$x = \frac{a \operatorname{sen}\xi \cos\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi},$$

$$y = \frac{a \operatorname{sen}\xi \operatorname{sen}\varphi}{\cosh\eta - \cos\xi}, \tag{2.126}$$

$$z = \frac{a \operatorname{senh}\eta}{\cosh\eta - \cos\xi}.$$

Una vez más, el eje de rotación ha sido rerrotulado eje z. Los factores de escala se transforman en

$$h_1 = h_\xi = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi},$$

$$h_2 = h_\eta = \frac{a}{\cosh\eta - \cos\xi}, \tag{2.127}$$

$$h_3 = h_\varphi = \frac{a \operatorname{sen}\xi}{\cosh\eta - \cos\xi}.$$

Las superficies coordenadas son las siguientes:

1. Una superficie de revolución de cuarto orden alrededor del eje z,

$\xi =$ constante, $\quad 0 < \xi < \frac{\pi}{2}$, "ondulaciones" en el eje z

$\xi = \frac{\pi}{2}$, esfera

$\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$, cúspides en el eje z

2. Esferas de radio $a|\operatorname{csch}\eta|$ centradas en $(0, 0, a \coth \eta)$,

$$\eta = \text{constante}, \quad -\infty < \eta < \infty.$$

3. Planos medios a través del eje z,

$$\varphi = \text{constante}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

La ecuación de Laplace puede separarse parcialmente en este sistema, aun cuando la ecuación general (2.1), $k^2 \neq 0$, no puede separarse. El sistema coordenado biesférico tiene utilidad en los problemas de electrostática especializados, tales como la capacitancia entre una esfera conductora y un plano conductor vecino (cf. Ejercicio 2.14.1).

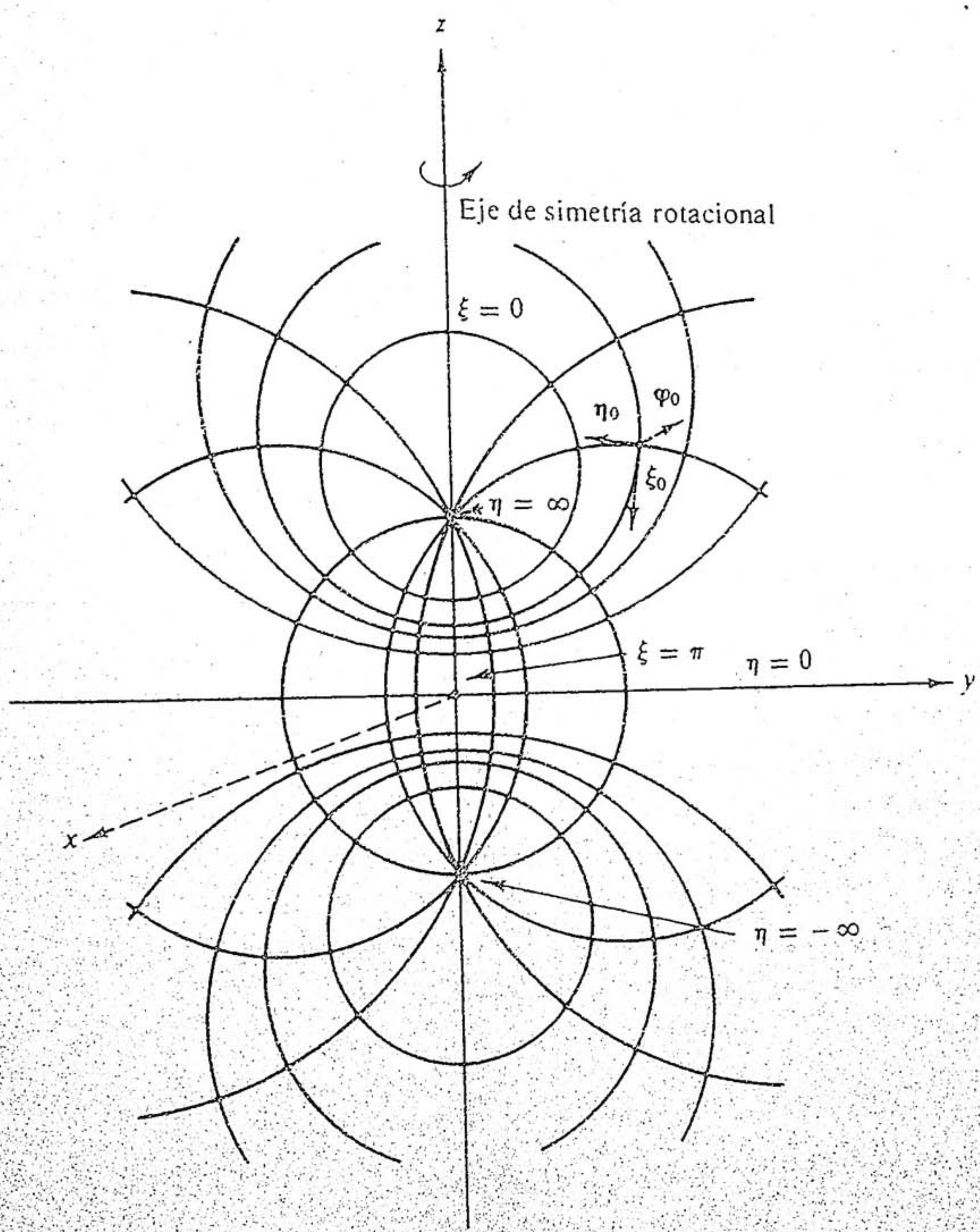


Fig. 2.16 Coordenadas biesféricas

EJERCICIOS

2.14.1 Demuestre que la ecuación de Laplace puede separarse en coordenadas biesféricas (a un factor

$$\sqrt{\cosh\eta - \cos\xi}\,).$$

Sugerencia: Sea $\psi(\xi, \eta, \varphi) = \sqrt{\cosh\eta - \cos\xi}\, X(\xi)N(\eta)\Phi(\varphi)$.

2.14.2 Utilizando las coordenadas biesféricas, encuentre la capacitancia entre una esfera conductora y un plano conductor (que no interseca).

2.15 Coordenadas Elipsoidales Confocales (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

Este sistema coordenado bastante general tiene las siguientes tres familias de superficies coordenadas:

1. Elipsoides (ninguno de los dos ejes son iguales), $\xi_1 =$ constante,

$$\frac{x^2}{a^2 - \xi_1} + \frac{y^2}{b^2 - \xi_1} + \frac{z^2}{c^2 - \xi_1} = 1. \tag{2.128}$$

2. Hiperboloides de una hoja, $\xi_2 =$ constante,

$$\frac{x^2}{a^2 - \xi_2} + \frac{y^2}{b^2 - \xi_2} - \frac{z^2}{\xi_2 - c^2} = 1. \tag{2.129}$$

3. Hiperboloides de dos hojas, $\xi_3 =$ constante,

$$\frac{x^2}{a^2 - \xi_3} - \frac{y^2}{\xi_3 - b^2} - \frac{z^2}{\xi_3 - c^2} = 1. \tag{2.130}$$

Las constantes a, b, c son parámetros que describen los elipsoides e hiperboloides sujetos a las limitaciones

$$a^2 > \xi_3 > b^2 > \xi_2 > c^2 > \xi_1. \tag{2.131}$$

En las Ecs. 2.128, 2.129 y 2.130, el signo menos resultante de estas limitaciones se ha demostrado explícitamente.

Las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 - \xi_1)(a^2 - \xi_2)(a^2 - \xi_3)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2 - \xi_1)(b^2 - \xi_2)(\xi_3 - b^2)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2 - \xi_1)(\xi_2 - c^2)(\xi_3 - c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Después de aplicar una cantidad excesiva de álgebra, se encuentra que los factores de escala son

$$h_1 = h_{\xi_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)}{(a^2 - \xi_1)(b^2 - \xi_1)(c^2 - \xi_1)}\right]^{1/2}$$

$$h_2 = h_{\xi_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_1)}{(a^2 - \xi_2)(b^2 - \xi_2)(c^2 - \xi_2)}\right]^{1/2} \tag{2.133}$$

$$h_3 = h_{\xi_3} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}{(a^2 - \xi_3)(\xi_3 - b^2)(\xi_3 - c^2)}\right]^{1/2}$$

Igual que en las ecuaciones de las superficies coordenadas, la simetría de este conjunto ha sido sacrificada al requerir que cada factor sea positivo.

De las ecuaciones de transformación (2.132), es de observarse que cierto punto $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ corresponde a ocho puntos posibles $(\pm x, \pm y, \pm z)$, en que las coordenadas cartesianas aparecen como cuadrados. La multiplicidad con un factor de ocho puede resolverse al introducir una convención de signo apropiada para ξ_1, ξ_2 y ξ_3 o al implantar las funciones elípticas o funciones relacionadas.

Aun cuando este sistema coordenado ha sido de utilidad en los problemas de la física matemática, su excesiva generalidad lo hace incómodo y dificultoso en cuanto a su uso. Ya que se pretende que este texto constituya una introducción, nos limitaremos a las elipsoides con ejes de simetría rotacional.

2.16 Coordenadas Cónicas (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

Esta es una de las formas degeneradas más extrañas (y de menos utilidad) del sistema coordenado elipsoidal confocal de la sección anterior. Las superficies coordenadas son las siguientes:

1. Esferas centradas en el origen, radio ξ_1, ξ_1 = constante,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi_1^2. \tag{2.134}$$

2. Conos de sección transversal elíptica con vértices en el origen y ejes a lo largo del eje z, ξ_2 = constante,

$$\frac{x^2}{\xi_2^2} + \frac{y^2}{\xi_2^2 - b^2} = \frac{z^2}{c^2 - \xi_2^2}. \tag{2.135}$$

3. Conos elípticos, vértices en el origen, ejes a lo largo del eje x, ξ_3 = constante,

$$\frac{x^2}{\xi_3^2} = \frac{y^2}{b^2 - \xi_3^2} + \frac{z^2}{c^2 - \xi_3^2}. \tag{2.136}$$

Igual que en la Sección 2.15, los parámetros b y c satisfacen las limitaciones

$$c^2 > \xi_2^2 > b^2 > \xi_3^2. \tag{2.137}$$

Invirtiendo el conjunto de Ec. (2.134), (2.135) y (2.136), se obtienen las ecuaciones de transformación

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{bc}\right)^2, \\ y^2 &= \frac{\xi_1^2(\xi_2^2 - b^2)(b^2 - \xi_3^2)}{b^2(c^2 - b^2)}, \\ z^2 &= \frac{\xi_1^2(c^2 - \xi_2^2)(c^2 - \xi_3^2)}{c^2(c^2 - b^2)} \end{aligned} \tag{2.138}$$

Luego, mediante la Ec. 2.6, los factores de escala son

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{\xi_1} = 1, \\ h_2 &= h_{\xi_2} = \left[\frac{\xi_1^2(\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(\xi_2^2 - b^2)(c^2 - \xi_2^2)}\right]^{1/2} \\ h_3 &= h_{\xi_3} = \left[\frac{\xi_1^2(\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(b^2 - \xi_3^2)(c^2 - \xi_3^2)}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{2.139}$$

Este sistema coordenado verdaderamente peculiar ha sido casi completamente ignorado. Sin embargo, recientemente se ha encontrado que es de utilidad para describir las funciones propias de momento angular de un rotor asimétrico.[1]

2.17 Coordenadas Parabólicas Confocales (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

Excepto por los sistemas coordenados bipolar, toroidal y biesférico, todos los sistemas coordenados en este capítulo pueden derivarse de las coordenadas elipsoidales confocales (Sección 2.15). El último de estos sistemas degenerados o especiales es el sistema paraboidal confocal. En este caso, las superficies coordenadas son las siguientes:

1. Paraboloides confocales de sección transveral elíptica que se extienden a lo largo del eje z negativo, ξ_1 = constante,

$$\frac{x^2}{a^2 - \xi_1} + \frac{y^2}{b^2 - \xi_1} + 2z + \xi_1 = 0. \tag{2.140}$$

2. Paraboloides hiperbólicos, ξ_2 = constante,

[1] R. D. Spence, *Am. J. Phys.* 27, 329 (1959).

$$\frac{x^2}{a^2-\xi_2}-\frac{y^2}{\xi_2-b^2}+2z+\xi_2=0. \tag{2.141}$$

3. Paraboloides confocales de sección transversal elíptica que se extiende a lo largo del eje z positivo, $\xi_3 =$ constante,

$$\frac{x^2}{\xi_3-a^2}+\frac{y^2}{\xi_3-b^2}-2z-\xi_3=0. \tag{2.142}$$

Igual que en las Secciones 2.15 y 2.16, existen limitaciones en los parámetros y variables

$$\xi_3 > a^2 > \xi_2 > b^2 > \xi_1. \tag{2.143}$$

Las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2-\xi_1)(a^2-\xi_2)(\xi_3-a^2)}{a^2-b^2}, \\ y^2 &= \frac{(b^2-\xi_1)(\xi_2-b^2)(\xi_3-b^2)}{a^2-b^2}, \\ z &= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-\xi_1-\xi_2-\xi_3) \end{aligned} \tag{2.144}$$

con los factores de escala resultantes

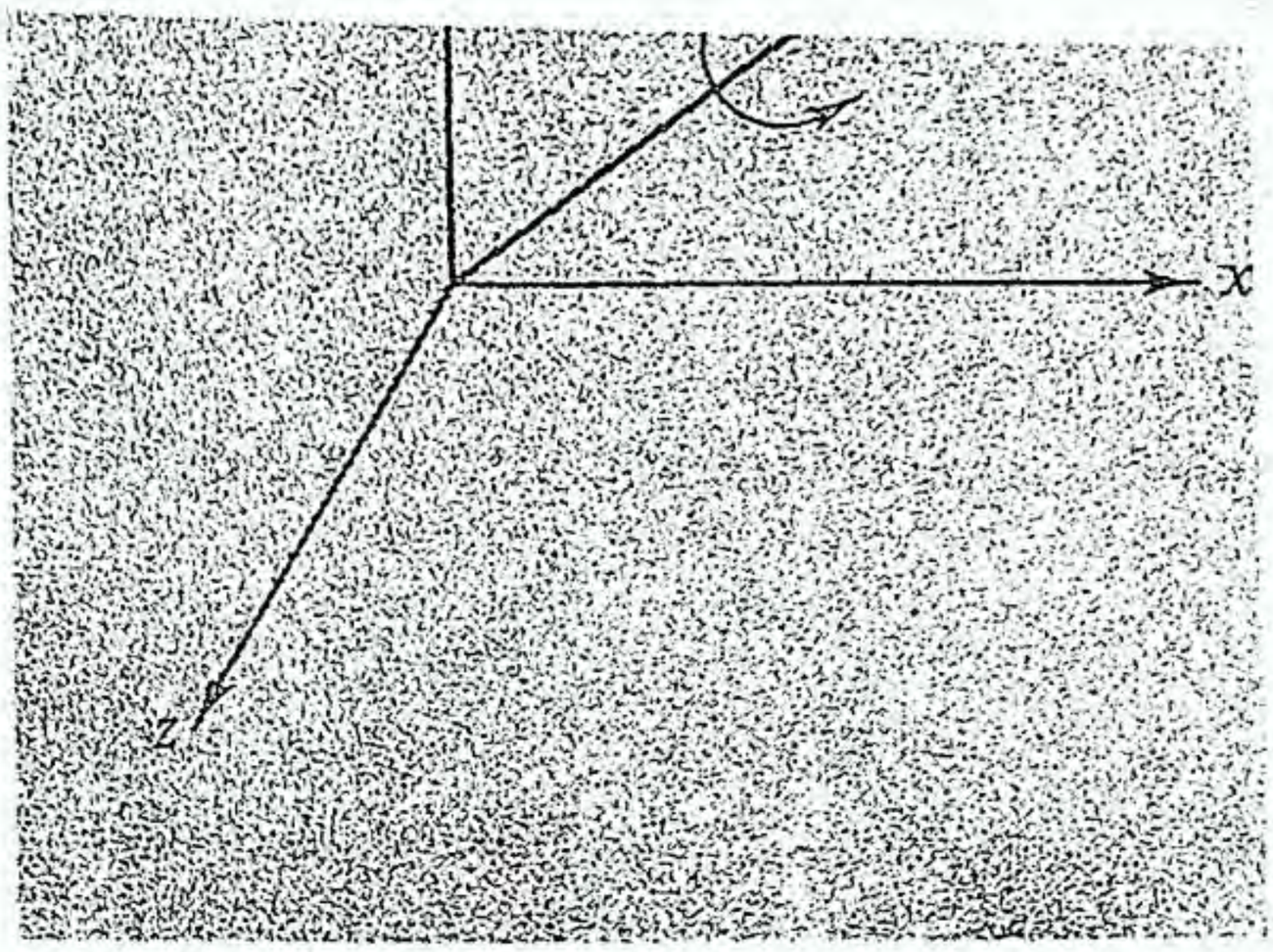
$$\begin{aligned} h_1 = h_{\xi_1} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)}{(a^2-\xi_1)(b^2-\xi_1)}\right]^{1/2} \\ h_2 = h_{\xi_2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3-\xi_2)(\xi_2-\xi_1)}{(a^2-\xi_2)(\xi_2-b^2)}\right]^{1/2} \\ h_3 = h_{\xi_3} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)}{(\xi_3-a^2)(\xi_3-b^2)}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{2.145}$$

Las aplicaciones de este sistema se han desarrollado en la teoría electromagnética,[1] pero dentro del campo de este texto dicho sistema es de poco interés.

REFERENCIAS

MORSE, P. M. y H. FESHBACH. *Methods of Theoretical Physics.* Nueva York: McGraw-Hill (1953). El Capítulo 5 incluye una descripción de los sistemas coordenados que se presentan aquí. Observe cuidadosamente que Morse y Feshbach no utilizan los sistemas coordenados izquierdos aun para las coordenadas cartesianas. En todas las partes de este excelente (y difícil) libro se encuentran muchos ejemplos sobre el uso de los diversos sistemas coordenados en la resolución de problemas.

[1] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism,* Vol. I, 3a. ed., Oxford: Oxford University Press (1904), Capítulo X.



CAPITULO 3

ANÁLISIS DE TENSORES

3.1 Introducción, Definiciones

Los tensores son de gran importancia en muchas áreas de la física, incluyendo la relatividad general y la teoría electromagnética. Una de las fuentes más prolíficas de cantidades tensoriales es el sólido anisotrópico. Aquí, las propiedades elásticas, ópticas, eléctricas y magnéticas pueden implicar a los tensores. Las propiedades elásticas del sólido anisotrópico se consideran con cierto detalle en la Sección 3.6. Como ilustración introductoria, consideremos el flujo de una corriente eléctrica. Podemos establecer la ley de Ohm en la forma usual

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \tag{3.1}$$

con la densidad de corriente $\mathbf{J}$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}$, ambas cantidades vectoriales.[1] Si se tiene un medio isotrópico, σ, la conductividad, es un escalar, y para el componente x, por ejemplo,

$$J_1 = \sigma E_1. \tag{3.2}$$

Sin embargo, si nuestro medio es anisotrópico, igual que en muchos cristales, o un plasma en presencia de un campo magnético, la densidad de corriente en la dirección x puede depender de los campos eléctricos en las direcciones y y z así como del campo en la dirección x. Suponiendo una relación lineal, debemos sustituir la Ec. 3.2 con

$$J_1 = \sigma_{11} E_1 + \sigma_{12} E_2 + \sigma_{13} E_3, \tag{3.3}$$

[1] Otro ejemplo de este tipo de ecuación física aparece en la Sección 4.6.

y, en general,

$$J_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k . \tag{3.4}$$

Para el espacio ordinario tridimensional, la conductividad escalar σ ha dado lugar a un conjunto de nueve elementos, σ_{ik}.

$$\sigma \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Este arreglo de nueve elementos forma de hecho un tensor, tal como se demuestra en la Sección 3.3.

En el Capítulo 1, una cantidad que permanecía sin cambiar bajo las rotaciones del sistema coordenado, es decir una cantidad invariante, se denominó escalar. Una cantidad cuyos componentes transformados como son aquellos de la distancia de un punto desde un origen seleccionado (Ec. 1.13, Sección 1.2) se denominó vector. Esta propiedad de transformación fue adoptada como la característica que define a un vector. Probablemente existe una ambigüedad en esta definición (Ec. 3.6),

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j , \tag{3.6}$$

en donde a_{ij} es el coseno del ángulo entre el eje x'_i y el eje x_j.

Si empezamos con nuestro vector prototipo **r**, entonces

$$x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} x_j \tag{3.7}$$

mediante diferenciación parcial. Si establecemos

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}, \tag{3.8}$$

las Ecs. 3.6 y 3.7 son consistentes. Cualquier conjunto de cantidades A_j que se transformen de acuerdo con

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j \tag{3.9}$$

se definen como vector contravariante.

Sin embargo, ya hemos encontrado un tipo ligeramente diferente de transformación vectorial. El gradiente de un escalar, $\nabla\varphi$, definido por

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \tag{3.10}$$

(utilizando x_1, x_2, x_3 para x, y, z), se transforma en

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}, \tag{3.11}$$

utilizando $\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi(x', y', z') = \varphi'$, en donde φ está definida como una cantidad escalar. Observe que esto difiere de la Ec. 3.9 en cuanto a que tenemos $\partial x_j/\partial x'_i$ en lugar de $\partial x'_i/\partial x_j$. La Ec. 3.11 se considera como definición de vector covariante con el gradiente como prototipo.

En coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = a_{ij}, \tag{3.12}$$

y no existe diferencia entre las transformaciones contravariante y covariante. En otros sistemas, la Ec. 3.12 en general no tiene aplicación y la distinción entre contravariante y covariante es verdadera y debe considerarse. En el resto de esta sección, los componentes de un vector contravariante se denotan por el subíndice A^i, mientras que para los componentes del vector covariante el subíndice es A_i.

Para eliminar parte del misterio y temor hacia el término tensor, volvamos a bautizar al escalar como tensor con intervalo cero y volvamos a rotular un vector como tensor de primera clase. Luego procederemos a definir los tensores contravariante, mezclado y covariante de segunda clase mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} A'^{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}, \\ B'^{i}{}_{j} &= \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B^{k}{}_{l}, \\ C'_{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} C_{kl}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Se puede observar que A^{kl} es contravariante con respecto a ambos índices, C_{kl} es covariante con respecto a ambos índices, y $B^k{}_l$ se transforma contravariantemente con respecto al primer índice k pero covariantemente con respecto al segundo índice l. Una vez más, si utilizamos coordenadas cartesianas, las tres formas de tensores de segunda clase, contravariante, mezclada y covariante, son iguales.

El tensor $\mathbf{A}$ de segunda clase (componentes A^{kl}) puede representarse convenientemente al establecer sus componentes en un arreglo cuadrado (3×3 en caso de considerar el espacio tridimensional)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Esto no significa que cualquier arreglo cuadrado de números o funciones forme un tensor. La condición esencial es que los componentes se transformen de acuerdo con la Ec. 3.13.

Este requisito de transformación se puede ilustrar mediante el examen en detalle del tensor bidimensional

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & xy \end{pmatrix}.$$

En un sistema coordenado imprimado (rotado), el componente $T^{11'}$ debe ser $-x'y'$ tal como se ha descrito en la Sección 1.2 para los vectores. Procediendo exactamente como en la Sección 1.2, procedemos a comprobar para determinar si esto es consistente con la ecuación de definición, la Ec. 3.13

$$\begin{aligned} T^{11'} = -x'y' &\stackrel{?}{=} \sum_{kl} \frac{\partial x'_1}{\partial x_k} \frac{\partial x'_1}{\partial x_l} T^{kl} \\ &= \sum_{kl} a_{1k} a_{1l} T^{kl}, \end{aligned}$$

estableciendo que i y j sean iguales a 1. Procedemos a transformar el lado izquierdo en coordenadas sin imprimar mediante la Ec. 3.7 o la 1.8. Luego, con $a_{11} = \cos\theta$ y $a_{12} = \operatorname{sen}\theta$, y los valores dados para T^{kl}, se obtiene

$$\begin{aligned} &-(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)(-x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) \\ &\stackrel{?}{=} \cos^2\theta T^{11} + \cos\theta\operatorname{sen}\theta T^{12} + \operatorname{sen}\theta\cos\theta T^{21} + \operatorname{sen}^2\theta T^{22} \\ &= -xy\cos^2\theta - y^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + x^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + xy\operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned}$$

Tenemos una identidad mediante la cual se muestra que la Ec. 3.13 se satisface (para $T^{11'}$). La repetición de los otros tres componentes verifica que todas se transforman de acuerdo con la Ec. 3.13 y que, consecuentemente, $\mathbf{T}$ es un tensor de segunda clase.

Esta propiedad de transformación no es algo que deba considerarse como garantizado. Por ejemplo, si se cambia un signo algebraico, si T^{22} fuera $-xy$ en lugar de $+xy$, entonces

$$T^{11'} \neq \sum_{kl} a_{1k} a_{1l} T^{kl}$$

y el arreglo

$$\begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & -xy \end{pmatrix}$$

no es un tensor. Esto se debe a que no contiene las propiedades de transformación requeridas.

La suma y resta de tensores se define en términos de los elementos individuales igual que para el caso de los vectores. Para sumar o restar dos tensores, los elementos correspondientes se suman o se restan. Si

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \tag{3.15}$$

entonces

$$A^{ij} + B^{ij} = C^{ij}.$$

Evidentemente, **A** y **B** deben ser tensores de la misma clase y ambos expresados en un espacio del mismo número de dimensiones.

En el análisis de tensores es costumbre adoptar una convención de suma para establecer la Ec. 3.13 y las ecuaciones subsecuentes de tensor en una forma más compacta (y, para el estudiante principiante, más compleja). Mientras se tenga la posibilidad de distinguir entre la contravariancia y la covariancia, podemos aceptar que cuando aparece un índice en un lado de una ecuación, una vez como sobreíndice y otra como subíndice, automáticamente se suma sobre tal índice. Luego podemos escribir la segunda expresión de la Ec. 3.13 en la forma

$$B'^{i}{}_{j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B^k_l; \tag{3.16}$$

en donde queda implicada la suma del lado derecho sobre k y l. Esta representa la convención de suma.

Para ilustrar el uso de la convención de suma y algunas de las técnicas del análisis de tensores, podemos proceder a demostrar que la ahora familiar delta de Kronecker δ_{kl}, es verdaderamente un tensor mixto de segunda clase, δ^k_l. La pregunta es, ¿se transforma δ^k_l de acuerdo con la Ec. 3,13? Este es nuestro criterio para denominarlo tensor. Se tiene, utilizando la convención de suma,

$$\delta^k_l \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \tag{3.17}$$

mediante definición de la delta de Kronecker. Ahora

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} \tag{3.18}$$

por medio de la diferenciación parcial directa del lado derecho. Sin embargo, x'_i y x'_j son coordenadas independientes y consecuentemente la variación de una con respecto a la otra debe ser cero en caso de ser diferentes, unidad si coinciden; es decir,

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} = \delta'^{i}_{j} \tag{3.19}$$

En consecuencia,

$$\delta'^{i}_{j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j}\delta^k_l,$$

demostrando que δ^k_l son de hecho los componentes de un tensor mixto de segunda clase. La delta de Kronecker tiene otra propiedad interesante. Tiene los mismos componentes en los cuatro sistemas coordenados rotados y, consecuentemente, se denomina isotrópica. En la Sección 3.4 se dará a conocer un tensor isotrópico de tercera clase y los tensores isotrópicos de cuarta clase. No existe ningún tensor (vector) de primera clase.

El orden en que aparecen los índices en nuestra descripción del tensor es importante. En general, A^{mn} es independiente de A^{nm}, pero existen algunos casos de especial interés. Si

$$A^{mn} = A^{nm}, \tag{3.20}$$

se dice que el tensor es simétrico. Alternativamente, si

$$A^{mn} = -A^{nm}, \tag{3.21}$$

se dice que el tensor es antisimétrico. Es evidente que cada tensor (segunda clase) se puede resolver en las partes simétrica y antisimétrica por medio de la identidad

$$A^{mn} = \tfrac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \tfrac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm}), \tag{3.22}$$

en donde el primer término a la derecha es un tensor simétrico y el segundo es un tensor antisimétrico. Esta resolución en tensores simétrico y antisimétrico vuelve a aparecer en la teoría de la elasticidad (Sección 3.6). Una resolución similar de funciones en las partes simétrica y antisimétrica es de suma importancia para la mecánica cuántica.

EJERCICIOS

3.1.1 (a) Demuestre que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$$

son tensores.

(b) Demuestre que

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} xy & y^2 \\ x^2 & -xy \end{pmatrix}$$

no son tensores.

3.1.2 Los componentes del tensor **A** son iguales a los componentes correspondientes del tensor **B** en un sistema coordenado particular, es decir

$$A^0_{ij} = B^0_{ij}$$

Demuestre que el tensor **A** es igual al tensor **B**, $A_{ij} = B_{ij}$, en *todos* los sistemas coordenados.

3.1.3 Demuestre que si los componentes de cualquier tensor de cualquier clase desaparecen en un sistema coordenado particular, desaparecen en todos los sistemas coordenados. *Nota.* Este aspecto es de especial importancia en el espacio curvado de cuatro dimensiones de la relatividad general. Si una cantidad, expresada como tensor, existe en un sistema coordenado, existe en todos los sistemas coordenados y no es tan solo una consecuencia de la *selección* del sistema coordenado (a diferencia de como sucede en las fuerzas de Coriolis y centrífugas de la mecánica newtoniana).

3.1.4 Los primeros tres componentes de un vector de cuatro dimensiones desaparecen en cada una de dos estructuras de referencia. Si la segunda estructura de referencia no es simplemente una rotación de la primera alrededor del eje x_4, es decir si al menos uno de los coeficientes $a_{i4}(i = 1, 2, 3) \neq 0$, demuestre que el cuarto componente desaparece en todas las estructuras de referencia.
Traducido a la mecánica relativista, esto significa que si el momento se conserva en dos estructuras de Lorentz, entonces la energía se conserva en todas las estructuras de Lorentz.

3.1.5 A partir del análisis del comportamiento de un tensor general de segunda clase bajo las rotaciones de 90° y 180° alrededor de los ejes coordenados, demuestre que el tensor *isotrópico* de segunda clase debe tener una amplitud de δ_{ij}.

3.1.6 El tensor de curvatura de Riemann-Cristoffel de cuarta clase y cuatro dimensiones de la relatividad general, R_{iklm}, satisface las relaciones de simetría

$$R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm}$$

Considerando que los índices van de 1 a 4, demuestre que el número de componentes independientes se reduce de 256 a 36 y que la condición

$$R_{iklm} = R_{lmik}$$

reduce adicionalmente el número de componentes independientes hasta 21. Finalmente, si los componentes satisfacen la identidad $R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0$, demuestre que el número de componentes independientes se reduce a 20. *Nota.* La identidad final de tres términos proporciona nueva información solamente si los cuatro índices son diferentes. Luego reduce el número de componentes independientes en un tercio.

3.1.7 T_{iklm} es antisimétrico con respecto a todos los pares de índices. ¿Cuántos componentes independientes tiene (espacio tridimensional)?

3.2 Contracción, Producto Directo

Cuando se trata de vectores, hemos formado el producto escalar (Sección 1.3) mediante la suma de los productos de los componentes correspondientes:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \qquad \text{(convención de suma).} \tag{3.23}$$

La generalización de esta expresión en el análisis de tensores es un proceso conocido como contracción. Dos índices, uno covariante y el otro contravariante, se hacen equivaler entre sí y luego (tal como se implica con la convención de suma), procedemos a sumar sobre este índice repetido. Por ejemplo, procedamos a la contracción del tensor mixto de segunda clase $B'^i{}_j$.

$$\begin{aligned} B'^i{}_j \to B'^i{}_i &= \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_i} B^k_l \\ &= \frac{\partial x_l}{\partial x_k} B^k_l \end{aligned} \tag{3.24}$$

mediante la Ec. 3.18 y luego con la Ec. 3.19:

$$B'^i{}_i = \delta^l_k B^k_l = B^k_k. \tag{3.25}$$

Nuestro tensor mixto de segunda clase contraído es invariante y en consecuencia escalar.[1] Esto es exactamente lo que hemos obtenido en la Sección 1.3 para el producto de dos vectores y en la Sección 1.7 para la divergencia de un vector. En general, la operación de contracción reduce el rango o clase de un tensor en dos.

Los componentes de un vector covariante (tensor de primera clase) a_i y los de un vector contravariante (tensor de primera clase) b^j pueden multiplicarse componente por componente para dar lugar al término general $a_i b^j$. Esto, mediante la Ec. 3.13, realmente constituye un tensor de segunda clase, para

$$a'_i b'^j = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} a_k \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} b^l$$

$$= \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} (a_k b^l). \tag{3.26}$$

Mediante la contracción

$$a'_i b'^i = a_k b^k, \tag{3.27}$$

como en el caso de las Ecs. 3.24 y 3.25 para dar lugar al producto escalar normal.

La operación de unir dos vectores a_i y b^j como en el último párrafo se conoce como la formación de un producto directo. Para el caso de dos vectores, el producto directo es un tensor de segunda clase. En este sentido, podemos dar un significado a $\nabla\mathbf{E}$, que no fue definido dentro de la estructura del análisis vectorial. En general, el producto directo de dos tensores es un tensor de clase igual a la suma de las dos clases iniciales, es decir

$$A^i_j B^{kl} = C^{ikl}_j, \tag{3.28}$$

en donde C^{ikl}_j es un tensor de cuarta clase.

Hasta ahora se ha conservado una distinción entre una transformación covariante y la transformación contravariante debido a que existe en el espacio no cartesiano y debido a que es de gran importancia en la relatividad general. En este momento, tal vez sería conveniente para el estudiante interesado en la relatividad general, que consulte los variados y excelentes textos especializados en tal campo, y que nos limitemos en el resto de este capítulo a los sistemas coordenados cartesianos. Tal como se ha mencionado en la Sección 3.1, la distinción entre la contravariancia y la covariancia desaparece y todos los índices aparecen desde ahora como subíndices. Volvemos a establecer la convención de suma y la operación de la contracción.

Convención de Suma. Cuando un subíndice (letra, no número) aparece dos veces en un lado de una ecuación, queda implicada la suma con respecto a tal subíndice.

[1] En el análisis de matrices, este escalar es la *traza* de la matriz, Sección 4.2.

Contracción. La contracción consiste en [illegible] diferentes (subíndices) sean iguales entre sí y luego sumar de acuerdo con lo implicado por la convención de suma.

EJERCICIOS

3.2.1 Si $T_{\ldots i}$ es un tensor de clase n, demuestre que $\partial T_{\ldots i}/\partial x_j$ es un tensor de clase $n+1$ (coordenadas cartesianas). *Nota.* En los sistemas coordenados no cartesianos, los coeficientes a_{ij} son, en general, funciones de las coordenadas, y la derivada simple de un tensor de clase n no es un tensor excepto en el caso especial de $n = 0$. En este caso, la derivada no origina un vector covariante (tensor de clase 1) mediante la Ec. 3.11.

3.2.2 Si $T_{ijk\ldots}$ es un tensor de clase n, demuestre que $\sum \partial T_{ijk\ldots}/\partial x_j$ es un tensor de clase $n-1$ (coordenadas cartesianas).

3.2.3 El operador

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

puede indicarse como

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

utilizando $x_4 = ict$. Esto es el laplaciano de cuatro dimensiones, normalmente llamado d'Alembertiano y designado por $\Box^2$. Demuestre que es un operador *escalar.*

3.3 Regla del Cociente

Si A_i y B_j son vectores, hemos visto en la Sección 3.2 lo fácil que es demostrar que A_iB_j es un tensor de segunda clase. En este caso estamos interesados en una variedad de relaciones inversas. Considere las ecuaciones

$$K_iA_i = B \tag{3.29a}$$

$$K_{ij}A_j = B_i \tag{3.29b}$$

$$K_{ij}A_{jk} = B_{ik} \tag{3.29c}$$

$$K_{ijkl}A_{ij} = B_{kl} \tag{3.29d}$$

$$K_{ij}A_k = B_{ijk} \tag{3.29e}$$

En cada una de estas expresiones, **A** y **B** son tensores conocidos de la clase indicada por el número de índices y **A** es arbitrario. En cada caso, K es una cantidad desconocida. Deseamos establecer las propiedades de transformación de K. La regla del cociente sostiene que si la ecuación de interés es consistente en todos los sistemas coordenados cartesianos (rotados), K es un tensor de la clase indicada. Considere la Ec. 3.29*b* como ilustración. En nuestro sistema coordenado imprimado

$$K_{ij}A_j = B_i = a_{ik}B_k, \tag{3.30}$$

utilizando las propiedades de transformación vectorial de **B**. Ya que la ecuación es consistente en todos los sistemas coordenados cartesianos rotados,

$$a_{ik}B_k = a_{ik}(K_{kl}A_l). \tag{3.31}$$

Ahora, transformando **A** de nuevo al sistema coordenado imprimado[1] (cf. Ec. 3.9),

$$K'_{ij}A'_j = a_{ik}K_{kl}a_{jl}A'_j \tag{3.32}$$

Rearreglando

$$(K'_{ij} - a_{ik}a_{jl}K_{kl})A'_j = 0. \tag{3.33}$$

Esto debe ser consistente para cada valor del índice i y para cada sistema coordenado primado. Ya que A'_j son arbitrarias,[2] concluimos que

$$K'_{ij} = a_{ik}a_{jl}K_{kl}, \tag{3.34}$$

lo cual es nuestra definición del tensor de segunda clase.

Las otras ecuaciones pueden tratarse en la misma forma, originando las otras formas de la regla del cociente. Es de hacerse notar una pequeña falla. La regla del cociente no se aplica necesariamente cuando B es cero. Las propiedades de transformación de cero son indeterminadas.

EJERCICIOS

3.3.1 La ecuación $K_{ij}A_{jk} = B_{ik}$ es consistente para todas las orientaciones del sistema coordenado. Si **A** y **B** son tensores de segunda clase, demuestre que **K** también es un tensor de segunda clase.

3.3.2 El exponencial en una onda de plano es $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$. Aceptamos que $x_\mu = (x_1, x_2, x_3, ict)$ es un vector prototipo en el espacio de Minkowski. Si $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t$ es escalar bajo la transformación de Lorentz (Sección 3.7), demuestre que $k_\mu = (k_1, k_2, k_3, i\omega/c)$ es un vector en el espacio de Minkowski.

[1] Observe cuidadosamente el orden de los índices del coseno de dirección a_{jl} en la transformación *inversa*. Tenemos

$$A_l = \sum_j \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} A'_j = \sum_j a_{jl}A'_j.$$

[2] Por ejemplo, podríamos tomar $A'_1 = 1$ y $A'_m = 0$ para $m \neq 1$. Entonces, la ecuación $K'_{i1} = a_{ik}a_{1l}K_{kl}$ es la que se deriva inmediatamente. El resto de la Ec. 3.34 se obtiene de otras selecciones especiales de la A'_j.

Hasta ahora, nuestras transformaciones de coordenadas se han limitado a las rotaciones puras. Ahora procederemos a considerar el efecto de las reflexiones o inversiones. Si tenemos los coeficientes de transformación $a_{ij} = -\delta_{ij}$, entonces, mediante la Ec. 3.7

$$x_i = -x_i', \tag{3.35}$$

lo cual es una inversión. Observe cuidadosamente que esta transformación cambia nuestro sistema coordenado derecho a un sistema coordenado izquierdo. Nuestro vector prototipo **r** con los componentes (x_1, x_2, x_3) se transforma en $\mathbf{r}' = (x_1', x_2', x_3') = (-x_1, -x_2, -x_3)$. Este nuevo vector $\mathbf{r}'$ tiene componentes negativos con relación al nuevo conjunto transformado de ejes. Tal como se muestra en la Fig. 3.1, el resultado de invertir los signos de ambos ejes y componentes consiste en dejar el vector (una flecha en el espacio) exactamente como era antes de realizar la transformación. El vector de distancia **r** y todos los otros vectores que se comportan de esta manera bajo la reflexión o la inversión del sistema coordenado se denominan vectores polares.

Una diferencia fundamental aparece cuando encontramos un vector definido como el producto vectorial de dos vectores polares. Sea $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, en donde ambos **A** y **B** son vectores polares. A partir de la Ec. 1.33 de la Sección 1.4, los componentes de **C** están determinados por

$$C_1 = A_2B_3 - A_3B_2. \tag{3.36}$$

y así sucesivamente. Ahora, cuando el sistema coordenado se invierte, $A_i \to -A_i$, $B_j \to -B_j$ pero de acuerdo con su definición $C_k \to +C_k$: es decir, nuestro producto vectorial, el vector **C**, *no* se comporta como vector polar a causa de la inversión. Para distinguirlo, se le denomina pseudovector o vector axial (véase la Fig. 3.2). El término vector axial se utiliza frecuentemente debido a que estos productos vectoriales se derivan a menudo de una descripción de la rotación. Algunos ejemplos son

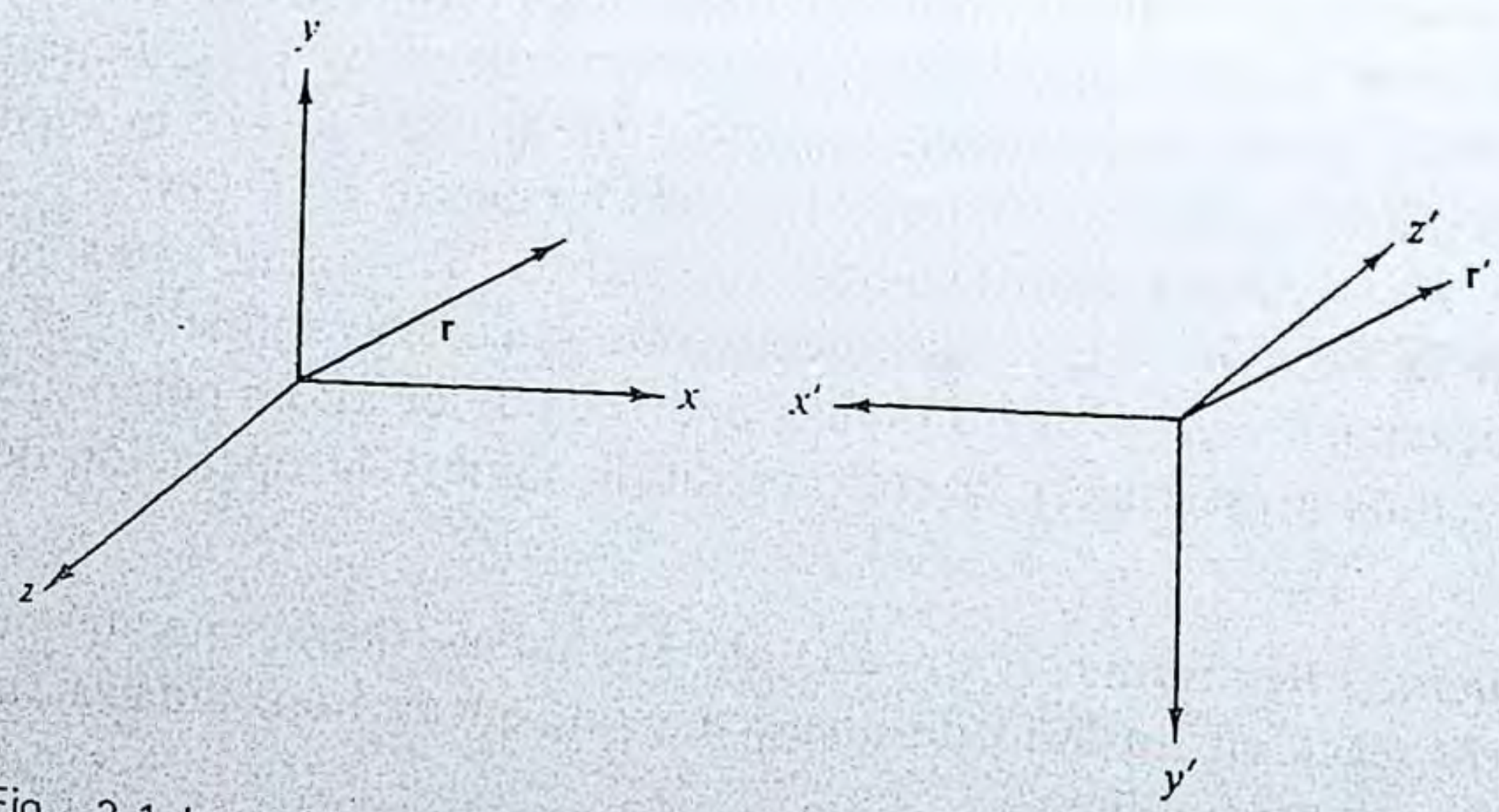


Fig. 3.1 Inversión de las coordenadas cartesianas: vector polar.

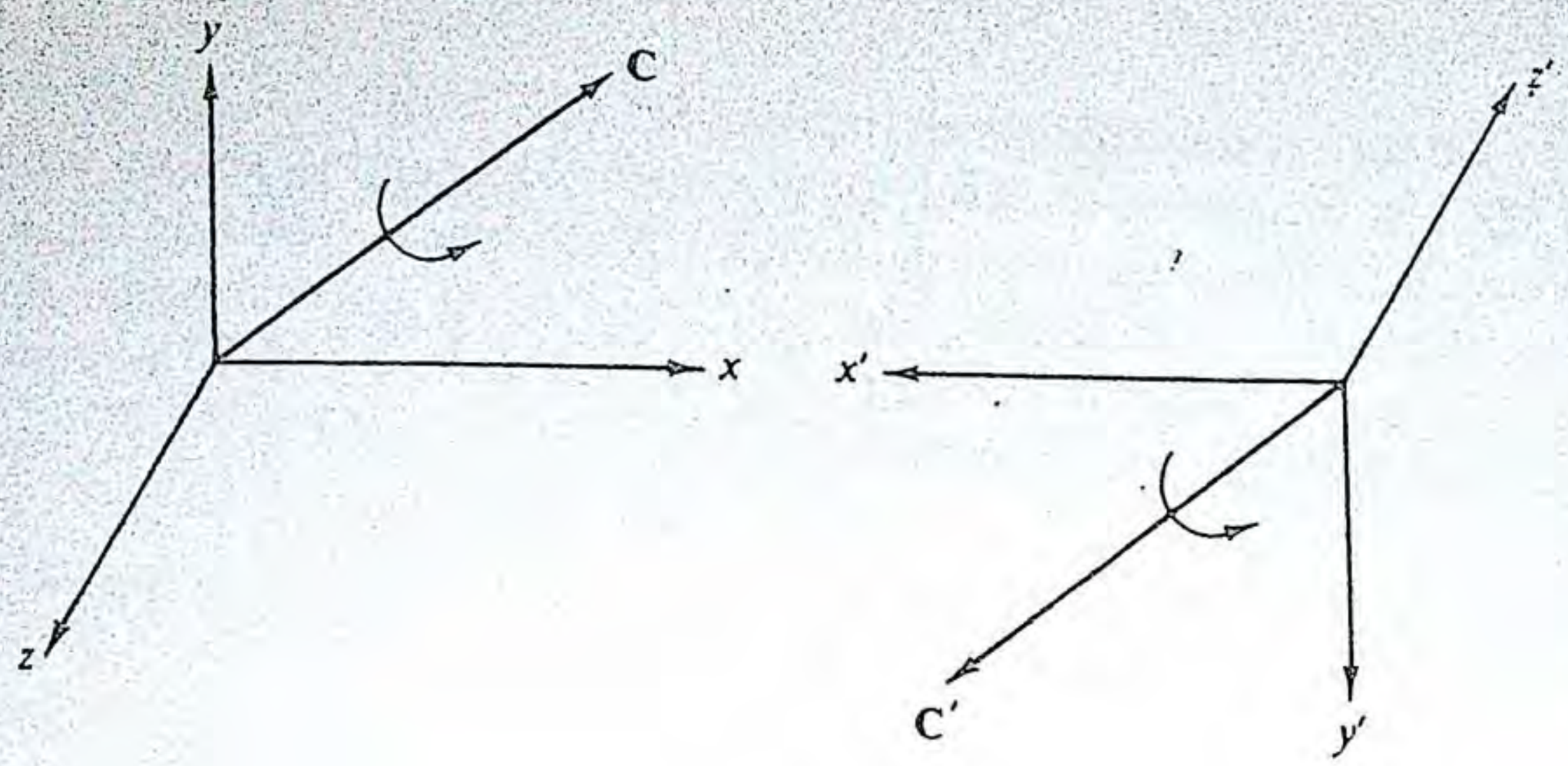


Fig. 3.2 Inversión de las coordenadas cartesianas: vector axial

velocidad angular $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$,

momento angular, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$,

torsión, $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$,

campo de inducción magnética $\mathbf{B}$ $\quad \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$.

Evidentemente, los vectores axiales se presentan con frecuencia en la física elemental, aunque este hecho normalmente no se menciona. En un sistema coordenado derecho, el vector axial $\mathbf{C}$ tiene un sentido de rotación asociado con el mismo que está determinado por la regla de la mano derecha (cf. Sección 1.4). En el sistema izquierdo invertido, el sentido de rotación es una rotación a la izquierda. Esto se indica por medio de las flechas curvas en la Fig. 3.2.

Si aceptamos que el universo es indiferente a que utilicemos un sistema coordenado izquierdo o derecho, entonces no tendrá ningún sentido el que se sume un vector axial con un vector polar. Si la ecuación vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, tanto $\mathbf{A}$ como $\mathbf{B}$ son vectores polares o ambos deben ser vectores axiales.[1] Restricciones similares se aplican a los escalares y pseudoescalares y, en general, a los tensores y pseudotensores considerados más adelante.

En general, los pseudovectores y pseudotensores se transforman en la forma

$$C_i' = |a| a_{ij} C_j, \tag{3.37}$$

$$A_{ij}' = |a| a_{ik} a_{jl} A_{kl},$$

en donde $|a|$ es el determinante[2] del arreglo de coeficientes a_{mn}. En nuestra inversión, el determinante es

[1] La gran excepción a esto se tiene en la desintegración beta, interacciones débiles. Aquí, el universo no distingue entre los sistemas derecho e izquierdo, y sumamos las interacciones del vector polar y el vector axial.

[2] Los determinantes se describen en la Sección 4.1.

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1. \tag{3.38}$$

Para una reflexión de un eje, el eje x,

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \tag{3.39}$$

y nuevamente el determinante $|a| = -1$. Por otra parte, en el caso de todas las rotaciones puras, el determinante $|a|$ siempre es $+1$. Esto se describe adicionalmente en la Sección 4.3. Frecuentemente, las cantidades que se transforman de acuerdo con la Ec. 3.37 se conocen como densidades de tensor. Representan tensores regulares, al menos en lo referente a las rotaciones, difiriendo de los tensores solamente en las reflexiones o inversiones de las coordenadas, y consecuentemente la única diferencia es la aparición de un signo menos adicional procedente del determinante $|a|$.

En el Capítulo 1 se demostró que el triple producto escalar $S = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ era un escalar (bajo las rotaciones). Ahora, al considerar la transformación indicada por la Ec. 3.35 tenemos que $S \to -S$, demostrando que el triple producto escalar es realmente un pseudoescalar. Este comportamiento queda simbolizado mediante la analogía geométrica de un volumen. Si los tres parámetros del volumen, la longitud, la profundidad y la altura, cambian de las distancias positivas a las distancias negativas, el producto de los tres será negativo.

La naturaleza pseudoescalar del elemento volumen tiene una implicación interesante. En la ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

podemos denominar a ∇ y $\mathbf{E}$ vectores polares y ε_0 como escalar. Entonces ρ, la carga por unidad de volumen, debe ser una cantidad escalar; sin embargo, se ha indicado que el volumen es un pseudoescalar. En consecuencia, la carga eléctrica también es una cantidad pseudoescalar.

Para el uso futuro es conveniente la introducción del símbolo tridimensional de Levi-Civita ε_{ijk} definido por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \\ \text{todas las otras } \varepsilon_{ijk} &= 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Supongamos, ahora, que tenemos un pseudotensor de tercera clase δ_{ijk}, el cual en un sistema coordenado particular es igual a nuestra ε_{ijk}. Entonces

$$\delta'_{ijk} = |a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \varepsilon_{pqr} \tag{3.41}$$

por definición de pseudotensor. Ahora

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r}\varepsilon_{pqr} = |a| \tag{3.42}$$

mediante el desarrollo directo del determinante, demostrando que $\delta'_{123} = |a|^2 = 1 = \varepsilon_{123}$. Considerando las otras posibilidades una a la vez, encontramos que

$$\delta'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \tag{3.43}$$

para las rotaciones y las reflexiones. En consecuencia, nuestra ε_{ijk} es un pseudotensor.[1] Más que esto, se puede observar que es un pseudotensor isotrópico con los mismos componentes en todos los sistemas coordenados cartesianos rotados.

Con un tensor de segunda clase *antisimétrico* C_{ij} (en el espacio tridimensional), podemos asociar un pseudovector doble C_i definido por

$$C_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}C_{jk}\,. \tag{3.44}$$

En este caso, el antisimétrico C_{jk} puede expresarse como

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & -C_{31} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Conocemos que C_i debe transformarse como vector bajo las rotaciones desde la doble contracción del tensor (pseudo) de quinta clase $\varepsilon_{ijk}C_{mn}$ pero esto de hecho es un pseudovector derivado de la naturaleza pseudo de ε_{ijk}. Específicamente, los componentes de **C** están dados por

$$(C_1, C_2, C_3) = (C_{23}, C_{31}, C_{12}). \tag{3.46}$$

Observe el orden cíclico de los índices que se obtiene del orden cíclico de los componentes de ε_{ijk}. Esta dualidad, determinada por la Ec. 3.46, significa que el producto vectorial de tres dimensiones puede considerarse literalmente como pseudovector o un tensor antisimétrico de segunda clase, dependiendo de la forma que seleccionemos para indicar el mismo.

Si se consideran tres vectores (polares) **A**, **B** y **C**, podemos definir

$$V_{ijk} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_j & B_j & C_j \\ A_k & B_k & C_k \end{vmatrix}$$

$$= A_iB_jC_k - A_iB_kC_j + \cdots \tag{3.47}$$

[1] La utilidad de ε_{ijk} queda fuera de esta sección. Por ejemplo, las matrices $\mathbf{M}_k$ del Ejercicio 4.2.15 se derivan de $(\mathbf{M}_k)_{ij} = i\varepsilon_{ijk}$.

Mediante la extensión del análisis de la Sección 3.1, se observa que cada término $A_p B_q C_r$ es un tensor de tercera clase, haciendo que V_{ijk} sea un tensor de tercera clase. A partir de su definición como determinante es totalmente antisimétrico, cambiando de signo bajo el intercambio de cualquiera de los dos índices, es decir el intercambio de dos hileras cualesquiera del determinante. La cantidad doble es

$$V = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} V_{ijk} \tag{3.48}$$

evidentemente un pseudoescalar. Mediante desarrollo, se observa que

$$V = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \tag{3.49}$$

nuestro triple producto escalar ya conocido.

Para su uso en la demostración de la covariancia de las ecuaciones de Maxwell, Sección 3.7, deseamos extender este análisis de vector dual al espacio de cuatro dimensiones, particularmente para indicar que el elemento de volumen de cuatro dimensiones, $dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$, es un pseudoescalar.

Introducimos el símbolo de Levi-Civita ε_{ijkl}, el análogo de cuatro dimensiones de ε_{ijk}. Esta cantidad ε_{ijkl} está definida como totalmente antisimétrica en los cuatro índices. Si $(ijkl)$ es una permutación par de (1, 2, 3, 4), entonces ε_{ijkl} queda definida como $+1$; si constituye una permutación impar, entonces ε_{ijkl} es -1. Se puede demostrar que ε_{ijkl} de Levi-Civita es un pseudotensor de cuarta clase mediante un análisis similar al empleado para establecer la naturaleza de ε_{ijk}. Introduciendo un tensor de cuarta clase,

$$H_{ijkl} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i & D_i \\ A_j & B_j & C_j & D_j \\ A_k & B_k & C_k & D_k \\ A_l & B_l & C_l & D_l \end{vmatrix}, \tag{3.50}$$

formado a partir de los vectores polares **A**, **B**, **C** y **D**, se puede definir la cantidad dual

$$H = \frac{1}{4!} \varepsilon_{ijkl} H_{ijkl}. \tag{3.51}$$

De hecho tenemos una suma cuádruple que reduce la clase a cero. A partir de esta pseudonaturaleza de ε_{ijkl}, H es un pseudoescalar. Ahora dejaremos que **A**, **B**, **C** y **D** representen desplazamientos infinitesimales a lo largo de los cuatro ejes coordenados (espacio de Minkowski)

$$\mathbf{A} = (dx_1, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{B} = (0, dx_2, 0, 0), \text{ etc.,} \tag{3.52}$$

y

$$H = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4, \tag{3.53}$$

El elemento de volumen de cuatro dimensiones queda ahora identificado como un pseudoescalar. Utilizamos este resultado en la Sección 3.7. Este resultado podía haberse previsto de los resultados de la teoría especial de la relatividad. La contracción de Lorentz-Fitzgerald de $dx_1\, dx_2\, dx_3$ balancea justamente el retraso de tiempo de dx_4.

Hemos entrado en este espacio de cuatro dimensiones como una extensión matemática simple del espacio tridimensional y, de hecho, podríamos haber tratado con la misma facilidad el espacio de 5, 6 o N dimensiones. Esto es típico de la capacidad del análisis de componentes. Físicamente, este espacio de cuatro dimensiones normalmente es considerado como el espacio de Minkowski,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict), \tag{3.54}$$

en donde t es el tiempo. Esto representa la unión del espacio y tiempo lograda por la relatividad especial. Las transformaciones que describen las rotaciones en el espacio de cuatro dimensiones son las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial.

Para algunas aplicaciones, particularmente en la teoría cuántica del momento angular, nuestros tensores cartesianos no son particularmente convenientes. En lenguaje matemático, el tensor de segunda clase general A_{ij} puede reducirse, lo cual significa que puede descomponerse en partes de tensor de clase, inferior. Ya lo hemos hecho con anterioridad. A partir de la Ec. 3.25

$$A = A_{ii} \tag{3.55}$$

es una cantidad escalar, la traza de A_{ij}.[1]

La porción antisimétrica

$$B_{ij} = \tfrac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) \tag{3.56}$$

se ha demostrado que es equivalente a un (pseudo) vector, o

$$B_{ij} = C_k \quad \text{permutación cíclica de } i,\ j,\ k. \tag{3.57}$$

Mediante la resta del escalar A y el vector C_k de nuestro tensor original, se tiene un tensor de segunda clase traza cero, simétrico, no reducible, S_{ij}, en donde

$$S_{ij} = \tfrac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) - \tfrac{1}{3}A\delta_{ij}, \tag{3.58}$$

[1] Un procedimiento alternativo, utilizando las matrices, se proporciona en la Sección 4.3 cf. Ejercicio 4.3.8.

con cinco componentes independientes. Finalmente y como consecuencia, nuestro tensor cartesiano original puede indicarse en la forma

$$A_{ij} = \tfrac{1}{3}A\delta_{ij} + C_k + S_{ij}. \tag{3.59}$$

Las tres cantidades A, C_k y S_{ij} forman los tensores esféricos de clase 0, 1 y 2, respectivamente, que se transforman de modo similar a los armónicos esféricos Y_L^M (Capítulo 12) para $L = 0, 1$ y 2. Detalles adicionales de tales tensores esféricos y de sus usos se incluyen en el libro de Rose, citado en el Capítulo 12.

Un ejemplo específico de la reducción anterior lo proporciona el tensor de cuadripolo eléctrico simétrico

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\rho(x_1, x_2, x_3)\, d^3x.$$

El término $-r^2\,\delta_{ij}$ representa la resta de la traza escalar (los tres términos $i = j$). La Q_{ij} tiene traza cero.

EJERCICIOS

3.4.1 Un arreglo cuadrado antisimétrico está determinado por

$$\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

en donde (C_1, C_2, C_3) forman un pseudovector. Suponiendo que la relación

$$C_i = \frac{1}{2!}\,\varepsilon_{ijk}C_{jk}$$

es consistente en todos los sistemas coordenados, demuestre que C_{jk} es un tensor. (Esta es otra forma del teorema del cociente.)

3.4.2 Demuestre que el producto vectorial es único para el espacio tridimensional, es decir que solamente en tres dimensiones podemos establecer una correspondencia uno a uno entre los componentes del tensor antisimétrico (segunda clase) y los componentes de un vector.

3.4.3 Demuestre que

(a) $\delta_{ii} = 3$,
(b) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$,
(c) $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$,
(d) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

3.4.4 Demuestre que

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}.$$

3.4.5 (a) Exprese los componentes de un vector de producto vectorial $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, en términos de ε_{ijk} y los componentes de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

(b) Utilice la antisimetría de ε_{ijk} para demostrar que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$.

Respuesta. (a) $C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$.

3.4.6 (a) Demuestre que el tensor de inercia (matriz) de la Sección 4.6 puede indicarse en la forma

$$I_{ij} = m(x_n x_n \delta_{ij} - x_i x_j)$$

para una partícula de masa m en (x_1, x_2, x_3).

(b) Demuestre que

$$I_{ij} = -M_{il} M_{lj} = -m\varepsilon_{ilk} x_k \varepsilon_{ljm} x_m$$

en donde $M_{il} = m^{1/2}\, \varepsilon_{ilk} x_k$. Esto representa la contracción de dos tensores de segunda clase y es idéntico con el producto de matriz de la Sección 4.2.

3.4.7 Indique $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ y $\nabla \times \nabla\varphi$ en la notación ε_{ijk}, de modo que sea evidente que cada expresión desaparece.

Respuesta. $$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k$$

$$(\nabla \times \nabla\varphi)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi.$$

3.4.8 Expresando los productos vectoriales en términos de los símbolos de Levi-Civita (ε_{ijk}), derive la regla *BAC-CAB*, Ec. 1.50.

3.4.9 Verifique que cada uno de los siguientes tensores de cuarta clase es isotrópico, es decir que tienen la misma forma independiente de cualquier rotación de los sistemas coordenados.

(a) $A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$,
(b) $B_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$,
(c) $C_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$.

3.5 Diádica

Ocasionalmente, y en particular dentro de la vieja literatura y libros antiguos, el lector encuentra referencias a la diada o diádica. La diádica representa un procedimiento algo tosco para lograr la extensión del análisis vectorial común con objeto de cubrir los tensores de segunda clase.

Si unimos dos vectores **i** y **j** para formar la combinación **ij**, tendremos una diada. La multiplicación (escalar o vector) de la izquierda implica al miembro izquierdo del par y deja al miembro derecho estrictamente solo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{ij} &= [(\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \cdot \mathbf{i}]\mathbf{j} \\ &= A_x \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

La multiplicación de la parte derecha representa justamente lo inverso; es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{i}[\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)] \\ &= \mathbf{i}A_y. \end{aligned} \tag{3.61}$$

De lo anterior se puede observar que, en términos generales, la operación de la multiplicación no es conmutativa. Es de hacerse notar que la **i** y la **j** de la diada **ij** no operan entre sí. Si tuvieran coeficientes escalares estos tendrían que multiplicarse conjuntamente, pero al menos en lo referente a los vectores unitarios no existe la implicación de un producto escalar o vectorial; simplemente están colocados en esta posición. Tal como se ha demostrado, el orden es significativo, $\mathbf{ij} \neq \mathbf{ji}$. Siendo así, tenemos una cantidad compuesta que depende en parte de la ordenación. Esta dependencia de la ordenación volverá a aparecer cuando se estudien las matrices (Capítulo 4) y las cantidades complejas (Capítulo 6), en donde el número complejo es literalmente un par ordenado de números reales.

Extendiendo esta construcción, unimos dos vectores **A** y **B** para formar

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = \mathbf{AB} &= (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)(\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z)\\ &= \mathbf{ii}A_xB_x + \mathbf{ij}A_xB_y + \mathbf{ik}A_xB_z\\ &\quad + \mathbf{ji}A_yB_x + \mathbf{jj}A_yB_y + \mathbf{jk}A_yB_z\\ &\quad + \mathbf{ki}A_zB_x + \mathbf{kj}A_zB_y + \mathbf{kk}A_zB_z\,. \end{aligned} \tag{3.62}$$

La cantidad $\mathbf{T} = \mathbf{AB}$ es una diádica formada como se muestra de la combinación de diadas. Hemos demostrado (Sección 3.2) que este producto de dos vectores **AB** es un tensor de segunda clase. En consecuencia, las diadas son tensores de segunda clase, escritas en una forma que conserva la naturaleza del vector pero que oscurece las propiedades de transformación del tensor.

Con anterioridad se ha hecho notar que la multiplicación de un vector y una diada no es conmutativa, pero existe un caso especial de importancia en que la operación es conmutativa. Consideramos la diada **AB** y establecemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{a}, \tag{3.63}$$

en donde **a** es un vector arbitrario. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, entonces

$$A_x\mathbf{B} = \mathbf{A}B_x$$

$$\mathbf{i}A_xB_x + \mathbf{j}A_xB_y + \mathbf{k}A_xB_z = \mathbf{i}A_xB_x + \mathbf{j}A_yB_x + \mathbf{k}A_zB_x\,. \tag{3.64}$$

Igualando componentes se obtiene

$$\begin{aligned} A_xB_x &= A_xB_x\,,\\ A_xB_y &= A_yB_x\,,\\ A_xB_z &= A_zB_x\,, \end{aligned} \tag{3.65}$$

demostrando que $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$, en donde c es una constante. Dicho en otras palabras, si la multiplicación con un vector arbitrario es conmutativa, la diada debe ser simétrica y el coeficiente de la diada **pq** es igual al coeficiente de la diada **qp**. Alternativamente, si la diada es simétrica, la multiplicación es conmutativa.

Una de las propiedades más significativas de una diada simétrica es que siempre puede establecerse en una forma diagonal o normal mediante la selección adecuada de los ejes coordenados:

$$\mathbf{T} \to \mathbf{ii}T_{xx} + \mathbf{jj}T_{yy} + \mathbf{kk}T_{zz}, \tag{3.66}$$

en que todos los coeficientes no diagonales van hacia cero. La transformación coordenada que coloca nuestra diada en esta forma diagonal se conoce como la transformación de eje principal. Se describe con cierto detalle en la Sección 4.6.

Existe una interpretación interesante y útil de la diada simétrica. Por simplicidad, supondremos que nuestra diada $\mathbf{T}$ ya se encuentra en su forma diagonal. Siendo así, con $\mathbf{r}$, el vector de distancia usual, se forma la ecuación

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} = 1, \tag{3.67}$$

la cual limita la longitud de $\mathbf{r}$ de acuerdo con su orientación. Desarrollando la Ec. 3.67

$$(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot (\mathbf{ii}T_{xx} + \mathbf{jj}T_{yy} + \mathbf{kk}T_{zz}) \cdot (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = 1$$

$$x^2T_{xx} + y^2T_{yy} + z^2T_{zz} = 1. \tag{3.68}$$

Esto define una elipsoide con los semiejes a, b y c, determinada por

$$a = T_{xx}^{-1/2}, \qquad b = T_{yy}^{-1/2}, \qquad c = T_{zz}^{-1/2}. \tag{3.69}$$

El diagonalizar nuestra diada ha correspondido al hecho de lograr la orientación de la elipsoide diádica de manera que los ejes elipsoides queden alineados con los ejes coordenados.

Si $\mathbf{U}$ es una diada antisimétrica;

$$U_{xx} = 0, \text{ etc.},$$

$$U_{xy} = -U_{yx}, \text{ etc.},$$

entonces para cada vector $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{a}. \tag{3.70}$$

La multiplicación de un vector y una diada antisimétrica sigue una regla de anticonmutación (cf. Ejercicio 3.5.4a).

Las diadas son más bien dificultosas de manejar en comparación con el análisis de tensores usual (una vez que se ha logrado comprender el concepto de la transformación bajo la rotación). Son bastante difíciles de

aplicar en la representación de los tensores de tercera clase y superiores, de modo que regresaremos al análisis de tensores y nos olvidaremos de la notación diádica.

EJERCICIOS

3.5.1 Si **A** y **B** se transforman como vectores, Ecs. 3.6 y 3.8, demuestre que la diada **AB** satisface la ley de transformación de los *tensores,* Ec. 3.13.

3.5.2 Demuestre que $\mathbf{I} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$ es una *diada unitaria* en el sentido de que cualquier vector **V**,

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}.$$

Las diadas individuales **ii**, etc. son ejemplos específicos de los operadores de proyección de la mecánica cuántica.

3.5.3 Demuestre que $\nabla \mathbf{r}$ es igual a la diada unitaria, **I**.

3.5.4 Si **U** es una diada antisimétrica y **V** un vector, demuestre que

(a) $\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$
(b) $\mathbf{V} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0.$

3.5.5 Los vectores bidimensionales $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ y $\mathbf{t} = -y\mathbf{i} + \mathbf{j}x$ pueden relacionarse mediante la ecuación de tensor $\mathbf{r} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{t}$.

(a) Encuentre el tensor **U** utilizando nuestra descripción de componente anterior de los tensores.
(b) Encuentre **U** y trate la misma como diada.

3.5.6 En una investigación de la interacción de moléculas, se forma una diada a partir de los vectores de distancia relativa unitaria $\mathbf{e}_{12}$ determinada por

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

para

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} - 3\mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{12}$$

demuestre que la traza $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = 6$.

I es la diada unitaria, es decir $\mathbf{I} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$.

3.5.7 Demuestre que el teorema de Gauss es consistente para las diadas, es decir que

$$\int_s d\sigma \cdot \mathbf{D} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D}\, d\tau.$$

3.5.8 Demuestre que

$$\int_s d\sigma \cdot \nabla \mathbf{E} + \int_s d\sigma \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \int_s d\sigma\, \nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

La función **E** es una función vectorial de posición. La integración se realiza sobre una superficie cerrada simple. La combinación improbable de las integrales de superficie de hecho aparece en la teoría de difracción vectorial de Kirchhoff.

3.5.9 Demuestre que los siguientes tensores unitarios, simétricos, de traza cero

$$\mathbf{t}^0 = (2\mathbf{kk} - \mathbf{ii} - \mathbf{jj})/\sqrt{6}$$
$$\mathbf{t}^{\pm 1} = \mp\tfrac{1}{2}(\mathbf{ik} + \mathbf{ki}) - i\tfrac{1}{2}(\mathbf{jk} + \mathbf{kj})$$
$$\mathbf{t}^{\pm 2} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{ii} - \mathbf{jj}) \pm i\,\tfrac{1}{2}(\mathbf{ij} + \mathbf{ji})$$

satisfacen la relación de doble contracción

$$t^{m*}_{ij}\, t^{n}_{ij} = \delta_{mn}.$$

Estos tensores unitarios se utilizan para definir los armónicos esféricos de *tensor* como extensión de los armónicos esféricos vectoriales de la Sección 12.12. Los armónicos esféricos tensoriales, a su vez, sirven para describir de las ondas gravitacionales.

3.6 Teoría de la Elasticidad

Cuando un cuerpo elástico se somete a una fuerza o esfuerzo exterior, se deforma. Nuestro estudio de la elasticidad en términos de los tensores se divide naturalmente en tres partes. Primero, una descripción de la deformación de la sustancia elástica; en segundo lugar, una descripción de la fuerza o esfuerzo que produce la deformación; y finalmente la ley de Hooke generalizada en la forma de tensor, relacionando el esfuerzo y la deformación.

Deformación Elástica. La deformación de nuestro cuerpo elástico puede describirse estableciendo el cambio en posición relativa de las partes del cuerpo cuando el cuerpo se somete a cierto esfuerzo externo. Considere un punto P_0 en la posición **r** relativa a cierto origen fijo y un segundo punto Q_0 desplazado de P_0 en la distancia $\delta\mathbf{x}$. En el estado no deformado, las coordenadas de Q_0 *con relación a* P_0 son δx_i; en el estado deformado, cuando P_0 ha sido desplazado una distancia **u** hasta el punto P_1 y Q_0 una distancia **v** hasta Q_1, las coordenadas de Q_1 con relación a P_1 son $\delta y_i = \delta x_i + \delta u_i$. El cambio de posición de Q *con relación a* P es justamente δu_i.

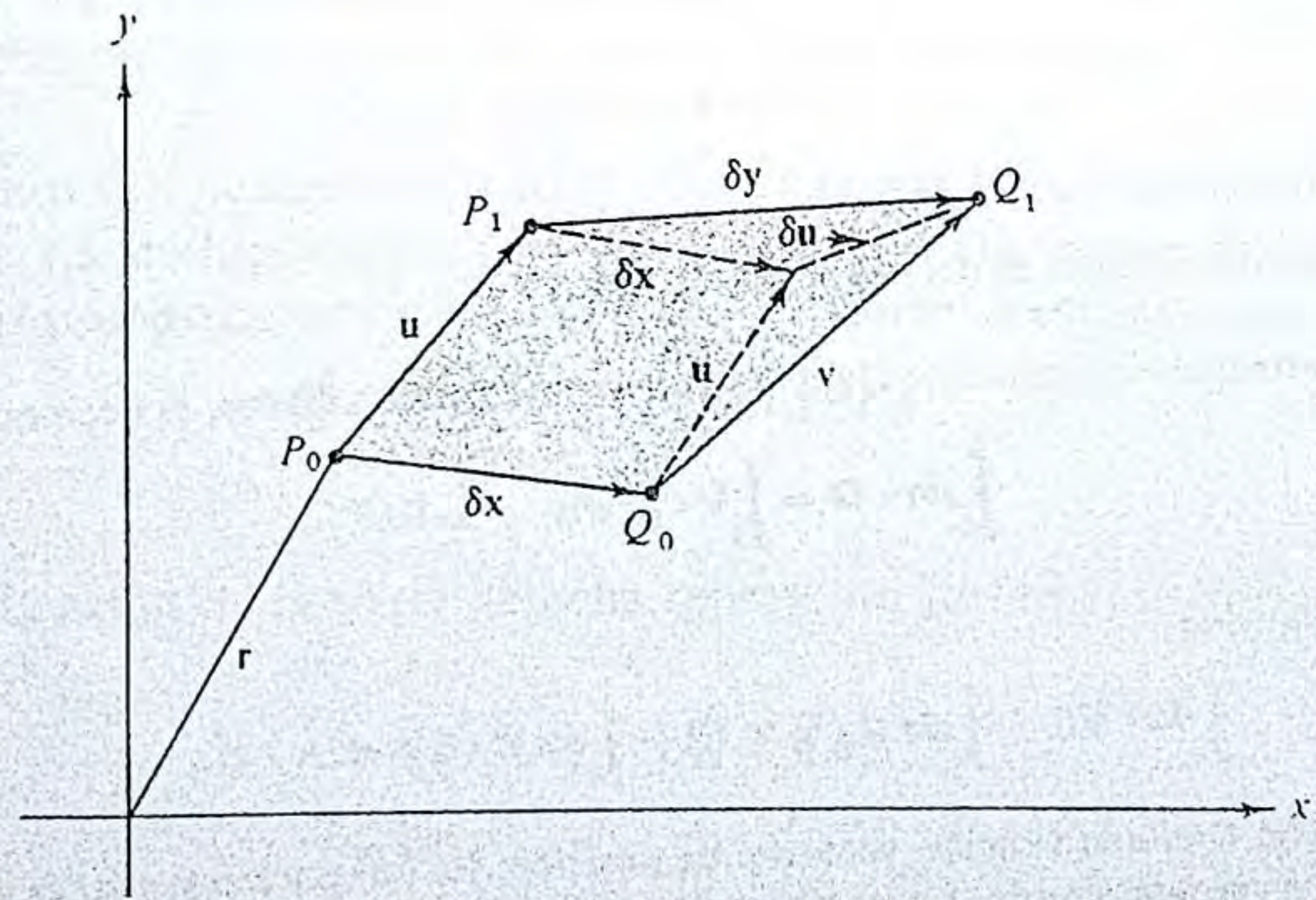


Fig. 3.3 Deformación elástica

Despreciando las diferenciales de segundo orden y superiores,[1] el desarrollo de Taylor tridimensional resulta en

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\delta\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{u},$$
$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\delta x_k\,. \tag{3.71}$$

Ya que u_i es el componente del vector $\partial u_i/\partial x_k$, es un elemento de un tensor de segunda clase, $\nabla\mathbf{u}$. Resolviendo este tensor en los términos simétrico y antisimétrico,

$$\delta u_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\delta x_k - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k = \eta_{ik}\,\delta x_k - \xi_{ik}\,\delta x_k\,. \tag{3.72}$$

La parte antisimétrica, ξ_{ik}, puede identificarse como una rotación pura (y no tan solo una deformación).

De acuerdo con la Sección 3.4, podemos asociar un vector axial $\boldsymbol{\xi}$ con ξ_{ij}:

$$\boldsymbol{\xi} = \tfrac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}. \tag{3.73}$$

El desplazamiento $\delta\mathbf{u}$ correspondiente a la parte antisimétrica $-\xi_{ik}\,\delta x_k$ se transforma en

$$\delta\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) \times \delta\mathbf{x}. \tag{3.74}$$

Esto corresponde a la rotación alrededor de un eje instantáneo a través de P_0 en la dirección $(\nabla \times \mathbf{u})$ en una proporción de $|\nabla \times \mathbf{u}|$ radianes.

La parte simétrica restante de nuestro tensor η_{ij} se considera como un tensor de deformación pura. Los elementos de diagonal $(\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33})$ de η_{ik} representan contracciones, mientras que los elementos no diagonales representan deformaciones por esfuerzo cortante.

Esto puede obtenerse al considerar Q_0 que se desplaza desde P_0 a lo largo del eje x; $\delta\mathbf{x} = \mathbf{i}\,\delta x_1$. De la Ec. 3.72

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \eta_{11}\,\delta x_1, \\ \delta u_2 &= \eta_{21}\,\delta x_1, \\ \delta u_3 &= \eta_{31}\,\delta x_1. \end{aligned} \tag{3.75}$$

En consecuencia, el desplazamiento en el caso deformado es

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= \delta x_1 + \delta u_1 = (1 + \eta_{11})\,\delta x_1, \\ \delta y_2 &= \qquad\quad \delta u_2 = \qquad \eta_{21}\,\delta x_1, \\ \delta y_3 &= \qquad\quad \delta u_3 = \qquad \eta_{31}\,\delta x_1. \end{aligned} \tag{3.76}$$

[1] La limitación a los términos de primer orden más bien es una limitación severa que implica a las deformaciones relativas de no más que probablemente uno por ciento en la aplicación verdadera.

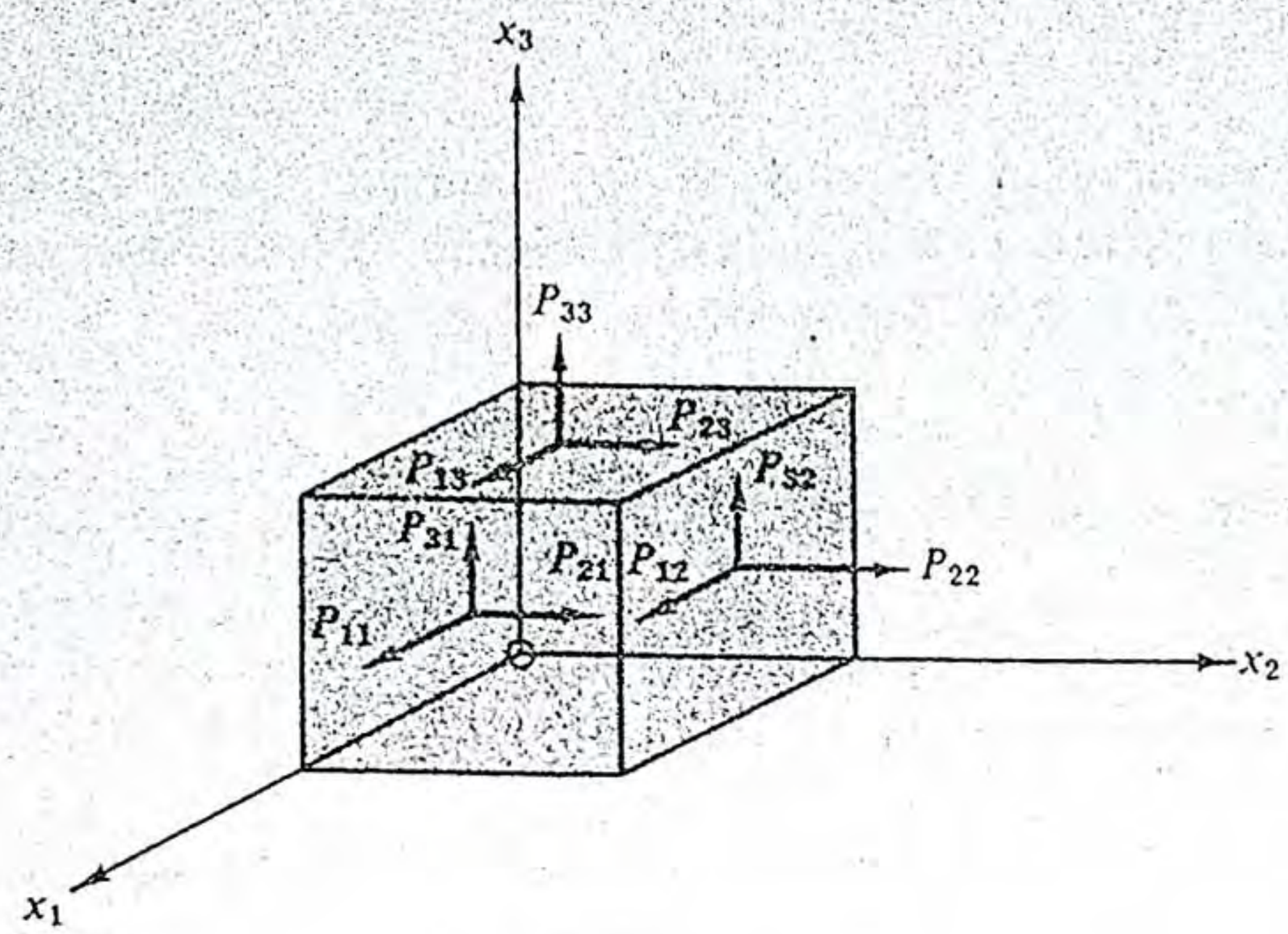


Fig. 3.4 Esfuerzos

Para nuestro desplazamiento inicial, $\delta \mathbf{x} = \mathbf{i}\,\delta x_1$, el término diagonal η_{11} contribuye al componente 1 de $\delta \mathbf{y}$ (contracción) y η_{21} y η_{31} contribuyen a δy_2 y δy_3, respectivamente, representando esfuerzos cortantes.

Esfuerzo-Fuerza. Los esfuerzos o fuerzas deben definirse cuidadosamente. Considerando como referencia la Fig. 3.4, que muestra un volumen diferencial, la fuerza en la dirección x_i, que actúa en la superficie dA, cuya normal es en la dirección x_j, equivale a $P_{ij}\,dA$. Por sí mismos, los términos P_{ij} representan de hecho "presiones" en el sentido de ser una fuerza/área. Siempre que se utilicen los términos esfuerzo o fuerza, deberá entenderse que los términos P_{ij} deben multiplicarse por el área diferencial adecuada. Estas son las fuerzas que actúan *en* el pequeño paralelepípedo

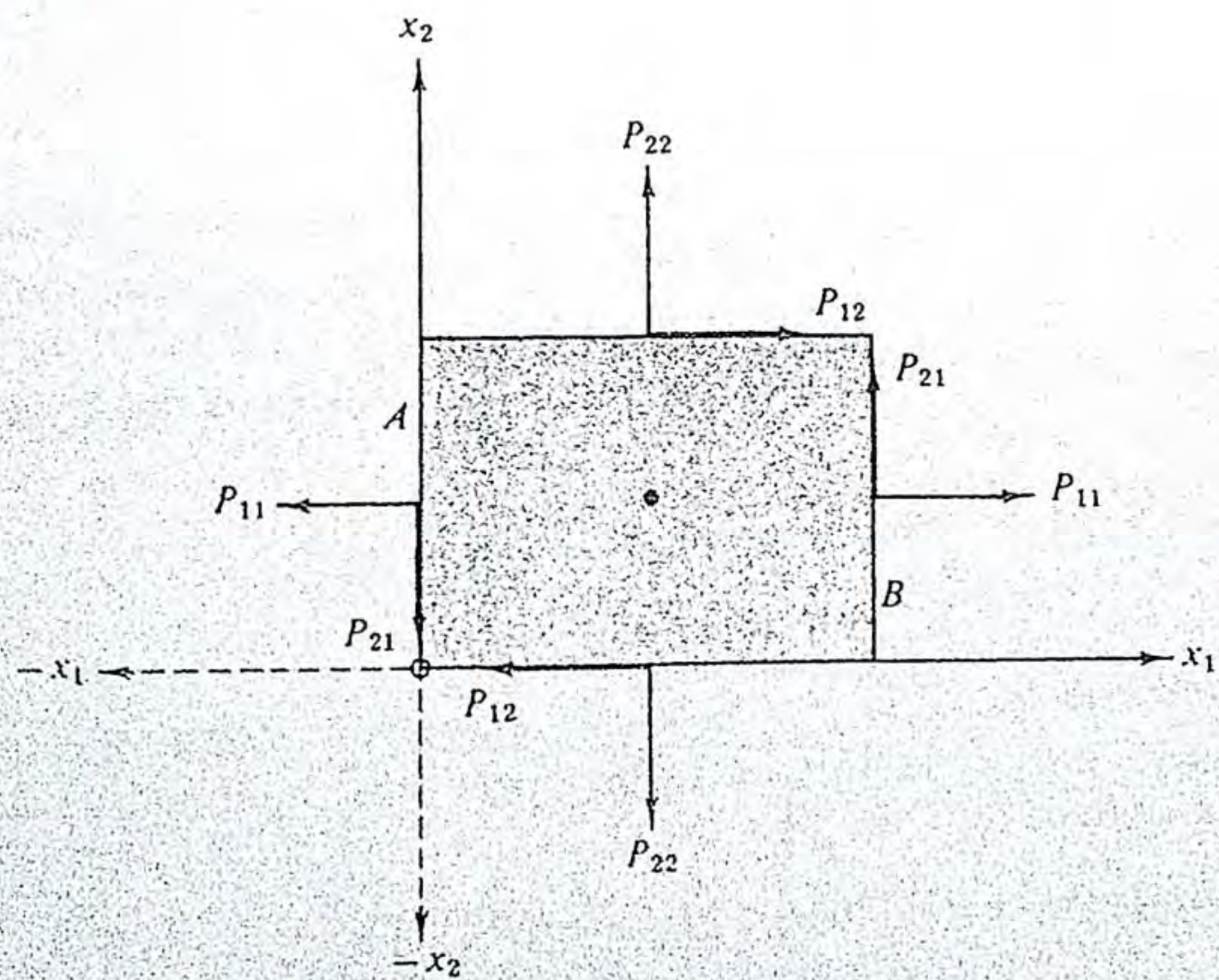


Fig. 3.5 Esfuerzos homogéneos: inversión del signo.

de la Fig. 3.4. Para mayor claridad, solamente se muestran las fuerzas en las tres caras frontales. Si suponemos que los esfuerzos son homogéneos, las fuerzas en la caras opuestas tendrán una inversión de signo como se muestra en la Fig. 3.5. Observe que P_{21} es el esfuerzo cortante (en la dirección x_2) aplicado a la cara A. Para una fuerza homogénea, la cara B debe aplicar el mismo esfuerzo cortante P_{21} a un *medio exterior.* El esfuerzo aplicado a la cara B por el medio exterior es justamente lo inverso, o sea P_{21} dirigido hacia abajo (en la dirección $-x_2$). Con base en este argumento se tienen tres suposiciones que deben notarse explícitamente.

1. Esfuerzo homogéneo a través del cuerpo.
2. Existencia de un equilibrio estático.
3. Ausencia de fuerzas en el cuerpo (tal como la gravedad actúa en la masa dentro del paralelepípedo) y esfuerzos de torsión en el cuerpo (campo magnético externo actuando en los dominios magnéticos N).

Estas suposiciones permiten establecer una limitación adicional en los términos P_{ij}. Considere el esfuerzo de torsión neto en el paralelepípedo mostrado en las Figs. 3.4 y 3.6 alrededor del eje x_3. Las presiones normales P_{ii} no ejercen ningún esfuerzo de torsión neto. Los esfuerzos cortantes P_{31} y P_{32} tienen un brazo de momento cero. Los esfuerzos cortantes P_{13} y P_{23} se balancean por medio de esfuerzos iguales y opuestos en la cara inferior ($x_3 = 0$). Lo que resta son los esfuerzos de torsión

$$P_{21}(dx_2\, dx_3)\, dx_1$$

y

$$P_{12}(dx_1\, dx_3)\, dx_2\,, \tag{3.77}$$

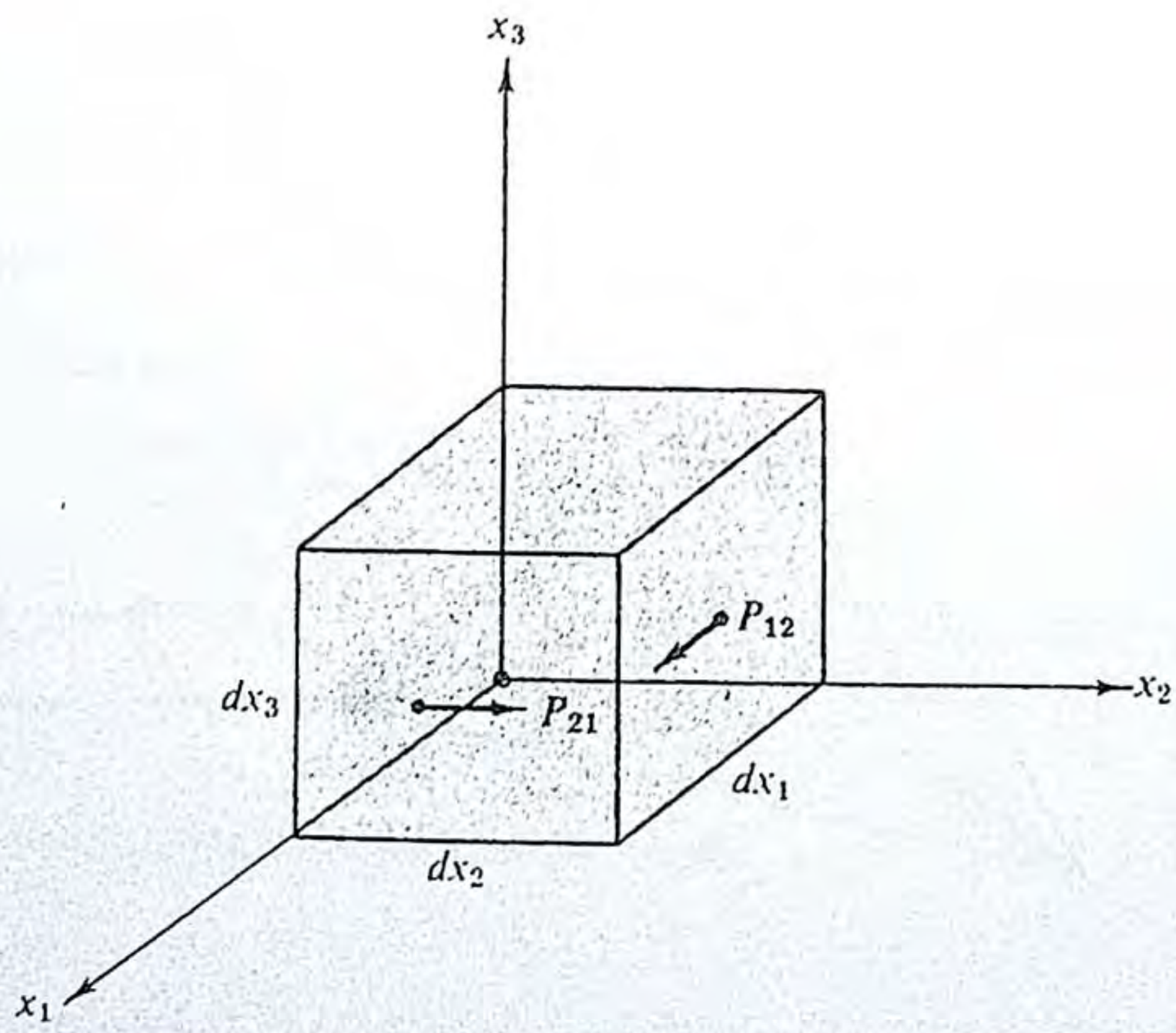


Fig. 3.6 Esfuerzos homogéneos: balance del esfuerzo de torsión

que deben balancearse,

$$P_{21}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = P_{12}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

en ausencia de una rotación alrededor del eje x_3. Se tiene

$$P_{21} = P_{12} \tag{3.78}$$

y, en general, repitiendo el argumento para la ausencia de la rotación alrededor del eje x_2 y x_3,

$$P_{ij} = P_{ji}. \tag{3.79}$$

Estas son cantidades de magnitud y no de dirección, lo cual está determinado por el primer índice.

Siendo así, el arreglo de los esfuerzos (presión) P_{ij} es simétrico. Ahora demostraremos que este arreglo es un tensor. Formamos un tetraedro infinitesimal con una cara inclinada de área dA, normal en la dirección x'_j como se muestra en la Fig. 3.7. Las fuerzas en el área inclinada son $P'_{ij}\, dA$. Las fuerzas en las caras $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ son, respectivamente,

$$P_{m1}(a_{j1}\, dA),$$

$$P_{m2}(a_{j2}\, dA),$$

y

$$P_{m3}(a_{j3}\, dA),$$

en donde $a_{jk}\, dA$ es el área de la cara $x_k = 0$, estando determinada por el área inclinada dA proyectada en el plano $x_k = 0$. La a_{jk} es el coseno de dirección usual, el coseno del ángulo entre los ejes x'_j y x_k.

La fuerza $P_{m1} a_{j1}\, dA$ es a lo largo de x_m. Su componente en la dirección x'_i es (sin suma). Si ahora sumamos sobre m, la expresión an-

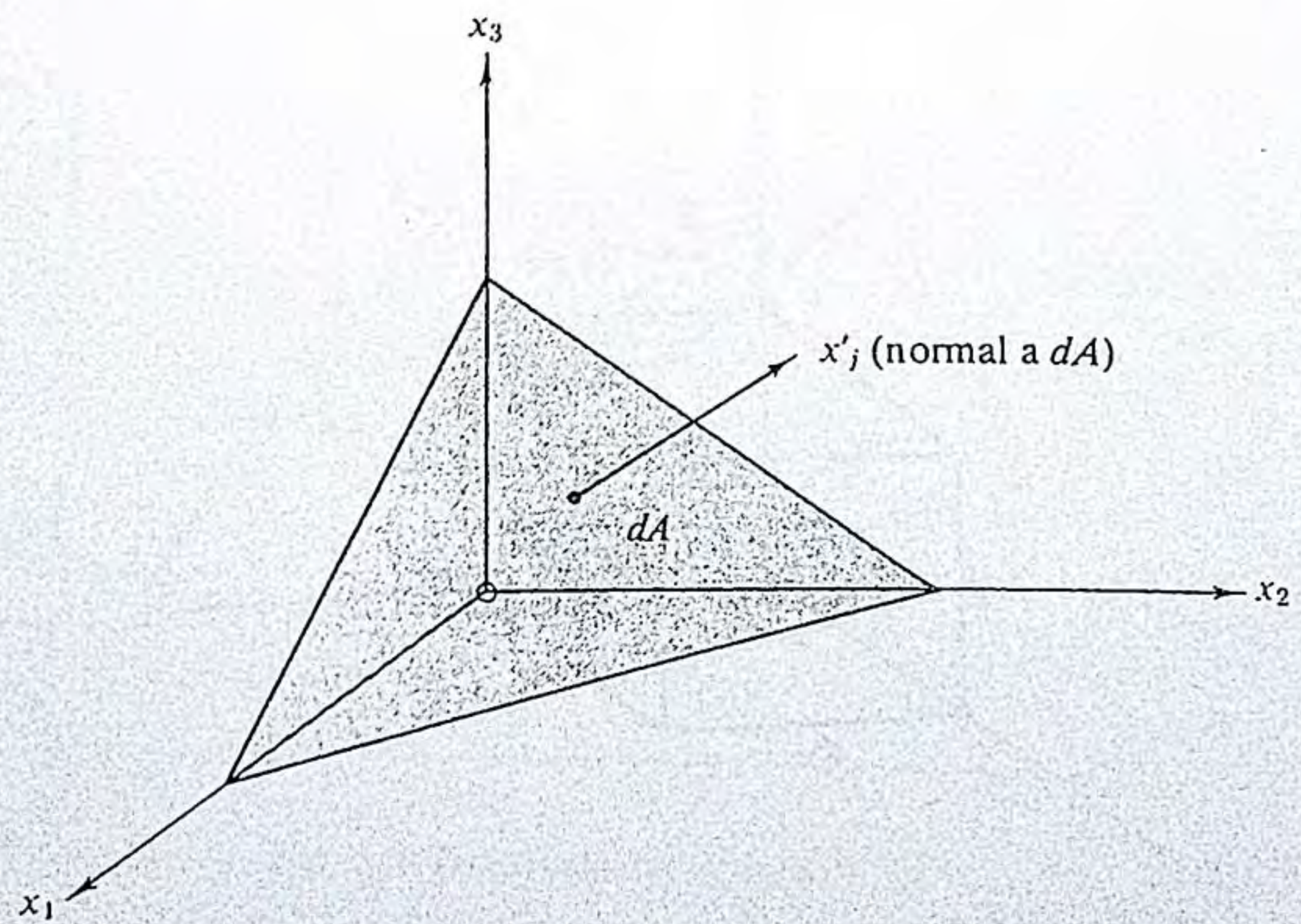


Fig. 3.7 Tetraedro diferencial: balance de fuerzas.

terior nos proporciona la suma de los componentes x_i' de las tres fuerzas en la cara posterior, $x_1 = 0$, en la dirección x_i'. Finalmente, sumando sobre las tres caras, $x_k = 0$, la fuerza total a lo largo de x_i' es

$$a_{im}a_{jk}P_{mk}\,dA = P_{ij}'\,dA \tag{3.80}$$

para el equilibrio estático. Ya que el área dA es arbitraria, se tiene

$$P_{ij}' = a_{im}a_{jk}P_{mk}, \tag{3.81}$$

que por definición hace que P_{mk} sea un tensor.

Relaciones de Esfuerzo-Deformación: Ley de Hooke. Primeramente supongamos un sólido elástico isotrópico. Luego regresaremos al caso anisotrópico general. Considere una varilla uniforme paralela al eje x_1.[1] Mediante la aplicación de un pequeño esfuerzo de tensión P_{11},

$$E\eta_{11} = P_{11}, \tag{3.82a}$$

$$E\eta_{22} = -\sigma P_{11}, \tag{3.82b}$$

$$E\eta_{33} = -\sigma P_{11}, \tag{3.82c}$$

en donde E es el módulo de Young y σ es la relación de Poisson. Si se suman pequeños esfuerzos de tensión P_{22} y P_{33}, la Ec. 3.82a se transforma en

$$E\eta_{11} = P_{11} - \sigma P_{22} - \sigma P_{33}. \tag{3.83}$$

Hasta aquí nos hemos limitado a *pequeños* esfuerzos y *pequeñas* deformaciones de modo que la relación de esfuerzo-deformación será lineal. La Ec. 3.83 se puede volver a establecer en la forma

$$E\eta_{11} = (1 + \sigma)P_{11} - \sigma(P_{11} + P_{22} + P_{33}), \tag{3.84}$$

y similarmente para $E\eta_{22}$ y $E\eta_{33}$.

Ahora, η_{ij} y P_{ij} son tensores como se ha demostrado anteriormente en esta sección. Debido a la simetría de nuestro sistema, sus componentes no diagonales son cero. Para encontrar la generalización de la Ec. 3.84 en un sistema coordenado cartesiano orientado arbitrariamente, hacemos girar los ejes

$$\begin{aligned} \eta_{ij}' &= a_{ik}a_{jk}\eta_{kk}, \\ P_{ij}' &= a_{ik}a_{jk}P_{kk}. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Si multiplicamos la Ec. 3.84 por $a_{i1}a_{j1}$, la ecuación correspondiente para $E\eta_{22}$ por $a_{i2}a_{j2}$, y la ecuación para $E\eta_{33}$ por $a_{i3}a_{j3}$ y sumamos las tres ecuaciones, se obtiene

$$Ea_{ik}a_{jk}\eta_{kk} = (1 + \sigma)a_{ik}a_{jk}P_{kk} - \sigma(P_{nn})a_{ik}a_{jk}. \tag{3.86}$$

[1] Esta selección especial nos iniciará en un sistema identificado en el Capítulo 4 como el sistema del eje principal, el sistema coordenado particular en que los esfuerzos cortantes desaparecen.

Utilizando las Ecs. 3.85 y 3.18,

$$E\eta'_{ij} = (1 + \sigma)P'_{ij} - \sigma(P'_{mm})\,\delta_{ij}, \tag{3.87}$$

en donde

$$(P'_{mm}) = (P_{nn}) = P_{11} + P_{22} + P_{33}, \tag{3.88}$$

el tensor P_{ij} contraído (y por consecuencia invariante).

Frecuentemente es de mayor conveniencia resolver para los esfuerzos P_{ik}. Podemos hacer esto al establecer $i = j$ y procediendo a la contracción

$$\begin{aligned} E\eta_{jj} &= (1 + \sigma)P_{jj} - 3\sigma P_{jj} \\ &= (1 - 2\sigma)P_{jj}, \end{aligned} \tag{3.89}$$

eliminando las primas como superfluas. Sustituyendo nuevamente en la Ec. 3.87,

$$(1 + \sigma)P_{ij} = E\eta_{ij} + \frac{E\sigma}{1 - 2\sigma}\eta_{mm}\delta_{ij} \tag{3.90}$$

o

$$P_{ij} = 2\mu\eta_{ij} + \lambda\eta_{mm}\delta_{ij}, \tag{3.91}$$

en donde λ y μ, conocidas como constantes de Lamé, están dadas por

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \tag{3.92}$$

La constante μ puede identificarse como la rigidez o el módulo de esfuerzo cortante. Considere un paralelepípedo fijo en el plano ($x_3 = 0$) con un esfuerzo tangencial P_{12} aplicado. El desplazamiento es $(\eta x_2, 0, 0)$. En términos de nuestro tensor de deformación, $\eta_{ij} = 0$ excepto para $\eta_{12} = \eta_{21} = \frac{1}{2}\eta$. De la Ec. 3.91

$$P_{12} = 2\mu \cdot \tfrac{1}{2}\eta = \mu\eta, \tag{3.93}$$

demostrando que μ es la relación del esfuerzo cortante a la deformación por esfuerzo cortante η.

Si la deformación es simétrica esféricamente, como en el caso de la presión hidrostática,

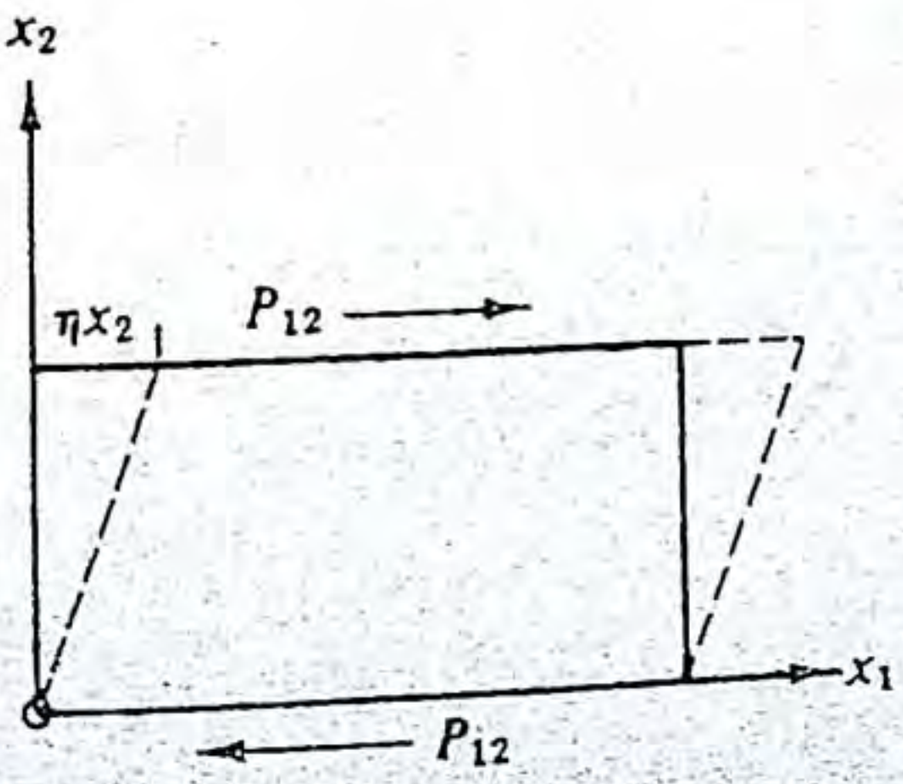


Fig. 3.8 Esfuerzo cortante: deformación por esfuerzo cortante.

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33}; \qquad \eta_{12} = \eta_{13} = \eta_{23} = 0. \tag{3.94}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P_{11} &= 3\lambda\eta_{11} + 2\mu\eta_{11} \\ &= 3k\eta_{11}, \end{aligned} \tag{3.95}$$

en donde

$$k = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu. \tag{3.96}$$

Ya que $3\eta_{11}$ es el cambio relativo del volumen de primer orden, identificamos k como el módulo volumétrico.

Para el caso general que incluye los sólidos anisotrópicos e isotrópicos, la relación lineal de esfuerzo-deformación se puede expresar como la ley de Hooke generalizada.

$$P_{ij} = c_{ijkl}\eta_{kl}, \tag{3.97}$$

en donde c_{ijkl} es un tensor de cuarta clase de acuerdo con el teorema del cociente. Ya que el tensor de esfuerzo P_{ij} es simétrico y el tensor de deformación η_{kl} es similarmente simétrico,

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk}, \tag{3.98}$$

reduciendo el número de componentes desde 81 (3^4) hasta 36. También se puede demostrar que[1]

$$c_{ijkl} = c_{klij}, \tag{3.99}$$

lo cual reduce adicionalmente el número de componentes independientes a 21.

Si aplicamos nuestra relación de tensor general (Ec. 3.97) a un cuerpo isotrópico, el tensor constante elástico c_{ijkl} debe ser una combinación lineal de los tensores isotrópicos más generales de cuarta clase. Utilizando los resultados del Ejercicio 3.4.9, se tiene

$$c_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] + c[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}]. \tag{3.100}$$

Sustituyendo en la Ec. 3.97,

$$P_{ij} = a\delta_{ij}\eta_{kk} + b(\eta_{ij} + \eta_{ji}) + c(\eta_{ij} - \eta_{ji}) \tag{3.101}$$

como antes. Ya que η_{ij} es simétrico, esto se reduce a

$$P_{ij} = a\eta_{kk}\delta_{ij} + 2b\eta_{ij}$$

de acuerdo completamente con la Ec. 3.91.

[1] Cf. I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, Nueva York: McGraw-Hill (1956).

EJERCICIOS

3.6.1 El tensor de esfuerzo-deformación de cuarta clase tridimensional c_{ijkl} satisface

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jilk}.$$

(a) demuestre que la aplicación de esta condición de simetría reduce el número de componentes independientes o elementos de c_{ijkl} desde 81 hasta 36.

(b) Si además se especifica que

$$c_{ijkl} = c_{klij},$$

demuestre que el número de componentes independientes disminuye hasta 21.

3.6.2 (a) ¿Cuáles argumentos son los que se pueden establecer para demostrar que la relación de Poisson σ no es negativa?

(b) Suponiendo que el módulo de esfuerzo cortante μ y el módulo volumétrico k no son negativos, establezca el límite superior para el valor de la relación de Poisson.

Respuesta. (b) $\sigma < 1/2$.

3.6.3 Calcule la energía potencial elástica (por unidad de volumen) de un cuerpo isotrópico elástico sometido a una pequeña deformación.

Respuesta. $\dfrac{W}{V} = \frac{1}{2}\lambda(\eta_{ii})^2 + \mu\eta_{ij}\eta_{ij}$.

3.6.4 La energía potencial de un sólido elástico deformado está dada por

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}c_{ijkl}\eta_{ij}\eta_{kl}.$$

Si el sólido tiene simetría cúbica,

(a) Demuestre que cualquier c_{ijkl} desaparece en donde cualesquier índice (1, 2, 3 o x, y, z) aparece un número *impar* de veces, es decir,

$$c_{1112} = 0$$

Sugerencia: Proceda a reflejar la coordenada que aparece un número impar de veces.

(b) Demuestre que se tiene un remanente de tres constantes elásticas distintas y diferentes de cero.

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333}$$

$$c_{1122} = c_{2211} = c_{1133}, \text{ etc.}$$

$$c_{1212} = c_{2121} = c_{1313}, \text{ etc.}$$

para un total de 15 elementos.

3.6.5 Si nuestro sólido es isotrópico, c_{ijkl} tendrá 15 componentes que no desaparecen. Exprese estos 15 componentes en términos del módulo de Young E y la relación de Poisson σ.

Respuesta. $c_{1111} = E\dfrac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$.

$$c_{1122} = E\frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = \lambda.$$

$$c_{1212} = E\frac{1}{2(1+\sigma)} = \mu.$$

3.6.6 El tensor de deformación original $\partial u_i/\partial x_k$ se puede reducir en el sentido indicado en la Sección 3.4. La reducción parcial, la separación del antisimétrico ξ_{ik}, se realiza en la primera parte de la Sección 3.6.
Completando la reducción se puede indicar

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta/3 & 0 & 0 \\ 0 & \eta/3 & 0 \\ 0 & 0 & \eta/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{11}-\eta/3 & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22}-\eta/3 & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33}-\eta/3 \end{pmatrix}.$$

Aquí η es la η_{ii} (escalar) contraída.
(a) Demuestre que el tensor $v_{ij} = \frac{1}{3}\eta\delta_{ij}$ describe el cambio de volumen y ningún cambio de la forma.
(b) Demuestre que el segundo tensor $s_{ij} = \eta_{ij} - \frac{1}{3}\eta\delta_{ij}$ describe el cambio de forma (esfuerzo cortante) sin ningún cambio en el volumen de primer orden.

3.6.7 (a) Derive la ecuación para las ondas en un medio elástico

$$m\,\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 = (k + \tfrac{4}{3}\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}.$$

Sugerencia: Considere la fuerza neta en un cubo unitario (masa m).
(b) Si el desplazamiento $\mathbf{u}$ no es rotacional, demuestre que las ondas elásticas se propagan con la velocidad $v = [(k + \frac{4}{3}\mu)/m]^{1/2}$ y que son longitudinales (ondas planas u ondas esféricas a grandes distancias).
(c) Si el desplazamiento $\mathbf{u}$ es solenoidal, demuestre que las ondas elásticas se propagan con la velocidad $v = (\mu/m)^{1/2}$ y que son transversales (ondas planas u ondas esféricas a grandes distancias).

3.7 Covariancia de Lorentz para las Ecuaciones de Maxwell

Se puede demostrar que las transformaciones de Lorentz correspondientes a la relatividad especial, en que se implica el tiempo y el espacio, son equivalentes a las rotaciones en el espacio especial de cuatro dimensiones.[1] Este espacio es el espacio de Minkowski con la cuarta coordenada $x_4 = ic\bar{t}$. Básicamente, la razón para la inclusión de la i imaginaria consiste en disponer de un espacio donde el teorema pitagórico cartesiano de tres dimensiones tiene la misma forma que el caso cartesiano tridimensional usual. Esto puede considerarse como un criterio de un sistema cartesiano. Nuestro problema inmediato consiste en volver a establecer las ecuaciones de Maxwell en la forma de tensor dentro de este espacio de Minkowski. Luego, si podemos hacer esto, y debido a las propiedades de transformación de nuestros tensores, la consistencia con la relatividad especial será automática. Tenemos

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3.102a}$$

[1] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley (1951), capítulo 6. La ecuación de tensor para un fotón $\sum x_\lambda^2 = 0$, independiente de la estructura de referencia, origina las transformaciones de Lorentz.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v}, \tag{3.102b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{3.102c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3.102d}$$

y las relaciones

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \tag{3.103}$$

Los símbolos tienen los significados usuales tal como se han indicado en la introducción. Por simplicidad supondremos vacío ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$).
En términos de potenciales de vector magnético y escalar se puede indicar

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \end{aligned} \tag{3.104}$$

La Ec. 3.104 especifica un rotacional de **A**; la divergencia de **A** aún es indefinida (cf. Secciones 1.13 y 1.15). Podemos, y para futura conveniencia así lo haremos, imponer una restricción adicional en el potencial de vector **A**,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{3.105}$$

Esta es la relación de Lorentz. Tendrá el propósito de desacoplar las ecuaciones diferenciales para **A** y φ que se indican más adelante. Los potenciales **A** y φ aún no se encuentran completamente fijos. La libertad restante es el tema del Ejercicio 3.7.3.

Ahora indicaremos nuevamente las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales **A** y φ. A partir de las Ecs. 3.102*c* y 3.104

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{3.106}$$

mientras que las Ecs. 3.102*b* y 3.104 y la Ec. 1.80 del Capítulo 1 originan

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}\} = \frac{\rho \mathbf{v}}{\varepsilon_0}. \tag{3.107}$$

Utilizando la relación de Lorentz, Ec. 3.105 y la relación $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$,

$$\begin{aligned} \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \mathbf{A} &= -\mu_0 \rho \mathbf{v}, \\ \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Ahora el operador diferencial

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

se transforma en el espacio de Minkowski

$$\sum_{\lambda=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}.$$

En este caso aplicamos subíndices griegos, tal como es costumbre en la teoría de la relatividad, para indicar la suma desde 1 hasta 4. Esta suma

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2},$$

es un laplaciano de cuatro dimensiones, que generalmente se denomina d'Alambertiano y que se designa como $\Box^2$. Fácilmente se puede demostrar que es un escalar (cf. Ejercicio 3.2.3).

Por conveniencia definimos

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \frac{A_x}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 A_x, \qquad & A_3 &\equiv \frac{A_z}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 A_z, \\ A_2 &\equiv \frac{A_y}{\mu_0 c} = c\varepsilon_0 A_y, \qquad & A_4 &\equiv i\varepsilon_0 \varphi. \end{aligned} \tag{3.109}$$

Si adicionalmente indicamos

$$\frac{\rho v_x}{c} \equiv i_1, \qquad \frac{\rho v_y}{c} \equiv i_2, \qquad \frac{\rho v_z}{c} \equiv i_3, \qquad i\rho \equiv i_4, \tag{3.110}$$

entonces la Ec. 3.108 puede indicarse en la forma

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2} A_\mu = -i_\mu. \tag{3.111}$$

La Ec. 3.111 aparenta ser una ecuación de tensor, pero las simples apariencias no constituyen una prueba. Para demostrar que es una ecuación de tensor, comenzamos investigando las propiedades de transformación de la corriente generalizada i_μ.

Ya que un elemento de carga eléctrica *de* es una cantidad invariante, se tiene

$$de = \rho\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \qquad \text{invariante.} \tag{3.112}$$

Hemos visto en la Sección 3.4 que el elemento de volumen de cuatro dimensiones $dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$ también era invariante. Comparando este resultado, la Ec. 3.53 con la Ec. 3.112, observamos que la densidad de carga ρ debe transformarse en la misma forma que dx_4, el cuarto componente del vector de cuatro dimensiones dx_λ. Establecemos $i\rho = i_4$, en que ahora i_4 se encuentra establecido como el cuarto componente de un vector. Las otras partes de la Ec. 3.110 se pueden desarrollar como

$$i_1 = \frac{\rho v_x}{c} = \frac{\rho}{c}\frac{dx_1}{dt} = \frac{i\rho}{ic}\frac{dx_1}{dt}$$

$$= i_4 \frac{dx_1}{dx_4}. \tag{3.113}$$

Ya que justamente hemos demostrado que i_4 se transforma como dx_4, esto significa que i_1 se transforma igual que dx_1. Con resultados similares para i_2 e i_3, se tiene que i_λ se transforma igual que dx_λ, demostrando que i_λ es un vector, un vector tiene cuatro dimensiones en el espacio de Minkowski.

La Ec. 3.111, que se deriva directamente de las ecuaciones de Maxwell, Ec. 3.102, se supone que es consistente en todos los sistemas cartesianos (todas las estructuras de Lorentz). Siendo así, mediante el teorema del cociente, Sección 3.3, A_μ también es vector y la Ec. 3.111 es ecuación de tensor legítima. Hacia atrás, la Ec. 3.104 puede establecerse así:

$$i\varepsilon_0 E_j = \frac{\partial A_j}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, 3,$$

$$\frac{1}{\mu_0 c} B_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \qquad (i, j, k) = (1, 2, 3) \tag{3.114}$$

y las permutaciones *cíclicas*. Definimos un nuevo tensor

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} \equiv f_{\mu\lambda} = -f_{\lambda\mu},$$

un tensor antisimétrico de segunda clase, ya que A_λ es un vector. Escrito de manera explícita

$$f_{\mu\lambda} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.115}$$

Con este tensor también podemos establecer dos de las ecuaciones de Maxwell (3.102*b*) y (3.102*c*) combinadas como una ecuación de tensor:

$$\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = i_\lambda. \tag{3.116}$$

El lado izquierdo de la Ec. 3.116 es una divergencia de cuatro dimensiones de un tensor y consecuentemente un vector. Evidentemente esto es equivalente a la contracción de un tensor de tercera clase $\partial f_{\lambda\mu}/\partial x_\nu$ (cf. Ejercicios 3.2.1 y 3.2.2). Las dos ecuaciones restantes de Maxwell (3.102*a*) y (3.102*d*) se pueden expresar en la forma de tensor

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} = 0 \tag{3.117}$$

para la Ec. 3.102*d* y tres ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} = 0 \tag{3.118}$$

para la Ec. 3.102*a*. (Una segunda ecuación permuta 124, una tercera permuta 134.) Ya que

$$\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} \equiv t_{\lambda\mu\nu}$$

es un tensor (de tercera clase), las Ecs. 3.102*a* y 3.102*d* están definidas por la ecuación de tensor

$$t_{\lambda\mu\nu} + t_{\nu\lambda\mu} + t_{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{3.119}$$

A partir de las Ecs. 3.117 y 3.118, el lector podrá comprender que los índices λ, μ y ν se supone que son diferentes. De hecho, la Ec. 3.119 se reduce automáticamente a $0 = 0$ cuando cualquiera de dos índices coincide.

El establecimiento de las ecuaciones de tensor (3.116) y (3.119) de hecho completa la demostración de la covariancia de Lorentz correspondiente a las ecuaciones de Maxwell, aunque probablemente es de interés explotar las propiedades de tensor de $f_{\lambda\mu}$ (Ec. 3.115). Para la transformación de Lorentz correspondiente al movimiento a lo largo del eje $z(x_3)$ con la velocidad v, los "cosenos de dirección" son[1]

$$a_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \tag{3.120}$$

en donde

$$\beta = \frac{v}{c}$$

y

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \tag{3.121}$$

Utilizando las propiedades de transformación de tensor, podemos calcular los campos eléctrico y magnético en el sistema móvil en términos de los valores de la estructura de referencia original. A partir de las Ecs. 3.13, 3.115 y 3.120 se obtiene

[1] Una derivación teórica de grupo de la transformación de Lorentz aparece en la Sección 4.12. Véase también Goldstein, Capítulo 6.

$$E'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_x - vB_y),$$

$$E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_y + vB_x), \tag{3.122}$$

$$E'_z = E_z,$$

y

$$B'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(B_x + \frac{v}{c^2}E_y\right),$$

$$B'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(B_y - \frac{v}{c^2}E_x\right), \tag{3.123}$$

$$B'_z = B_z.$$

Este acoplamiento de $\mathbb{E}$ y $\mathbb{B}$ es de esperarse. Considere, por ejemplo, el caso del campo eléctrico cero en el sistema sin imprimar

$$E_x = E_y = E_z = 0.$$

Evidentemente no existirá ninguna fuerza en la partícula cargada estacionaria. Cuando la partícula se encuentra en movimiento con una velocidad *pequeña* $\mathbb{v}$ a lo largo del eje z,[1] un observador visualiza los campos (ejerciendo fuerza en la partícula cargada) determinados por

$$E'_x = -vB_y,$$

$$E'_y = vB_x,$$

en donde $\mathbb{B}$ es el campo de inducción magnética en el sistema sin imprimar. Estas ecuaciones pueden establecerse en la forma de vector

$$\mathbb{E}' = \mathbb{v} \times \mathbb{B}$$

o (3.124)

$$\mathbb{F} = q\mathbb{v} \times \mathbb{B},$$

lo cual normalmente se considera como una definición operacional de la inducción magnética $\mathbb{B}$.

Finalmente, las propiedades de tensor (o vector) nos permiten construir una multitud de cantidades invariantes. Una de las formas más importantes es el producto escalar de dos vectores de cuatro dimensiones o de cuatro vectores A_λ e i_λ. Se tiene

$$A_\lambda i_\lambda = c\varepsilon_0 A_x \frac{\rho v_x}{c} + c\varepsilon_0 A_y \frac{\rho v_y}{c}$$

$$+ c\varepsilon_0 A_z \frac{\rho v_z}{c} + i\varepsilon_0 \varphi i\rho$$

$$= \varepsilon_0(\mathbb{A}\cdot\mathbb{J} - \rho\varphi), \qquad \text{invariante}, \tag{3.125}$$

[1] Cuando la velocidad no es pequeña (de modo que v^2/c^2 es despreciable), se requiere de una fuerza de transformación relativística.

siendo **A** el potencial de vector magnético usual y **J** la densidad de corriente ordinaria. El término final $\rho\varphi$ es el acoplamiento eléctrico estático ordinario con dimensiones de energía por unidad de volumen. En consecuencia, nuestra nueva invariante escalar construida es una densidad de energía. La interacción dinámica del campo y la corriente está dada por $\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}$. Otras invariantes electromagnéticas posibles aparecen en los Ejercicios 3.7.8 y 3.7.10.

EJERCICIOS

3.7.1 Demuestre que

$$\sum_{\mu} \frac{\partial i_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

representa un enunciado de la continuidad de la carga y la corriente (cf. Sección 1.7). Si se sabe que esta ecuación es consistente en todas las estructuras de referencia de Lorentz, ¿por qué no nos permite concluir que i_μ es un vector?

3.7.2 Escriba la condición de Lorentz (Ec. 3.105) como ecuación de tensor en el espacio de Minkowski.

3.7.3 Una transformación de norma consiste de la variación del potencial escalar φ_1 y el potencial de vector $\mathbf{A}_1$ de acuerdo con la relación

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \nabla\chi.$$

Se requiere que la nueva función χ satisfaga la ecuación de onda homogénea

$$\nabla^2\chi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0.$$

Demuestre lo siguiente:

(a) La relación de Lorentz no cambia.
(b) Los nuevos potenciales satisfacen las mismas ecuaciones de onda inhomogéneas del mismo modo que los potenciales originales.
(c) Los campos **E** y **B** no se alteran.

La invariancia de nuestra teoría electromagnética bajo esta transformación se denomina *invariancia de norma.*

3.7.4 Una partícula cargada, carga q, masa m, obedece la ecuación covariante de Lorentz

$$dp_\mu/d\tau = (q/\varepsilon_0 m_0 c) f_{\mu\nu} \mathbf{p}.$$

$\mathbf{p}$ es el vector de momento de cuatro dimensiones $(p_1, p_2, p_3, iE/c)$. τ es el tiempo apropiado; $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$, un escalar de Lorentz. Demuestre que las formas explícitas de espacio-tiempo son

$$d\mathbf{p}/dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$
$$dE/dt = q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}.$$

3.7.5 A partir de los elementos de matriz de transformación de Lorentz (Ec. 3.120) derive la ley de adición de velocidad de Einstein

$$u' = \frac{u - v}{1 - (uv/c^2)} \quad \text{o} \quad u = \frac{u' + v}{1 + (u'v/c^2)}$$

en donde $u = icdx_3/dx_4$ y $u' = icdx_3'/dx_4'$.

3.7.6 El dual del tensor de segunda clase de cuatro dimensiones $\mathbf{B}$ se puede definir mediante $\mathbf{B}^*$, en donde los elementos del tensor dual están definidos por

$$B_{ij}^* = \frac{1}{2!}\,\varepsilon_{ijkl}B_{kl}.$$

Demuestre que $\mathbf{B}^*$ se transforma como

(a) una tensor de segunda clase bajo las rotaciones,

(b) un pseudotensor bajo las inversiones.

Nota. El asterisco en este caso *no* significa un conjugado complejo.

3.7.7 Construya $\mathbf{f}^*$, dual de $\mathbf{f}$, donde $\mathbf{f}$ es el tensor electromagnético definido en la Ec. 3.115.

Respuesta. $$\mathbf{f}^* = \varepsilon_0\begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & cB_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & cB_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{pmatrix}$$

Esto corresponde a

$$c\mathbf{B} \to -i\mathbf{E},$$

$$-i\mathbf{E} \to c\mathbf{B}.$$

Esta transformación, denominada algunas veces "transformación dual", origina que las ecuaciones de Maxwell al vacío ($\rho = 0$) sean invariantes.

3.7.8 La contracción cuádruple de un pseudotensor de cuarta clase y dos tensores de segunda clase $\varepsilon_{\mu\lambda\nu\sigma}f_{\mu\lambda}f_{\nu\sigma}$ evidentemente es un pseudoescalar; proceda a evaluar esto.

Respuesta. $-8i\varepsilon_0^2 c\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}$.

3.7.9 (a) Si el campo electromagnético es puramente eléctrico (o puramente magnético) en una estructura de Lorentz particular, demuestre que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son ortogonales en otros sistemas de referencia de Lorentz.

(b) Alternativamente, si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son ortogonales en una estructura de Lorentz particular, existe un sistema de referencia de Lorentz en que $\mathbf{E}$ (o $\mathbf{B}$) desaparece. Encuentre el sistema de referencia.

3.7.10 Demuestre que $c^2B^2 - E^2$ es invariante.

3.7.11 Ya que (dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) es un vector, $dx_\mu\, dx_\mu$ es un escalar. Evalúe este escalar para una partícula en movimiento en dos sistemas coordenados diferentes: (a) sistema coordenado fijo con relación a usted (sistema lab), y (b) un sistema coordenado que se desplaza con una partícula en movimiento (velocidad v relativa a usted). Con el incremento designado como $d\tau$ en el sistema de la partícula y dt en el sistema lab, demuestre que

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

$d\tau$ o τ es el tiempo apropiado de la partícula, una cantidad invariante de Lorentz.

REFERENCIAS

HEITLER, W. *The Quantum Theory of Radiation,* 2a ed., Oxford: Oxford University Press (1947).

JEFFREYS, Harold, *Cartesian Tensors.* Cambridge: Cambridge University Press (1952). Esta es una excelente descripción de los tensores cartesianos y su aplicación en una amplia variedad de campos de la física clásica.

LAWDEN, Derek F., *An Introduction to Tensor Calculus and Relativity.* Nueva York: Wiley (monografía de Methuen), (1962).

MOLLER, C., *The Theory of Relativity.* Oxford: Oxford University Press (1955). La mayoría de los textos de la relatividad general incluyen una descripción del análisis de tensores. El Capítulo 4 desarrolla el cálculo de tensores, incluyendo el tema de los tensores duales. La extensión a los sistemas no cartesianos, de acuerdo con lo requerido por la relatividad general, se presenta en el Capítulo 9.

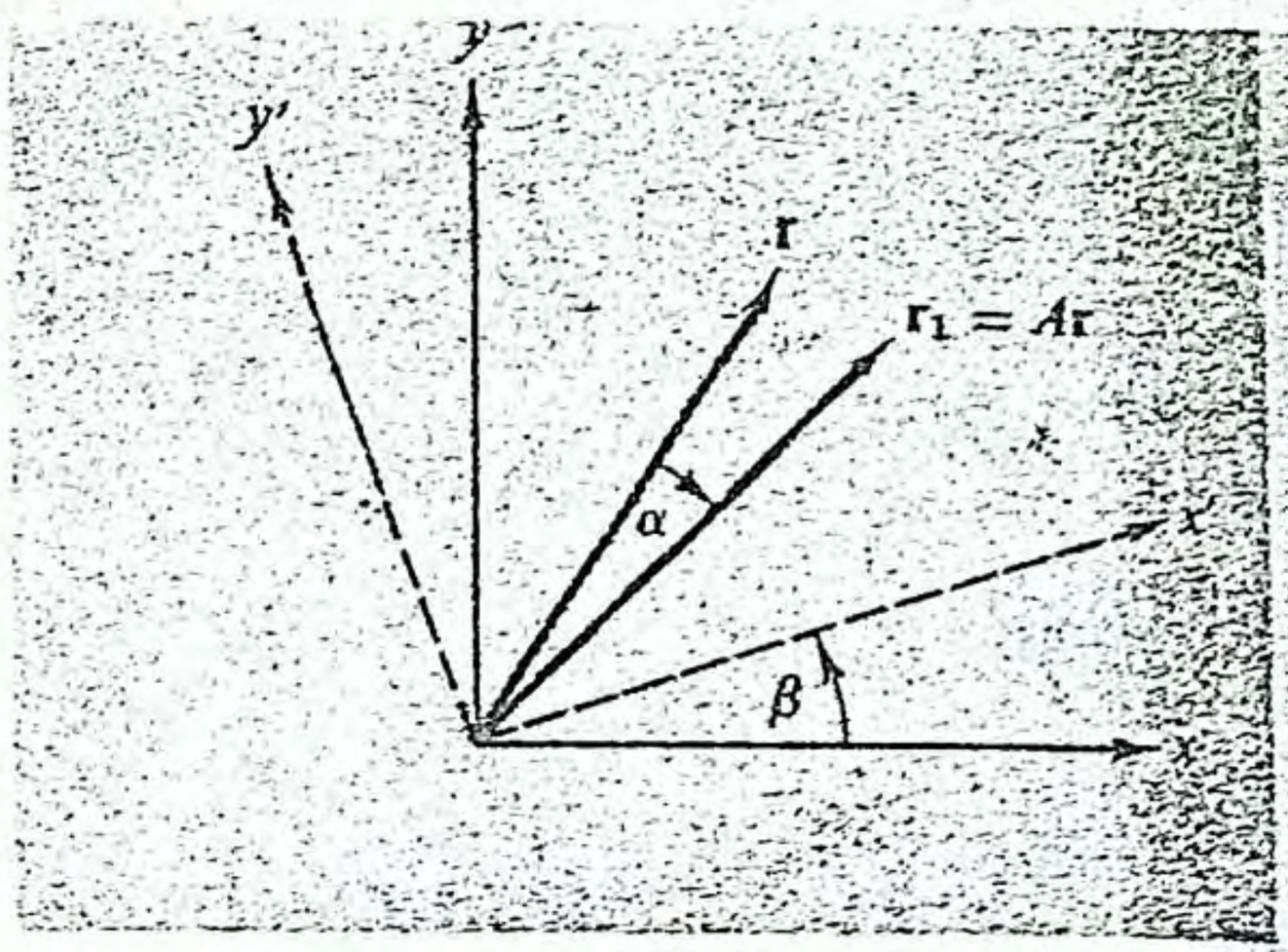
PANOFSKY, W. K. H. y M. PHILLIPS, *Classical Electricity and Magnetism.* Reading, Mass.: Addison-Wesley (1955). La covariancia de Lorentz de las ecuaciones de Maxwell se desarrolla tanto para el medio al vacío como material. Panofsky y Phillips utilizan los tensores contravariante y covariante más bien que el espacio de Minkowski. Las descripciones en que se utiliza el espacio de Minkowski se proporcionan por parte de Heitler y Stratton.

SOKOLNIKOFF, I. S., *Tensor Analysis-Theory and Applications.* Nueva York: Wiley (1951). De particular utilidad para la extensión del análisis de tensores a las geometrías no euclidianas.

SPAIN, B., *Tensor Calculus,* 3a, ed., Nueva York: Interscience Publishers (1960). Una presentación resumida de utilidad relacionada con los tensores y aplicaciones a la teoría de la relatividad y elasticidad.

STRATTON, J. A., *Electromagnetic Theory.* Nueva York: McGraw-Hill (1941).

TEMPLE, George. *Cartesian Tensors.* Nueva York: Wiley (monografía de Methuen) (1960).



CAPITULO 4

DETERMINANTES, MATRICES Y TEORÍA DE GRUPO

4.1 Determinantes

Iniciaremos nuestro estudio resumiendo algunas de las propiedades de los determinantes, en parte debido a que los determinantes son de utilidad en el análisis de las matrices y en parte para ilustrar, de modo contrastante, lo que no representan las matrices.

Propiedades. Un determinante es un arreglo cuadrado de números o funciones que pueden combinarse entre sí de acuerdo con la regla que se proporciona más adelante. Se tiene

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

El número de columnas (o de hileras) en el arreglo se denomina algunas veces el orden del determinante. En términos de sus elementos, a_i, b_j, etc., el valor del determinante D es

$$D = \sum_{i,j,k\cdots} \varepsilon_{ijk\ldots}\, a_i b_j c_k \cdots, \tag{4.2}$$

en donde $\varepsilon_{ijk}\ldots$, análogo al símbolo de Levi-Civita de la Sección 3.4, es $+1$ para las permutaciones par[1] de $(1, 2, 3, \ldots, n)$, -1 para las permutaciones nones y cero cuando cualquier índice se repite.

Específicamente, para el determinante de tercer orden, la Ec. 4.2 da lugar a

$$D = +a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1. \tag{4.3}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.4}$$

El determinante de tercer orden, entonces, es esta combinación lineal particular de productos. Cada producto contiene uno y solamente un elemento de cada hilera y de cada columna. Cada producto se suma cuando el orden representa una permutación par de hileras (siendo las columnas *a, b, c* o de orden 1, 2, 3) y se resta cuando se tiene una permutación impar. La Ec. 4.4 puede considerarse como una notación abreviada de la Ec. 4.3.

De la Ec. 4.4 se pueden derivar varias propiedades de utilidad de los determinantes de orden n. Nuevamente, para ser específicos, la Ec. 4.3 para los determinantes de tercer orden se utiliza para ilustrar estas propiedades.

Desarrollo Laplaciano por Menores. La Ec. 4.3 puede indicarse en la forma

$$\begin{aligned} D &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.5}$$

En general, el orden n de los determinantes puede desarrollarse como una combinación lineal de los productos de elementos correspondientes a cualquier hilera (o cualquier columna) y los determinantes de orden $(n-1)$se forman al cancelar la hilera y columna del determinante original en que aparece el elemento. Este arreglo reducido (2×2 en este ejemplo específico) se denomina "menor". Si el elemento se encuentra en la hilera i y la columna j, el signo asociado con el producto es $(-1)^{i+j}$. El menor con el signo $(-1)^{i+j}$ se denomina "cofactor". Si se utiliza M_{ij} para designar el menor formado al omitir la hilera i y la columna j, y cuando C_{ij} es el cofactor correspondiente, la Ec. 4.5 se transforma en

$$D = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_iM_{i1} = \sum_{i=1}^{3}a_iC_{i1}.$$

[1] En un arreglo lineal *abcd* . . ., cualquier transposición simple sencilla de los elementos adyacentes origina una permutación *impar* del arreglo original: $abcd \rightarrow bacd$. Dos de tales transposiciones originan una permutación par. En general, un número impar de tales intercambios de los elementos adyacentes origina una permutación impar; un número par de tales transposiciones origina una permutación par.

En este caso, desarrollando la primera columna, se tiene $j = 1$ y la suma sobre i.

Esta expresión de Laplace puede utilizarse convenientemente en la evaluación de los determinantes de orden superior en que una gran cantidad de elementos son cero. Por ejemplo, para encontrar el valor del determinante

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{4.6}$$

se procede al desarrollo a través de la hilera superior para obtener

$$D = (-1)^{1+2} \cdot (1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Nuevamente, al desarrollar a través de la hilera superior, se obtiene

$$\begin{aligned} D &= (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Este determinante D (Ec. 4.6) se forma a partir de una de las matrices de Dirac que aparecen en la teoría relativística del electrón de Dirac.

Antisimetría. El determinante cambia de signo cuando cualquiera de las dos hileras se intercambia o cuando dos columnas cualesquiera se intercambian. Esto se deriva del carácter par-impar de la ε de Levi-Civita en la Ec. 4.2 o explícitamente a partir de la forma de las Ecs. 4.4 y 4.3.[1]

Esta propiedad ha sido utilizada en la Sección 3.3 para el desarrollo de una combinación lineal totalmente antisimétrica. También se usa frecuentemente en la mecánica cuántica para la construcción de la función de onda de muchas partículas que, de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli, será antisimétrica bajo el intercambio de dos partículas cualesquiera de spin $\frac{1}{2}$ (electrones, protones, neutrones, etc.).

Como caso especial de la antisimetría, cualquier determinante con dos hileras iguales o dos columnas iguales equivale a cero.

Si cada elemento en una hilera o cada elemento en una columna se multiplica por una constante, el determinante queda multiplicado por la constante.

[1] La inversión de signo es evidentemente razonable para el intercambio de dos hileras (o columnas) adyacentes, siendo por supuesto esto una permutación impar. El lector quizás pudiera desear demostrar que el intercambio de dos hileras *cualesquiera* aún representa una permutación impar.

El valor del determinante permanece sin cambio si se agrega un múltiplo de una hilera (columna por columna) a otra hilera o cuando un múltiplo de una columna se agrega (hilera por hilera) a otra columna.

Se tiene

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4.9}$$

Utilizando el desarrollo de Laplace en el lado derecho,

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.10}$$

entonces mediante la propiedad de la antisimetría el segundo determinante en el lado derecho de la Ec. 4.10 desaparece, verificando así la Ec. 4.9.

Como caso especial, un determinante es igual a cero cuando dos hileras cualesquiera son proporcionales o cuando dos columnas cualesquiera son proporcionales.

Solución de un Conjunto de Ecuaciones Homogéneas. Una de las principales aplicaciones de los determinantes es en el establecimiento de una condición para la existencia de una solución no trivial para un conjunto de ecuaciones algebraicas homogéneas lineales. Suponga que se tienen tres ecuaciones homogéneas con tres incógnitas (o n ecuaciones con n incógnitas).

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

El problema consiste en determinar si existe cualquier solución, además de la trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Mediante la formación del determinante de los coeficientes de la Ec. 4.11 y luego multiplicando por x,

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4.12}$$

La etapa final se deriva de la Ec. 4.9, aunque mediante la Ec. 4.11 cada elemento de la primera columna desaparece. Siendo así,

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.13}$$

En consecuencia, x (así como y y z) deben ser cero *a menos de que el determinante de los coeficientes desaparezca.* Alternativamente, se puede demostrar que cuando el determinante de los coeficientes desaparece, de hecho existe una solución no trivial. Esto se utiliza en la Sección 8.5 para establecer la dependencia o independencia lineal de un conjunto de funciones.

Solución de un Conjunto de Ecuaciones No Homogéneas. Si nuestras ecuaciones algebraicas lineales no son homogéneas, es decir si los ceros del lado derecho de la Ec. 4.11 se sustituyen por d_1, d_2 y d_3 respectivamente, entonces a partir de la Ec. 4.12 se obtiene en lugar de la Ec. 4.13[1]

$$x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{4.14}$$

Para el trabajo numérico, esta solución de determinante, Ec. 4.14, es excesivamente inmanejable. El determinante puede implicar números grandes con signos alternados y en la resta de dos números grandes el error relativo puede llevar hasta una situación en que el resultado no sea de utilidad. Asimismo, aun cuando el método de los determinantes se ilustra aquí con tres ecuaciones y tres incógnitas, también sería fácil que tuviéramos veinte ecuaciones y veinte incógnitas. A partir de la definición de determinante (Ec. 4.2), nuestro determinante de orden n puede tener $n!$ términos. Si se pretendiera que una computadora electrónica de alta velocidad calculara los $n!$ términos a la tasa de uno cada microsegundo, la calculadora aún requeriría de 20! microsegundos o sea 77 000 años. Debe existir una forma más adecuada.

De hecho, existen mejores procedimientos. Uno de los más adecuados es el proceso de eliminación directa que frecuentemente se denomina eliminación de Gauss. Para ilustrar esta técnica, considere el siguiente conjunto de ecuaciones.

[1] El Ejercicio 1.5.10 proporciona el análogo vectorial de la Ec. 4.14.

EJEMPLO 4.1.4 ELIMINACION DE GAUSS

Resuelva

$$\begin{aligned} 3x + 2y + \ \ z &= 11 \\ 2x + 3y + \ \ z &= 13 \\ x + \ \ y + 4z &= 12. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Por conveniencia y para el logro de la precisión numérica óptima, las ecuaciones se readaptan de modo que los coeficientes mayores queden a lo largo de la diagonal principal (izquierda superior a derecha inferior). Esto ya ha sido realizado en el conjunto anterior.

La técnica de Gauss consiste en utilizar la primera ecuación para eliminar la primera incógnita, x, del resto de las ecuaciones. Luego, la segunda ecuación (nueva) se utiliza para eliminar y de la última ecuación. En general, se continúa trabajando con el conjunto de ecuaciones y, con una incógnita determinada, se trabaja de regreso hasta resolver cada una de las incógnitas en sucesión.

Dividiendo cada hilera entre su coeficiente inicial, la Ec. 4.15 se transforma en

$$\begin{aligned} x + 0.6667\,y + 0.3333\,z &= \ \ 3.6667 \\ x + 1.5000\,y + 0.5000\,z &= \ \ 6.5000 \\ x + 1.0000\,y + 4.0000\,z &= 12.0000. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ahora, utilizando la primera ecuación se elimina x de la segunda y tercera:

$$\begin{aligned} x + 0.6667\,y + 0.3333\,z &= 3.6667 \\ 0.8333\,y + 0.1667\,z &= 2.8333 \\ 0.3333\,y + 3.6667\,z &= 8.3333, \end{aligned} \tag{4.17}$$

y

$$\begin{aligned} x + 0.6667\,y + \ \ 0.3333\,z &= \ \ 3.6667 \\ y + \ \ 0.2000\,z &= \ \ 3.4000 \\ y + 11.0000\,z &= 25.0000. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Repitiendo la técnica, la nueva segunda ecuación se utiliza para eliminar y de la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} x + 0.6667\,y + \ \ 0.3333\,z &= \ \ 3.6667 \\ y + \ \ 0.2000\,z &= \ \ 3.4000 \\ 10.8000\,z &= 21.6000, \end{aligned} \tag{4.19}$$

o

$$z = \ \ 2.0000.$$

Finalmente, trabajando hacia atrás

$$y + 0.2000 \times 2.0000 = 3.4000,$$

o

$$y = 3.0000.$$

Luego, con z e y determinadas

$$x + 0.6667 \times 3.0000 + 0.3333 \times 2.0000 = 3.6667,$$

y

$$x = 1.0000.$$

Esta técnica pudiera no parecer tan elegante como la Ec. 4.14, pero se adapta bien a las máquinas de computación modernas, y es más rápida que el tiempo gastado con los determinantes.

Una variación de esta eliminación progresiva se conoce como eliminación de Gauss-Jordan. Se empieza igual que en la eliminación de Gauss descrita antes, pero cada nueva ecuación considerada se utiliza para eliminar una variable de *todas* las otras ecuaciones, no tan solo las que se encuentran abajo. Si hubiéramos utilizado esta eliminación de Gauss-Jordan antes, la Ec. 4.19 se transformaría en

$$\begin{aligned} x \quad\quad + 0.2000\, z &= 1.4000 \\ y + 0.2000\, z &= 3.4000 \\ z &= 2.0000, \end{aligned} \tag{4.20}$$

utilizando la segunda ecuación de la Ec. 4.18 para eliminar y de la primera y tercera ecuaciones. Luego, la tercera ecuación de la Ec. 4.20 se utiliza para eliminar z de la primera y segunda, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 1.0000 \\ y \quad &= 3.0000 \\ z &= 2.0000. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Regresaremos a esta técnica de Gauss-Jordan en la Sección 4.2 para la inversión de las matrices.

Otra técnica adecuada para las computadoras es el método iterativo de Gauss-Seidel. Este método y las técnicas de eliminación de Gauss y Gauss-Jordan se describen con gran detalle en *Mathematical Methods for Digital Computers* (A. Ralston y H. S. Wilf, eds.). Nueva York: Wiley (1967).

EJERCICIOS

4.1.1 Evalúe los siguientes determinantes

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4.1.2 Ensaye con el conjunto de ecuaciones homogéneas lineales

$$x + 3y + 3z = 0,$$
$$x - y + z = 0,$$
$$2x + y + 3z = 0,$$

para determinar si tiene una solución no trivial.

4.1.3 Exprese los *componentes* de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ como determinantes de 2×2. Demuestre luego que el producto escalar $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ origina un desarrollo laplaciano de un determinante 3×3. Finalmente, observe que dos hileras del determinante 3×3 son iguales y consecuentemente $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$.

4.1.4 Si C_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} (formado al cancelar la hilera i y la columna j e incluyendo el signo $(-1)^{i+j}$), demuestre que

(a) $\sum_i a_{ij}C_{ij} = \sum_i a_{ji}C_{ji} = |A|$, en donde $|A|$ es el determinante con los elementos a_{ij},

(b) $\sum_i a_{ij}C_{ik} = \sum_i a_{ji}C_{ki} = 0, \qquad j \neq k.$

4.2 Matrices

Definiciones Básicas. Una matriz puede definirse como un arreglo cuadrado o rectangular de números o funciones que obedece ciertas leyes. Esto es una extensión perfectamente lógica de los conceptos matemáticos ya conocidos. En la aritmética tratamos con los números simples. En la teoría de las variables complejas (Capítulo 6) trataremos los pares ordenados de números $(1, 2) = 1 + 2i$, en donde la ordenación es importante. Ahora procederemos a considerar los números (o funciones) ordenados en un arreglo cuadrado o rectangular. Por conveniencia en el trabajo posterior, los números se distinguen por medio de dos subíndices, el primero indicando la hilera (horizontal) y el segundo indicando la columna (vertical) en que aparece el número. Por ejemplo, a_{13} es la matriz del elemento en la primera hilera, tercera columna. En consecuencia, si $\mathbf{A}$ es la matriz con m hileras y n columnas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Probablemente lo más importante que debe hacerse notar es que los elementos a_{ij} no se combinan entre sí. La matriz no es un determinante. No es un número simple; consiste de un arreglo ordenado de números. No tiene más sentido sumar o multiplicar todas las a_{ij} entre sí de lo que tendría que escribir $1 + 2i = 3$!

La matriz **A**, al menos en lo que respecta a un arreglo de números, tiene las propiedades que le asignemos. Literalmente, esto significa construir una nueva forma de matemáticas. Postulamos que las matrices A, B y **C**, con los elementos a_{ij}, b_{ij} y c_{ij}, respectivamente, se combinan de acuerdo con las siguientes reglas:

Igualdad. La matriz A = matriz **B** solamente cuando $a_{ij} = b_{ij}$ para todos los valores de i y j. Evidentemente, esto requiere que **A** y **B** representen individualmente m por n arreglos (m hileras, n columnas).

Suma. $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$ solamente cuando $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ para todos los valores de i y j, en que los elementos se combinan de acuerdo con las leyes del álgebra ordinaria (o aritmética cuando son números simples). Esto significa que $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A}$, la conmutación. Asimismo, se satisface una ley asociativa $(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C})$.

Multiplicación (por un Escalar). La multiplicación de la matriz **A** por la cantidad escalar α está definida por

$$\alpha\mathsf{A} = (\alpha\mathsf{A}),$$

en donde los elementos de $\alpha\mathsf{A}$ son αa_{ij}; es decir, cada elemento de la matriz **A** se multiplica por el factor escalar. Esto constituye un gran contraste con el comportamiento de los determinantes en que el factor α multiplica solamente una columna o una hilera y no cada elemento de todo el determinante. Una consecuencia de esta multiplicación por el escalar es que

$$\alpha\mathsf{A} = \mathsf{A}\alpha, \text{ conmutación}.$$

Multiplicación (Multiplicación de Matriz).

$$\mathsf{AB} = \mathsf{C} \quad \text{si y solamente cuando } c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}.^{1} \tag{4.23}$$

El elemento ij de **C** se forma de un producto escalar de la hilera i de **A** con la columna j de **B** (lo cual requiere que **A** tenga el mismo número de columnas (n) como **B** tiene de hileras. El índice ficticio k adquiere todos los valores $1, 2, \cdots, n$ en sucesión, es decir

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \tag{4.24}$$

para $n = 3$. Evidentemente, el índice ficticio k puede sustituirse por cualquier otro símbolo que no se haya utilizado sin alterar la Ec. 4.23. Probablemente, esta situación pueda aclararse al establecer que la Ec. 4.23 define el método de combinar algunas matrices. Este método de combi-

[1] En este caso, algunos autores siguen la convención de la suma (cf. Sección 3.1).

nación, para darle algún nombre, se denomina multiplicación de matriz. Para ilustrar, considere dos matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

El elemento 11 del producto, $(\sigma_1\sigma_3)_{11}$ está determinado por la suma de los productos de los elementos de la primera *hilera* de σ_1 con los elementos correspondientes de la primera *columna* de σ_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Continuando, se tiene

$$\sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Aquí

$$(\sigma_1\sigma_3)_{ij} = \sigma_{1_{i1}}\,\sigma_{3_{1j}} + \sigma_{1_{i2}}\,\sigma_{3_{2j}}$$

La aplicación directa de la definición de multiplicación de matriz demuestra que

$$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

y mediante la Ec. 4.23

$$\sigma_3\sigma_1 = -\,\sigma_1\sigma_3\,. \tag{4.28}$$

Excepto en los casos especiales, la multiplicación de matriz no es conmutativa.[1]

$$\mathsf{AB} \neq \mathsf{BA}. \tag{4.29}$$

Sin embargo, a partir de la definición de multiplicación de matriz, se puede demostrar que la ley asociativa es consistente: $(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$. También existe una ley distributiva: $\mathsf{A}(\mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{AB} + \mathsf{AC}$.

Producto Directo. Un segundo procedimiento para la multiplicación de las matrices, denominado *producto directo* o *producto de tensor,* es como sigue. Si **A** es una matriz de $(m \times m)$ y **B** es una matriz de $(n \times n)$ entonces el producto directo es

$$\mathsf{A} \otimes \mathsf{B} = \mathsf{C}. \tag{4.30}$$

C es una matriz de $(mn \times mn)$ con los elementos

$$C_{ik,jl} = A_{ij}B_{kl}\,. \tag{4.31}$$

[1] La conmutación o la falta de la misma se describe convenientemente por medio del símbolo de paréntesis conmutador: $[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = \mathsf{AB} - \mathsf{BA}$. La Ec. 4.29 se transforma en $[\mathsf{A}, \mathsf{B}] \neq 0$.

Por ejemplo, si A y B son matrices de 2×2,

$$\mathsf{A} \otimes \mathsf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathsf{B} & a_{12}\mathsf{B} \\ a_{21}\mathsf{B} & a_{22}\mathsf{B} \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

El producto directo es asociativo pero no conmutativo. Como ejemplo del producto directo, las matrices de Dirac de la Sección 4.5 pueden desarrollarse en la forma de productos directos de las matrices de Pauli y la matriz unitaria. Otros ejemplos aparecen en la construcción de grupos en la teoría de grupos y en el espacio de Hilbert de la teoría mecánica.

Casos Especiales. Algunas matrices son de interés especial. Cuando la matriz tiene una columna y n hileras, se denomina vector de columna, $\{x\}$ con los componentes x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$.

De modo similar, si la matriz tiene una hilera y n columnas, se denomina vector de hilera, $[x]$ con los componentes x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$. Evidentemente, si A es una matriz de $n \times n$, $\{x\}$ es un vector de columna de n componentes y $[x]$ es un vector de hilera de n componentes.

$$\mathsf{A}\{x\} \quad \text{y} \quad [x]\mathsf{A}$$

están definidos mediante la Ec. 4.23, mientras que

$$\mathsf{A}[x] \quad \text{y} \quad \{x\}\mathsf{A}$$

no están definidos.

En el resto de este capítulo limitaremos nuestra atención a los vectores de columna, los vectores de hilera y las matrices cuadradas.

La matriz unitaria 1 tiene los elementos δ_{ij}, la delta de Kronecker, y la propiedad de que $1\mathsf{A} = \mathsf{A}1 = \mathsf{A}$ para todas las A.

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

Si todos los elementos son cero, la matriz se denomina matriz nula y se designa por O. Para todas las A

$$\mathsf{OA} = \mathsf{AO} = \mathsf{O}.$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Es de hacerse notar la posibilidad de que el producto de dos matrices sea una matriz nula aun cuando ninguna sea una matriz nula. Ejemplo: si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$AB = O$. Una vez más, los resultados del álgebra ordinaria no se aplican directamente.

Matrices Diagonales. Un tipo de matriz de especial importancia es la matriz cuadrada en que todos los elementos no diagonales son cero. Específicamente, si una matriz A de 3×3 es diagonal,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La interpretación física de tales matrices diagonales y del método de reducir las matrices a la forma diagonal se considera en la Sección 4.6. Aquí se hace notar una propiedad significativa de las matrices diagonales: la multiplicación de matrices diagonales es conmutativa,

$$AB = BA, \text{ si } A \text{ y } B \text{ son cada una diagonales.}$$

Traza. En cualquier matriz cuadrada, la suma de los elementos diagonales se denomina *traza*. Una de sus propiedades interesantes y de utilidad es que la traza de un producto de dos matrices **A** y **B** es independiente del orden de la multiplicación:

$$\begin{aligned} \text{traza}\,(AB) &= \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \sum_j (BA)_{jj} \\ &= \text{traza}\,(BA). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Esto es consistente aun para $AB \neq BA$.

Las matrices se utilizan ampliamente para representar los elementos de grupos (cf. Ejercicio 4.2.7 y Secciones 4.7-4.12). La traza de la matriz que representa el elemento de grupo se conoce en la teoría de grupos con la denominación *carácter*. La razón de este nombre especial y esta atención especial es que, aun cuando las matrices pueden variar, la traza o el carácter permanecen invariantes (cf. Ejercicio 4.2.9).

Inversión de Matriz. Considere la matriz A por conocerse. El problema consiste en conocer la matriz inversa A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1. \tag{4.36}$$

Según el Ejercicio 4.2.27: $$a_{ij}^{-1} = \frac{C_{ji}}{|A|}, \tag{4.37}$$

con la suposición de que el determinante de A ($|A|$) $\neq 0$. Si es cero, la denominamos A simplemente. No existe inversa. Esta conclusión de que debemos requerir que $|A| \neq 0$ es casi el único uso de la Ec. 4.37. Tal como se explica al final de la Sección 4.1, esta forma de determinante es *totalmente inadecuada para el trabajo numérico* con matrices grandes.

Hay muchas técnicas alternativas. Una de las mejores y más comúnmente utilizadas es la de inversión de matrices de Gauss-Jordan. La teoría está basada en los resultados de los Ejercicios 4.2.28-29, que demuestra que hay matrices M_L tales que el producto $M_L A$ es A, pero con

(a) una hilera multiplicada por una constante, o
(b) una hilera sustituida por la hilera original menos un múltiplo de otra hilera, o
(c) hileras intercambiadas.

Otras matrices M_R que operan en (AM_R) pueden establecer las mismas operaciones en las *columnas* de A.

Esto significa que las hileras y columnas de la matriz se pueden alterar (mediante la multiplicación de matriz) igual que cuando se trata de determinantes, y de modo que podemos aplicar las técnicas de eliminación de Gauss-Jordan de la Sección 4.1 a los elementos de la matriz. En consecuencia, existe una matriz M_L (o M_R) tal que[1]

$$M_L A = 1. \tag{4.38}$$

Entonces $M_L = A^{-1}$. Determinamos M_L efectuando las mismas operaciones de eliminación en la matriz unitaria. Siendo asi,

$$M_L 1 = M_L. \tag{4.39}$$

Para aclarar esto, considere un ejemplo especifico.

EJEMPLO 4.2.1 INVERSION DE MATRIZ DE GAUSS-JORDAN

Se desea invertir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

[1] Recuerde que det (A) $\neq 0$.

Por conveniencia, se escribe A y 1 lado a lado y se realizan las mismas operaciones en cada uno:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Para ser sistemáticos, multiplicamos cada hilera para obtener $a_{k1} = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.6667 & 0.3333 \\ 1 & 1.5000 & 0.5000 \\ 1 & 1.0000 & 4.0000 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Restando la primera hilera de la segunda y tercera, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.6667 & 0.3333 \\ 0 & 0.8333 & 0.1667 \\ 0 & 0.3333 & 3.6667 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0.5000 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Luego dividimos la segunda hilera (de *ambas* matrices) entre 0.8333 y se resta 0.6667 veces la misma de la primera hilera, y 0.3333 veces de la tercera hilera. Los resultados para ambas matrices son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2000 \\ 0 & 1 & 0.2000 \\ 0 & 0 & 3.6000 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0.6000 & -0.4000 & 0 \\ -0.4000 & 0.6000 & 0 \\ -0.2000 & -0.2000 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Dividimos la tercera hilera (de ambas matrices) entre 3.6. Luego, como última etapa, 0.2 veces la tercera hilera se resta de cada una de las dos primeras hileras (de ambas matrices). Nuestro par final es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0.6111 & -0.3889 & -0.0556 \\ -0.3889 & 0.6111 & -0.0556 \\ -0.0556 & -0.0556 & 0.2778 \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

La comprobación de esto consiste en multiplicar la A original por la A^{-1} calculada para determinar si realmente se obtiene la matriz unitaria 1. El resultado de cuatro lugares decimales es

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0.9999 & -0.0001 & -0.0002 \\ -0.0001 & 0.9999 & -0.0002 \\ -0.0002 & -0.0002 & 1.0000 \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

o sea 1, la matriz unitaria dentro del error de redondeo (la mayor parte del mismo procedente del redondeo de —0.055555. . . a —0.0556).

Igual que en la solución de Gauss-Jordan para las ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, esta técnica se adapta bien a las máquinas de computación grandes. De hecho, esta técnica de inversión de matrices de Gauss-Jordan probablemente se encuentre disponible en el archivo de programas en forma de una subrutina.

EJERCICIOS

4.2.1 Demuestre que la multiplicación de matriz es asociativa: $(AB)C = A(BC)$.

4.2.2 Demuestre que

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

si y solamente cuando A y B se conmutan,

$$[A, B] = 0.$$

4.2.3 Demuestre que la matriz A es un *operador lineal,* al demostrar que

$$A(c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2) = c_1A\mathbf{r}_1 + c_2A\mathbf{r}_2 .$$

Se puede demostrar que una matriz $n \times n$ es el operador lineal *más general* en un espacio de vector n dimensional. Esto significa que cada operador lineal en este espacio de vector n dimensional equivale a una matriz.

4.2.4 (a) Los números complejos, $a + ib$, con a y b reales, se pueden representar por medio de (o son isomórficos con) las matrices 2×2 :

$$a + ib \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Demuestre que esta representación de matriz es válida para (i) la suma y (ii) la multiplicación.

(b) Encuentre la matriz correspondiente a $(a + ib)^{-1}$.

4.2.5 Si A es una matriz $n \times n$ demuestre que

$$\det(-A) = (-1)^n \det A.$$

4.2.6 La matriz es el producto de matriz de A y B. Demuestre que el determinante de C es el producto de los determinantes de A y B.

$$\det C = \det A \times \det B.$$

4.2.7 Teniendo las tres matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentre todos los productos posibles de A, B y C, dos a la vez, incluyendo los cuadrados. Exprese las respuestas en términos de A, B y C y 1, la matriz unitaria.

Estas tres matrices en conjunto con la matriz unitaria forman una representación de un grupo matemático, el *vierergruppe.*
Las Secciones 4.7 y 4.8 (Teoría de grupos) contienen referencias repetidas a este grupo.

4.2.8 Teniendo

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

demuestre que

$$K^n = KKK \cdots (n \text{ factores}) = 1$$

(con la selección adecuada de n, $n \neq 0$).

4.2.9 Verifique la identidad de Jacobi

$$[A, [B, C]] = [B, [A, C]] - [C, [A, B]].$$

Esta es de utilidad en las descripciones de matriz para las partículas elementales. A modo de ayuda mnemotécnica, el lector podrá notar que la identidad de Jacobi tiene la misma forma que la regla *BAC-CAB* de la Sección 1.5.

4.2.10 Demuestre que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfacen las relaciones de conmutación

$$[A, B] = C, \quad [A, C] = 0 \quad \text{y} \quad [B, C] = 0.$$

Estas matrices se han utilizado en un procedimiento algebraico de Lie relacionado con los polinomios de Hermite.[1]

4.2.11 Sea

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demuestre que
(a) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, en donde 1 es la matriz unitaria
(b) $ij = -ji = k$,
$jk = -kj = i$,
$ki = -ik = j$.

[1]Bruria Kaufman, "Special Functions of Mathematical Physics from the Viewpoint of Lie Algebra", *J. Mathematical Phys.* 7, 447 (1966).

Estas tres matrices (i, j y k) además de la matriz unitaria 1 forman la base de los *cuaterniones*. Una base alternativa la dan las matrices 2×2, $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $-i\sigma_3$ y en donde los términos σ son las matrices de spin de Pauli del Ejercicio 4.2.12.

4.2.12 Las tres matrices de spin de Pauli son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que

(a) $\sigma_i^2 = 1$,

(b) $\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k$, $\quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ (permutación cíclica),

(c) $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\,1$.

Estas matrices han sido empleadas por Pauli en la teoría no relativística del spin del electrón.

4.2.13 Utilizando los términos σ de Pauli del Ejercicio 4.2.12, demuestre que

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\,1 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Aquí

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbf{i}\sigma_x + \mathbf{j}\sigma_y + \mathbf{k}\sigma_z$$

y **a** y **b** son vectores ordinarios.

4.2.14 Una descripción de las partículas de spin 1 utiliza las matrices

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que

(a) $[M_x, M_y]$ [1] $= iM_z$, etc. (permutación cíclica de los índices).

Utilizando el símbolo de Levi-Civita de la Sec. 3.4, esto puede indicarse en la forma

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk} M_k.$$

(b) $M^2 \equiv M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = 2\mathbf{1}$,

en donde $\mathbf{1}$ es la matriz unitaria

(c) $[M^2, M_i] = 0$,

$[M_z, L^+] = L^+$,

$[L^+, L^-] = 2M_z$

en donde

$L^+ \equiv M_x + iM_y$,

$L^- \equiv M_x - iM_y$.

4.2.15 Repita el Ejercicio 4.2.14 utilizando una representación alternativa,

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$M_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] $[A, B] \equiv AB - BA$.

En la Sección 4.10, estas matrices aparecen como los *generadores* de las matrices de rotación.

4.2.16 Repita el Ejercicio 4.2.14 utilizando las matrices de spin de $\frac{3}{2}$,

$$M_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_y = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$M_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

4.2.17 Un operador $\mathbf{P}$ conmuta con J_x y J_y, en que x e y son los componentes de un operador de momento angular. Demuestre que $\mathbf{P}$ conmuta con el tercer componente del momento angular, es decir

$$[P, J_z] = 0.$$

Sugerencia. Los componentes del momento angular deben satisfacer la relación de conmutación del Ejercicio 4.2.14(a).

4.2.18 Las matrices L^+ y L^- del Ejercicio 4.2.14 son los "operadores sucesivos". L^+ operando en un sistema de proyección de spin m aumentará la proyección del spin hasta $m+1$ cuando m se encuentra abajo de su máximo. L^+ operando en $m_{\text{máx}}$ da como resultado cero. L^- reduce la proyección del spin en etapas de uno de modo similar. Dividiendo entre $\sqrt{2}$,

$$L^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que

$$\begin{aligned} &L^+\{-1\} = \{0\}, \quad L^-\{-1\} = \text{vector de columna nulo}, \\ &L^+\{0\} \quad = \{1\}, \quad L^-\{0\} = \{-1\}, \\ &L^+\{1\} \quad = \text{vector de columna nulo}, \; L^-\{1\} = \{0\}. \end{aligned}$$

en donde

$$\{-1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \{0\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \{1\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

representando los estados de proyección de spin -1, 0 y 1, respectivamente.
Nota. Los análogos de los operadores diferenciales de estos operadores de escala aparecen en el Ejercicio 12.6.7.

4.2.19 Los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ están relacionados con el tensor $\mathbf{T}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{A}.$$

Habiendo establecido $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, demuestre que *no hay una solución única* para los componentes de $\mathbf{T}$. A esto se debe el que la división de vector $\mathbf{B}/\mathbf{A}$ sea indefinida (aparte del caso especial de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ paralelos entonces a $\mathbf{T}$, un escalar).

4.2.20 Se podría desear conocer un vector $\mathbf{A}^{-1}$, el inverso de un vector $\mathbf{A}$ dado en el sentido de que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = 1.$$

Demuestre que esta relación no es suficiente para definir $\mathbf{A}^{-1}$ de modo único. $\mathbf{A}$ tiene literalmente un número infinito de inversos.

4.2.21 Si $\mathbf{A}$ es diagonal, en que todos los elementos diagonales son distintos, y considerando que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se conmutan, demuestre que $\mathbf{B}$ es diagonal.

4.2.22 Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son diagonales, demuestre que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se conmutan.

4.2.23 Demuestre que la traza $(\mathbf{ABC})$ = traza $(\mathbf{CBA})$ cuando cualquiera de dos de las tres matrices conmutan.

4.2.24 Siendo $\{x\}$ un vector de columna N dimensional y $[y]$ un vector de hilera N dimensional, demuestre que

$$\text{traza}\,(\{x\}[y]) = [y]\{x\}.$$

4.2.25 (a) Si dos matrices no singulares anticonmutan, demuestre que la traza de cada una de las mismas es cero. (No singular significa que el determinante de los elementos de matriz $\neq 0$.)

(b) Para que las condiciones de la parte (a) sean consistentes, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ deben ser matrices de $n \times n$ siendo n *par*. Demuestre que cuando n es *impar*, resulta una contradicción.

4.2.26 Si una matriz tiene un inverso, demuestre que el inverso es único.

4.2.27 Si A^{-1} tiene los elementos

$$a_{ij}^{-1} = \frac{C_{ji}}{|\mathsf{A}|}$$

en donde C_{ji} es el cofactor número ji de $|\mathsf{A}|$. Demuestre que

$$\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = 1.$$

En consecuencia A^{-1} es el inverso de $\mathbf{A}$ (si $|\mathsf{A}| \neq 0$).

Nota. En el trabajo numérico, algunas veces sucede que $|\mathsf{A}|$ es casi igual a cero. En estas condiciones, se tiene un problema.

4.2.28 Encuentre las matrices M_L tal que el producto $\mathsf{M}_L\mathsf{A}$ sea $\mathbf{A}$, pero con:

(a) la hilera i multiplicada por una constante k, $(a_{ij} \to ka_{ij}, j = 1, 2, 3, \ldots)$.

(b) La hilera i sustituida por la hilera i original menos un múltiplo de la hilera m, $(a_{ij} \to a_{ij} - ka_{mj}, j = 1, 2, 3, \ldots)$.

(c) las hileras i y m, intercambiadas $(a_{ij} \to a_{mj}, a_{mj} \to a_{ij}, j = 1, 2, 3, \ldots)$.

4.2.29 Encuentre las matrices M_R tal que el producto $\mathsf{A}\mathsf{M}_R$ sea $\mathbf{A}$, pero con

(a) la columna i multiplicada por una constante k, $(a_{ji} \to ka_{ji}, j = 1, 2, 3, \ldots)$.

(b) La columna i sustituida por la columna i original menos un múltiplo de la columna m, $(a_{ji} \to a_{ji} - ka_{jm}, j = 1, 2, 3, \ldots)$.

(c) las columnas i y m intercambiadas $(a_{ji} \to a_{jm}, a_{jm} \to a_{ji}, j = 1, 2, 3, \ldots)$.

4.2.30 Encuentre el inverso de

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4.3 Matrices Ortogonales

El espacio tridimensional ordinario puede describirse por medio de las coordenadas cartesianas ya conocidas (x, y z). Consideraremos un segundo conjunto de coordenadas cartesianas (x', y', z') cuyo origen coincide con el correspondiente al primer conjunto pero cuya orientación es distinta. Esta sección repite algunas porciones de los Capítulos 1 y 3 aplicando un contexto ligeramente diferente y con distinto énfasis. En los Capítulos 1 y 3 se enfocó la atención en el vector o tensor. Aquí se da énfasis a la descripción de la propia rotación coordenada.

Cosenos de Dirección. Un vector unitario a lo largo del eje x' ($\mathbf{i}'$) puede resolverse en los componentes a lo largo de los ejes x, y y z mediante la técnica de proyección usual.

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos(x', x) + \mathbf{j}\cos(x', y) + \mathbf{k}\cos(x', z). \tag{4.47}$$

Por conveniencia, estos cosenos, que son los cosenos de dirección, se expresan en la forma

$$\begin{aligned} \cos(x', x) &= a_{11}, \\ \cos(x', y) &= a_{12}, \\ \cos(x', z) &= a_{13}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Continuando,

$$\begin{aligned} \cos(y', x) &= a_{21}, \qquad (a_{21} \neq a_{12}), \\ \cos(y', y) &= a_{22}, \text{ etc.} \end{aligned} \tag{4.49}$$

Ahora, la Ec. 4.47 puede establecerse nuevamente en la forma

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}a_{11} + \mathbf{j}a_{12} + \mathbf{k}a_{13}$$

y también

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= \mathbf{i}a_{21} + \mathbf{j}a_{22} + \mathbf{k}a_{23}, \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{i}a_{31} + \mathbf{j}a_{32} + \mathbf{k}a_{33}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

También se podría proceder de otra manera resolviendo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en los componentes del sistema imprimado. Siendo así,

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{i}'a_{11} + \mathbf{j}'a_{21} + \mathbf{k}'a_{31}, \\ \mathbf{j} &= \mathbf{i}'a_{12} + \mathbf{j}'a_{22} + \mathbf{k}'a_{32}, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{i}'a_{13} + \mathbf{j}'a_{23} + \mathbf{k}'a_{33}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Asociando $\mathbf{i}$ e $\mathbf{i}'$ con el subíndice 1, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{j}'$ con el subíndice 2, $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}'$ con el subíndice 3, se observa que en cada caso el primer subíndice de a_{ij} se refiere al vector unitario imprimado ($\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$), mientras que el segundo subíndice se refiere al vector unitario sin imprimar ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$).

Aplicaciones a los Vectores. Si se considera un vector cuyos componentes sean funciones de la posición en el espacio, entonces

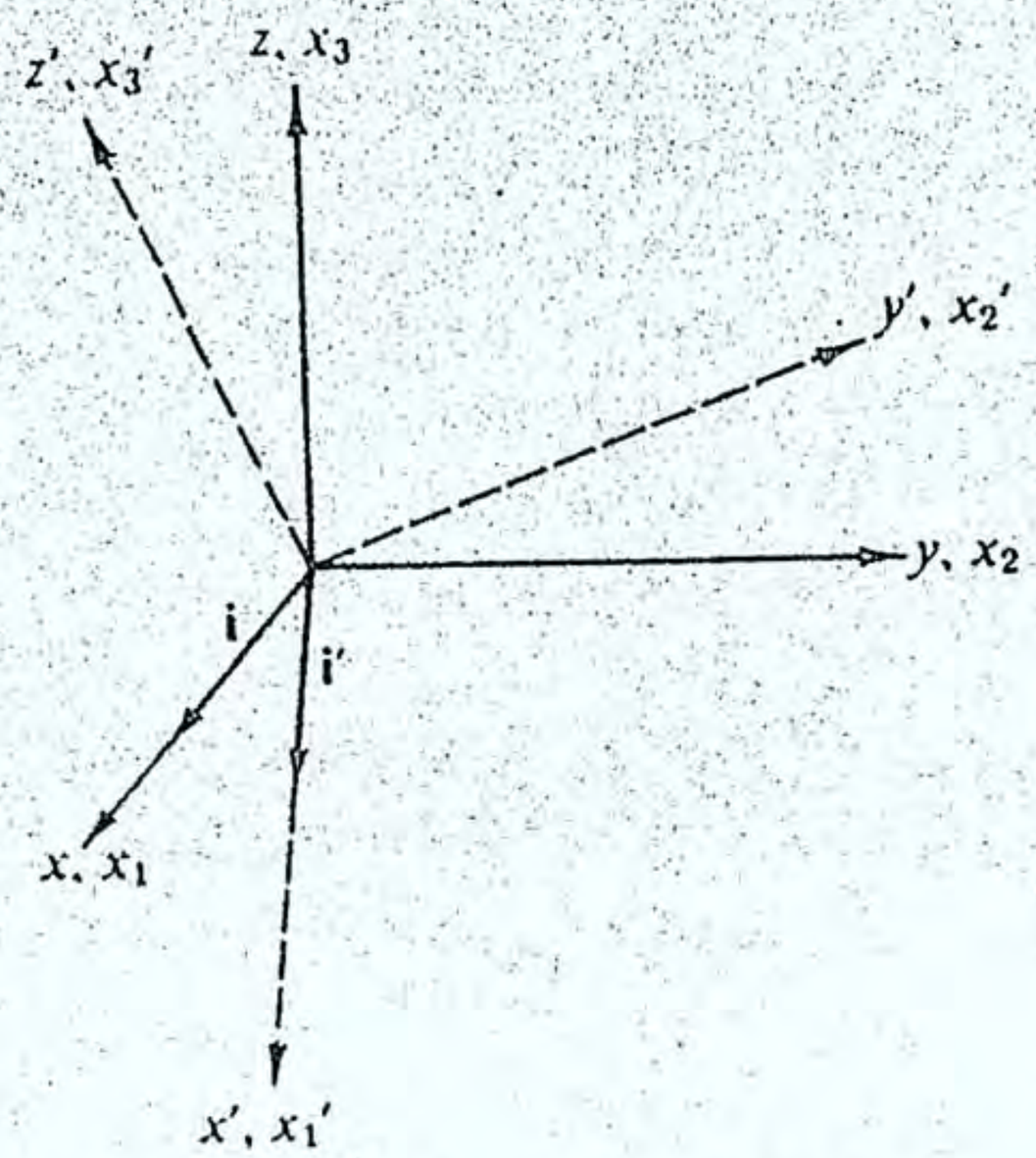


Fig. 4.1 Sistemas coordenados cartesianos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x, y, z) &= \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y + \mathbf{k}V_z \\ &= \mathbf{V}'(x', y', z') = \mathbf{i}'V'_{x'} + \mathbf{j}'V'_{y'} + \mathbf{k}'V'_{z'}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

ya que el punto puede estar determinado por las coordenadas (x, y, z) y las coordenadas (x', y', z'). Utilizando la Ec. 4.51 para eliminar **i**, **j** y **k**, la Ec. 4.52 puede separarse en tres ecuaciones escalares,

$$\begin{aligned} V'_{x'} &= a_{11}V_x + a_{12}V_y + a_{13}V_z \\ V'_{y'} &= a_{21}V_x + a_{22}V_y + a_{23}V_z \end{aligned} \tag{4.53}$$

y

$$V'_{z'} = a_{31}V_x + a_{32}V_y + a_{33}V_z.$$

En particular, estas relaciones son consistentes para las coordenadas de un punto (x, y, z) y (x', y', z'), lo cual da como resultado

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \end{aligned} \tag{4.54}$$

y

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Es conveniente cambiar la notación ligeramente en este momento. Sean,

$$\begin{aligned} x &\to x_1, \\ y &\to x_2, \\ z &\to x_3, \end{aligned} \tag{4.55}$$

y de manera similar para las coordenadas primadas. En esta notación, el conjunto de tres ecuaciones (4.54) puede indicarse en la forma

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \tag{4.56}$$

en donde i adquiere los valores de 1, 2 y 3, y el resultado son tres ecuaciones *separadas.*

Ahora dejemos de lado estos resultados e intentemos un procedimiento diferente para el mismo problema. Consideramos dos sistemas coordenados (x_1, x_2, x_3) y (x'_1, x'_2, x'_3) con un origen común y un punto (x_1, x_2, x_3) en el sistema sin imprimar, (x'_1, x'_2, x'_3) en el sistema imprimado. Observe la ambigüedad usual. El mismo símbolo x designa tanto el eje coordenado como una distancia particular a lo largo del eje. Ya que nuestro sistema es lineal, x'_i debe ser una combinación lineal de los términos x_i. Sea

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j . \tag{4.57}$$

El término a_{ij} puede identificarse como algo ya conocido, es decir los cosenos de dirección. Esta identificación se realiza posteriormente para el caso bidimensional.

Si tenemos dos conjuntos de cantidades (V_1, V_2, V_3) en el sistema sin imprimar y (V'_1, V'_2, V'_3) en el sistema imprimado, relacionados de la misma manera que las coordenadas de un punto en dos sistemas distintos (Ec. 4.57),

$$V'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} V_j , \tag{4.58}$$

entonces, igual que en la Sección 1.2, las cantidades (V_1, V_2, V_3) se definen como los componentes de un vector; es decir, un vector se define en términos de las propiedades de transformación de sus componentes bajo la rotación del sistema coordenado. En cierto sentido, las coordenadas de un punto han sido consideradas como un vector prototipo. El poderío y la utilidad de esta definición se hacen evidentes en el Capítulo 3, en que se ha extendido para definir los pseudovectores y los tensores.

A partir de la Ec. 4.56 se puede derivar información interesante acerca de los términos a_{ij} que describen la orientación del sistema coordenado (x'_1, x'_2, x'_3) con relación al sistema (x_1, x_2, x_3). La longitud desde el origen hasta el punto es la misma en ambos sistemas. Elevando al cuadrado, por conveniencia,

$$\begin{aligned} \sum_i x_i^2 &= \sum_i x_i'^2 \\ &= \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} x_j\Big)\Big(\sum_k a_{ik} x_k\Big)^{1} \\ &= \sum_{j,k} x_j x_k \sum_i a_{ij} a_{ik} . \end{aligned} \tag{4.59}$$

Esto puede ser cierto para todos los puntos, únicamente si:

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, 2, 3. \tag{4.60}$$

[1] Observe que se utilizan *dos* índices independientes j y k.

La verificación de la Ec. 4.60, en caso necesario, se puede lograr regresando a la Ec. 4.59 y estableciendo $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, etc. para evaluar las nuev. relaciones indicadas por la Ec. 4.60. Este proceso es válido ya que la Ec. 4.59 debe ser consistente para todas las $\mathbf{r}$ para cierto conjunto de a_{ij}. La Ec. 4.60, una consecuencia de requerir que la longitud permanezca constante (invariante) bajo la rotación del sistema coordenado, se denomina *condición de ortogonalidad.* Los términos a_{ij} indicados en la forma de una matriz A, constituyen una matriz ortogonal. Observe cuidadosamente que la Ec. 4.60 *no* es una multiplicación de matriz. Más bien, posteriormente se interpreta como un producto escalar de dos columnas de A.

En la notación de matriz, la Ec. 4.56 se transforma en

$$\{x'\} = \mathsf{A}\{x\}. \tag{4.61}$$

Condiciones de Ortogonalidad: Caso Bidimensional. Se puede lograr un mejor entendimiento de los términos a_{ij} y la condición de ortogonalidad al considerar detalladamente la rotación en dos dimensiones. (Esto puede considerarse como un sistema tridimensional con los ejes x_1 y x_2 rotados alrededor de x_3.) De la Fig. 1.6, Capítulo 1,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\varphi + x_2 \operatorname{sen}\varphi, \\ x_2' &= -x_1 \operatorname{sen}\varphi + x_2 \cos\varphi. \end{aligned} \tag{4.62}$$

En consecuencia, mediante la Ec. 4.61

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{4.63}$$

Es evidente de la Fig. 1.6 que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi = \cos(x_1', x_1), \\ a_{12} &= \operatorname{sen}\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos(x_1', x_2), \text{ etc.} \end{aligned} \tag{4.64}$$

identificando así los elementos a_{ij} de la matriz como los cosenos de dirección. La Ec. 4.60, la condición de ortogonalidad, se transforma en

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi &= 1, \\ \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{4.65}$$

La extensión a tres dimensiones (rotación de las coordenadas a través del ángulo φ en el sentido contrario a las manecillas del reloj) es simplemente x_3)

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.66}$$

El término $a_{33} = 1$ expresa el hecho de que $x'_3 = x_3$, ya que la rotación ha sido alrededor del eje x_3. Los ceros garantizan que x'_1 y x'_2 no dependan de x_3 y que x'_3 no dependa de x_1 y x_2. En lenguaje más sofisticado, x_1 y x_2 se extienden sobre un *subespacio* invariante, mientras que x_3 forma solamente un *subespacio* invariante. La forma general de A no puede reducirse. La Ec. 4.66 proporciona una descomposición posible.

Matriz Inversa, A^{-1}. Regresando a la matriz de transformación general, la matriz inversa A^{-1} se define de tal modo que

$$\{x\} = A^{-1}\{x'\}; \tag{4.67}$$

es decir, A^{-1} describe el inverso de la rotación determinada por A y regresa el sistema coordenado a su posición original. Simbólicamente, las Ecs. 4.61 y 4.67 se combinan para dar lugar a

$$\{x\} = A^{-1}A\{x\}, \tag{4.68}$$

y ya que $\{x\}$ es arbitraria

$$A^{-1}A = 1 \tag{4.69}$$

la matriz unitaria. De modo similar,

$$AA^{-1} = 1, \tag{4.70}$$

utilizando las Ecs. 4.61 y 4.67 además de eliminar $\{x\}$ en lugar de $\{x'\}$.

Matriz de Transposición, $\tilde{A}$. Se pueden determinar los elementos de la matriz inversa A^{-1} postulada mediante el uso de la condición de ortogonalidad. La Ec. 4.60, es decir la condición de ortogonalidad, *no* se conforma a nuestra definición de la multiplicación de matriz, pero puede establecerse en la forma requerida al *definir* una nueva matriz $\tilde{A}$ tal que

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ji}; \tag{4.71}$$

es decir $\tilde{A}$, denominada "transposición de A", la cual se forma a partir de A por intercambio de hileras y columnas. La Ec. 4.60 se transforma en

$$\tilde{A}A = 1. \tag{4.72}$$

Esto constituye un reestablecimiento de la condición de ortogonalidad y puede considerarse como una definición de ella. Multiplicando la Ec. 4.72 por A^{-1} de la derecha y utilizando la Ec. 4.70,

$$\tilde{A} = A^{-1}. \tag{4.73}$$

Este importante resultado de que la inversa equivale a la transposición es consistente solamente para las matrices ortogonales y de hecho la consideramos como un reestablecimiento de la condición de ortogonalidad.

Multiplicando la Ec. 4.73 por A en la izquierda,

$$A\tilde{A} = 1 \tag{4.74}$$

o

$$\sum_i a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}, \tag{4.75}$$

lo cual constituye otra forma de la condición de ortogonalidad

Ahora es posible observar y comprender por qué el término *ortogonal* es apropiado para estas matrices. Se tiene la forma general

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

una matriz de cosenos de dirección, en donde a_{ij} es el coseno del ángulo entre x'_i y x_j. En consecuencia, a_{11}, a_{12}, a_{13} son los cosenos de dirección de x'_1 con relación a x_1, x_2, x_3. Estos tres elementos de A *definen* una longitud unitaria a lo largo de x'_1, es decir el vector unitario $\mathbf{i}'$,

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}a_{11} + \mathbf{j}a_{12} + \mathbf{k}a_{13}.$$

La relación de ortogonalidad (Ec. 4.75) constituye simplemente un enunciado de que los vectores unitarios $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ y $\mathbf{k}'$ son mutuamente perpendiculares u ortogonales. Nuestra matriz de transformación ortogonal A gira un sistema coordenado ortogonal a un segundo sistema coordenado ortogonal.

Angulos de Euler. Nuestra matriz de transformación A contiene nueve cosenos de dirección. Evidentemente, tan solo tres de estos son independientes y la Ec. 4.60 presenta seis limitaciones. Equivalentemente, se puede decir que se requiere de dos parámetros (θ y φ en coordenadas polares esféricas) para fijar el eje de rotación. Luego, un parámetro adicional define la cantidad de rotación alrededor de un eje especificado. En la formulación lagrangiana de la mecánica (Sección 17.3), es necesario describir A utilizando algún conjunto de tres parámetros independientes que los cosenos de dirección redundantes. La selección usual de los parámetros son los ángulos de Euler.[1]

El objetivo consiste en describir la orientación del sistema rotado final (x'''_1, x'''_2, x'''_3) relativa a un sistema coordenado inicial (x_1, x_2, x_3). El sistema final se desarrolla en tres etapas; cada etapa involucra una rotación descrita por un ángulo de Euler:

1. Los ejes x'_1, x'_2, x'_3 se hacen girar alrededor del eje x_3 a través de un ángulo α en el sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a x_1, x_2, x_3. (Los ejes x_3 y x'_3 son coincidentes.)

2. Los ejes x''_1, x''_2, x''_3 se hacen girar alrededor del eje x'_2 a través de un ángulo β en el sentido contrario a las manecillas del reloj con relación a x'_1, x'_2, x'_3. (Los ejes x'_2 y x''_2 son coincidentes.)[2]

3. La rotación tercera y final es a través de un ángulo γ en el sentido

[1] Hay tantas definiciones de los ángulos de Euler como autores. Aquí seguimos la selección generalmente aceptada por aquellos que trabajan en el área de la teoría de los grupos y la teoría cuántica del momento angular (cf. Sección 4.9).

[2] Muchos autores prefieren que esta segunda rotación sea alrededor del eje x'_1.

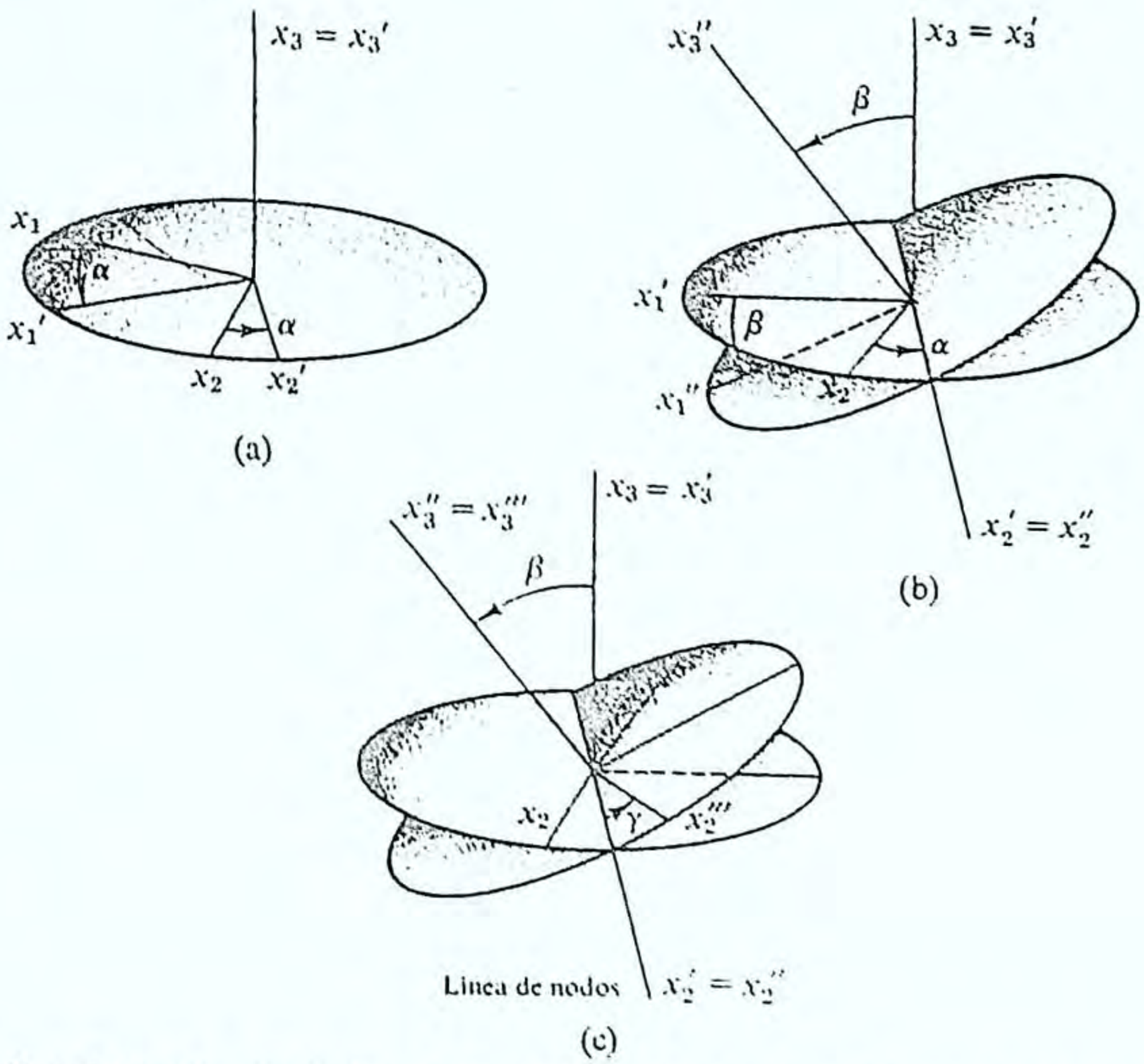


Fig. 4.2(a) Rotación alrededor de x_3 a través del ángulo α; (b) rotación alrededor de x_2' a través del ángulo β; (c) rotación alrededor de x_3'' a través del ángulo γ.

contrario a las manecillas del reloj alrededor del eje x_3'', con lo cual resulta el sistema x_1''', x_2''', x_3'''. (Los ejes x_3'' y x_3''' son coincidentes.)

Las tres matrices que describen estas rotaciones son:

$$\mathsf{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.76}$$

exactamente igual que la Ec. 4.66,

$$\mathsf{R}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{4.77}$$

y

$$\mathsf{R}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

La rotación total está descrita por el producto de matriz triple.

$$\mathsf{A}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathsf{R}_z(\gamma)\mathsf{R}_y(\beta)\mathsf{R}_z(\alpha).$$

(La forma de componente de transformaciones sucesivas se considera en las Ecs. 4.89-4.92.)

Observe el orden: $R_z(\alpha)$ opera primero, luego $R_y(\beta)$ y finalmente $R_z(\gamma)$. La multiplicación directa da como resultado

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\alpha & \cos\gamma\cos\beta\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\gamma\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}\gamma\cos\beta\operatorname{sen}\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta\cos\alpha & \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha & \cos\beta \end{pmatrix}. \tag{4.80}$$

Igualando $A(a_{ij})$ con $A(\alpha, \beta, \gamma)$, elemento por elemento, se obtienen los cosenos de dirección en términos de los ángulos de Euler. Podríamos utilizar esta identificación angular de Euler para verificar las identidades de coseno de dirección, Ec. 1.43, de la Sección 1.4, pero el procedimiento del Ejercicio 4.3.3 es bastante más elegante.

La descripción del ángulo de Euler de las formas de rotación forma la base para el desarrollo del grupo de rotación de la Sección 4.9.

Hay que advertir que las matrices han sido manejadas en dos formas en la descripción anterior: por medio de sus componentes y como entidades simples. Cada técnica tiene sus propias ventajas. Ambas son de utilidad.

Considere la evaluación de $(ST)^{-1}$ en donde ST es una matriz (producto) que tiene una inversa. Siendo así, evidentemente,

$$(ST)(ST)^{-1} = 1. \tag{4.81}$$

Multiplicando primero por S^{-1} y luego por T^{-1} sucesivamente desde la izquierda,

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}. \tag{4.82}$$

La inversa del producto equivale al producto de las inversas en *orden invertido.* Esto puede generalizarse fácilmente para cualquier número de factores.

Por otra parte, la evaluación de $\widetilde{(ST)}$ probablemente puede realizarse más convenientemente mediante la consideración de los componentes. Sea $U = ST$, de tal modo que

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \sum_j s_{ij}t_{jk} \\ &= \sum_j \tilde{t}_{kj}\tilde{s}_{ji}, \end{aligned} \tag{4.83}$$

utilizando la definición de transposición. Sin embargo,

$$u_{ik} = \tilde{u}_{ki}, \tag{4.84}$$

y la Ec. 4.83 puede indicarse en la forma

$$(\widetilde{ST}) = \tilde{T}\tilde{S}. \tag{4.85}$$

La transposición de un producto equivale al producto de las transposiciones en *orden invertido.*

Observe que en ninguna de las dos ilustraciones se ha requerido que S y T sean ortogonales.

Propiedades de Simetría. La matriz de transposición es de utilidad en la descripción de las propiedades de simetría. Si

$$A = \tilde{A}, \qquad a_{ij} = a_{ji}, \tag{4.86}$$

la matriz se denomina *simétrica,* mientras que cuando

$$A = -\tilde{A}, \qquad a_{ij} = -a_{ji}, \tag{4.87}$$

se denomina antisimétrica. Los elementos diagonales desaparecen. Es fácil demostrar que cualquier matriz (cuadrada) se puede establecer como la suma de la matriz simétrica y la matriz antisimétrica. Considere la identidad

$$A = \tfrac{1}{2}[A + \tilde{A}] + \tfrac{1}{2}[A - \tilde{A}]. \tag{4.88}$$

$[A + \tilde{A}]$ evidentemente es simétrica, mientras que $[A - \tilde{A}]$ resulta ser evidentemente antisimétrica. Esto es el análogo de matriz de la Ec. 3.22, Capítulo 3, para los tensores.

Rotaciones Sucesivas, Multiplicación de Matriz. Regresando a las matrices ortogonales, considérese que la rotación coordenada

$$\{x'\} = A\{x\} \tag{4.89}$$

va seguida de una segunda rotación determinada por una matriz B tal que

$$\{x''\} = B\{x'\}. \tag{4.90}$$

En la forma de componentes

$$\begin{aligned} x_i'' &= \sum_j b_{ij} x_j' \\ &= \sum_j b_{ij} \sum_k a_{jk} x_k \\ &= \sum_k \Big(\sum_j b_{ij} a_{jk}\Big) x_k . \end{aligned} \tag{4.91}$$

La suma sobre j es la multiplicación de matriz que define la matriz $C = BA$ tal que

$$x_i'' = \sum_k c_{ik} x_k . \tag{4.92}$$

Nuevamente, la definición de multiplicación de matriz resulta ser de utilidad y de hecho *es la justificación de su existencia.* La interpretación física es que el producto de matriz de dos matrices, BA, es la rotación que lleva al sistema sin imprimar al sistema coordenado doblemente imprimado.

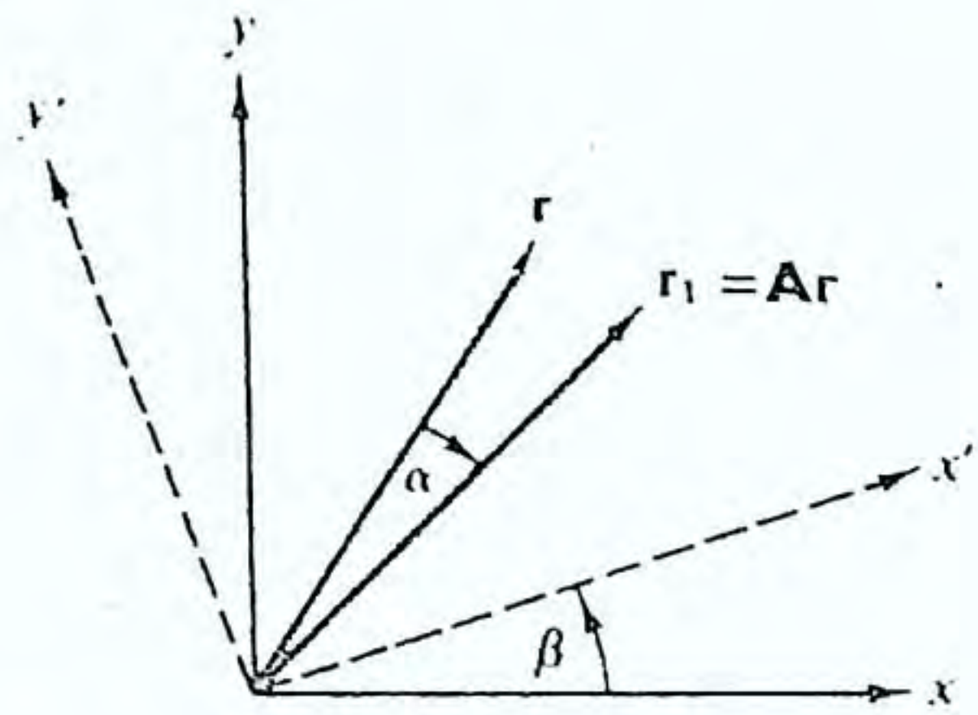


Fig. 4.3 Coordenadas fijas. Vector rotado

Hasta ahora hemos interpretado a la matriz ortogonal haciendo girar el sistema coordenado. Esto cambia los componentes de un vector fijo (no gira con las coordenadas). (Fig. 1.6, Capítulo 1). Sin embargo, la Ec. 4.89 puede interpretarse igualmente bien como la rotación del *vector* en la dirección *opuesta* (Fig. 4.3).

Supongamos que interpretamos la matriz A haciendo girar el *vector* **r** hacia la posición mostrada por $\mathbf{r}_1$.

$$\mathbf{r}_1 = \mathsf{A}\mathbf{r}. \tag{4.93}$$

Ahora hagamos girar las *coordenadas* mediante la aplicación de la matriz **B**, lo cual hace girar (x, y, z) a (x', y', z')

$$\begin{aligned} \mathsf{B}\mathbf{r}_1 &= \mathsf{B}\mathsf{A}\mathbf{r} \\ &= \mathsf{B}\mathsf{A}(\mathsf{B}^{-1}\mathsf{B})\mathbf{r} \\ &= (\mathsf{B}\mathsf{A}\mathsf{B}^{-1})\mathsf{B}\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{4.94}$$

$\mathsf{B}\mathbf{r}_1$ es justamente $\mathbf{r}_1$ en el nuevo sistema coordenado, siendo consistente una interpretación similar para $\mathsf{B}\mathbf{r}$. Siendo así, *en este nuevo sistema* $(\mathsf{B}\mathbf{r})$ se hace girar a la posición $(\mathsf{B}\mathbf{r}_1)$ por medio de la matriz $\mathsf{B}\mathsf{A}\mathsf{B}^{-1}$; o dicho en otras palabras, en el nuevo sistema, habiendo hecho girar las coordenadas por medio de la matriz B, A tiene la forma A′, en donde

$$\mathsf{A}' = \mathsf{B}\mathsf{A}\mathsf{B}^{-1}. \tag{4.95}$$

Transformación de Similaridad. La transformación definida por la Ec. 4.95, siendo B cualquier matriz, no necesariamente ortogonal, se conoce como transformación de similaridad.

En la forma de componentes, la Ec. 4.95 se convierte en

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} a_{kl} b^{-1}_{lj}. \tag{4.96}$$

Ahora, si B es ortogonal

$$b^{-1}_{lj} = \tilde{b}_{lj} = b_{jl}, \tag{4.97}$$

y tenemos

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} b_{jl} a_{kl}. \tag{4.98}$$

Relación con los Tensores. Comparando (4.98) con las ecuaciones de la Sección 3.1, se puede observar que esta es la definición de un tensor de segunda clase. En consecuencia, una matriz que se transforma por medio de una transformación de similaridad *ortogonal* es, por definición, un tensor. Siendo así, es evidente que cualquier matriz *ortogonal* A, interpretada como haciendo girar un vector (Ec. 4.93), se puede denominar tensor. Sin embargo, si consideramos que la matriz ortogonal es un conjunto de cosenos de dirección fijos, proporcionando la nueva orientación de un sistema coordenado, no se tiene la implicación de una transformación de tensor.

Las propiedades de simetría y antisimetría definidas anteriormente se preservan bajo las transformaciones de similaridad *ortogonal.* Sea **A** una matriz simétrica, $A = \tilde{A}$ y

$$A' = BAB^{-1}. \tag{4.99}$$

Ahora,

$$\tilde{A}' = \widetilde{BAB^{-1}} = \widetilde{B^{-1}}\tilde{A}\tilde{B} = B\tilde{A}B^{-1}, \tag{4.100}$$

ya que **B** es ortogonal. Pero $A = \tilde{A}$. En consecuencia,

$$\tilde{A}' = BAB^{-1} = A', \tag{4.101}$$

se demuestra que la propiedad de simetría es invariante bajo la transformación de similaridad ortogonal. En general, la simetría *no* se conserva bajo la transformación de similaridad no ortogonal.

EJERCICIOS

Nota. Suponga que todos los elementos de matriz son reales.

4.3.1 Demuestre que el producto de dos matrices ortogonales es ortogonal.
Nota. Esto representa una etapa clave para demostrar que todas las matrices ortogonales de $n \times n$ forman un grupo (Sección 4.9).

4.3.2 Si **A** es ortogonal, demuestre que su determinante tiene magnitud unitaria.

4.3.3 Si **A** es ortogonal, demuestre que $a_{ij} = C_{ij}$, en donde C_{ij} es el *cofactor* de a_{ij}. Esto da lugar a las identidades de la Ec. 1.41 utilizadas en la Sección 1.4 para demostrar que un producto vectorial de vectores es por sí mismo un vector.
Sugerencia: Consulte el Ejercicio 4.2.27.

4.3.4 Otro conjunto de rotaciones Euler de uso común es

1. la rotación alrededor del eje x_3 a través de un ángulo φ, en el sentido contrario a las manecillas del reloj.
2. la rotación alrededor del eje x_1' a través del ángulo θ, en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y
3. la rotación alrededor del eje x_3'' a través del ángulo ψ, en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Si

$$\alpha = \varphi - \pi/2 \qquad \varphi = \alpha + \pi/2$$
$$\beta = \theta \qquad \theta = \beta$$
$$\gamma = \psi + \pi/2 \qquad \psi = \gamma - \pi/2,$$

demuestre que los sistemas finales son idénticos.

4.3.5 Suponga que la Tierra se mueve (gira) de modo que el Polo Norte se desplaza 30° al Norte, 20° al Oeste (sistema de longitud y latitud original) y que el meridiano Oeste 10° apunta al Sur derecho.

(a) ¿Cuáles son los ángulos de Euler que describen esta rotación?

(b) Encuentre los cosenos de dirección correspondientes.

$$\text{(b)}\ A = \begin{pmatrix} 0.9551 & -0.2552 & -0.1504 \\ 0.0052 & 0.5221 & -0.8529 \\ 0.2962 & 0.8138 & 0.5000 \end{pmatrix}$$

4.3.6 Verifique que la matriz de rotación de ángulo de Euler, Ec. 4.80, es invariante bajo la transformación

$$\alpha \to \alpha + \pi, \qquad \beta \to -\beta, \qquad \gamma \to \gamma - \pi.$$

4.3.7 Demuestre que la traza del producto de una matriz simétrica y una antisimétrica es cero.

4.3.8 Demuestre que la traza de una matriz permanece invariante bajo las transformaciones de similaridad.

4.3.9 Demuestre que el determinante de una matriz permanece invariante bajo las transformaciones de similaridad.

4.3.10 Demuestre que la propiedad de antisimetría es invariante bajo las transformaciones de similaridad ortogonal.

4.3.11 Demuestre que la suma de los cuadrados de los elementos de una matriz permanecen invariantes bajo las transformaciones de similaridad ortogonal.

4.3.12 Como generalización del Ejercicio 4.3.11, demuestre que

$$\sum_{jk} S_{jk} T_{jk} = \sum_{l,m} S'_{lm} T'_{lm},$$

en donde los elementos imprimados y sin imprimar se relacionan mediante una transformación de similaridad ortogonal. Este resultado es de utilidad para determinar las invariantes en la teoría electromagnética (cf. Sección 3.7).

4.3.13 Una rotación $\varphi_1 + \varphi_2$ alrededor del eje z se realiza en la forma de dos rotaciones sucesivas φ_1 y φ_2, cada una alrededor del eje z. Utilice la representación de matriz de las rotaciones para derivar las identidades trigonométricas

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2$$
$$\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2.$$

4.4 Coordenadas Oblicuas

A través de todo este libro, hasta ahora —análisis vectorial, sistemas coordenados, análisis de tensores y ahora las matrices— siempre hemos

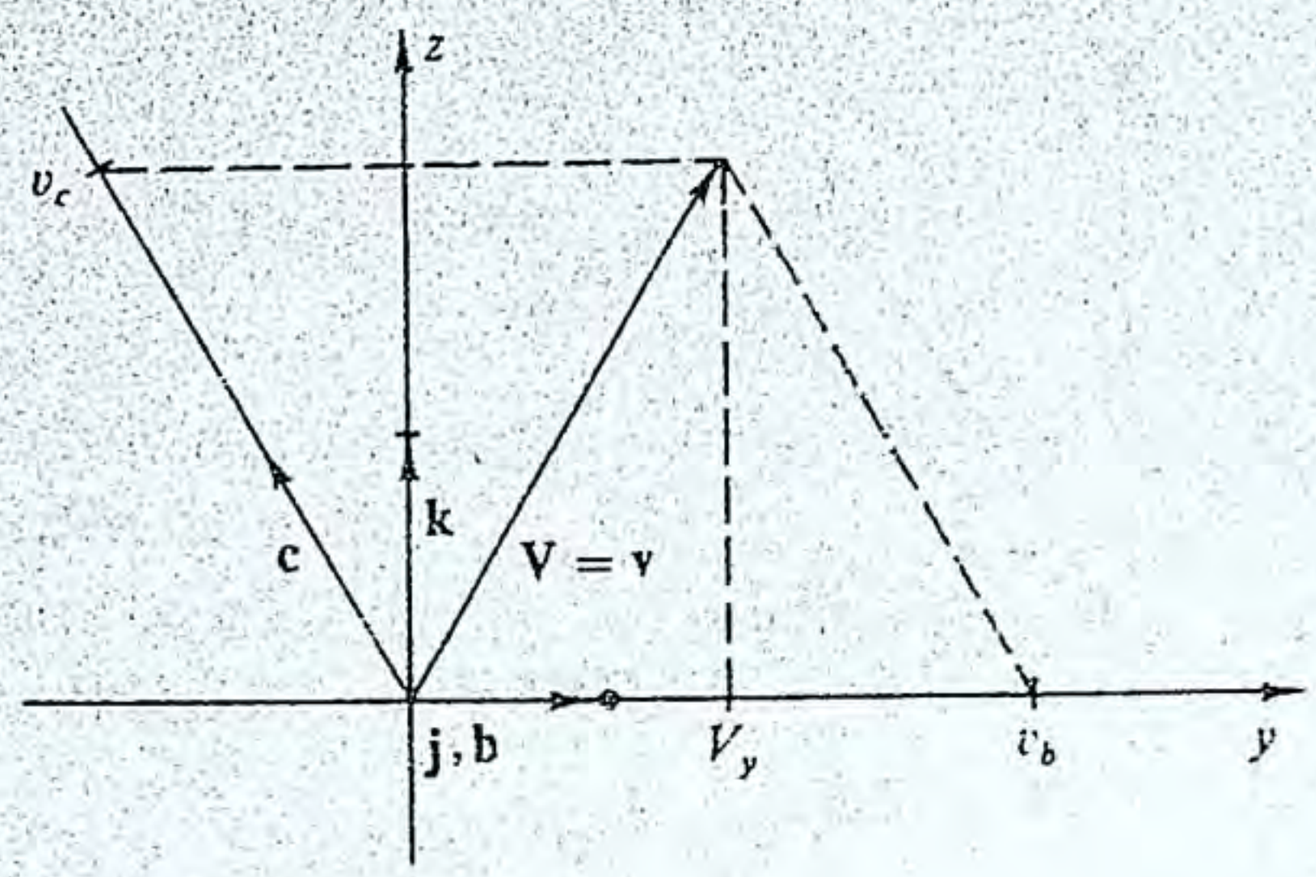


FIG. 4.4 $\mathbf{V} = \mathbf{j}V_y + \mathbf{k}V_z = \mathbf{b}v_b + \mathbf{c}v_c = \mathbf{v}$

considerado nuestras coordenadas como ortogonales. Sin embargo, ocasionalmente los requisitos de un sistema físico nos fuerzan al sistema no ortogonal u oblicuo de coordenadas. Al describir las propiedades físicas de un cristal, por ejemplo, pudiera ser conveniente el uso del sistema coordenado definido por los ejes de cristal; estos ejes frecuentemente son oblicuos.

Considere un sistema coordenado en que los vectores unitarios no coplanares **a**, **b** y **c** *no son ortogonales*. (Para describir un cristal, estos **a**, **b** y **c**, podrían, posiblemente, no tener una magnitud unitaria. Los esparcimientos interatómicos tendrían longitudes más apropiadas.) Siendo así, un vector arbitrario puede indicarse en la forma

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y + \mathbf{k}V_z = \mathbf{a}v_a + \mathbf{b}v_b + \mathbf{c}v_c = \mathbf{v} \tag{4.102}$$

en donde **V** denota un vector expresado en el sistema cartesiano rectangular usual, mientras que **v** es el mismo vector expresado en el sistema coordenado oblicuo.

El caso especial (de hecho bidimensional) de **j**, **k**, **b**, **c** y **v**, todos en el plano $x = 0$ se muestra en la Fig. 4.4. Observe cuidadosamente que los componentes v_b y v_c se encuentran al proyectar la punta de **V** paralela a **c** para v_b y paralela a **b** para v_c. El procedimiento general para la obtención de un componente sería pasar un plano a través de la punta de **V** paralelo al plano definido por los otros dos vectores unitarios. Con los componentes definidos de esta manera, la suma de los componentes es justamente **V** de acuerdo con las leyes del triángulo o el paralelogramo para la suma de vectores, Sección 1.1.

Procedemos de la Ec. 4.102 exactamente igual que en la Sección 4.3 con **a** en lugar de **i**′, **b** en lugar de **j**′ y **c** en lugar de **k**′. A partir de

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z \\ \mathbf{b} &= \mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z \\ \mathbf{c} &= \mathbf{i}c_x + \mathbf{j}c_y + \mathbf{k}c_z, \end{aligned} \tag{4.103}$$

igualando los componentes cartesianos,

$$V_x = a_x v_a + b_x v_b + c_x v_c$$
$$V_y = a_y v_a + b_y v_b + c_y v_c \tag{4.104}$$
$$V_z = a_z v_a + b_z v_b + c_z v_c .$$

En la forma de matriz

$$\mathbf{V} = \mathsf{P}\mathbf{v} \tag{4.105}$$

en donde

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \tag{4.106}$$

La matriz de transformación P *no* es ortogonal ya que los vectores de *columna* que la forman, **a**, **b** y **c**, no son ortogonales.

Ya que

$$\mathbf{v} = \mathsf{P}^{-1}\mathbf{V} \tag{4.107}$$

buscamos P^{-1}. La solución de hecho ha sido desarrollada en la Sección 1.5. Los vectores de celosía recíprocos

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}, \qquad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}, \qquad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}, \tag{4.108}$$

considerados como vectores de hilera, forman la matriz Q,

$$\mathsf{Q} = \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \\ c'_x & c'_y & c'_z \end{pmatrix}. \tag{4.109}$$

Es de hacerse notar que $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{c}'$ no son ortogonales. Asimismo, tampoco tienen longitud unitaria, y cuando **a**, **b** y **c** tienen dimensiones, entonces $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{c}'$ tienen dimensiones *recíprocas*. Si **a** corresponde a una longitud, $\mathbf{a}'$ podría ser un número de onda. A partir de las propiedades desarrolladas en la Sección 1.5

$$\mathsf{PQ} = \mathsf{QP} = 1 \tag{4.110}$$

o

$$\mathsf{Q} = \mathsf{P}^{-1}, \qquad \mathsf{P} = \mathsf{Q}^{-1} \tag{4.111}$$

El ejercicio 4.4.1 describe una derivación de Q ligeramente distinta; pero equivalente. A partir de las Ecs. 4.107 y 4.111

$$\mathbf{v} = \mathsf{Q}\mathbf{V} \tag{4.112}$$

Considerando la transposición de las Ecs. 4.105 y 4.112

$$[V] = [v]\tilde{P}, \qquad [v] = [V]\tilde{Q} \tag{4.113}$$

en donde [ ] designa un vector de hilera, igual que en la Sección 4.2.

V puede resolverse en el espacio **a**′, **b**′, **c**′ (la celosía recíproca) exactamente como en el espacio **a**, **b**, **c**. A partir del análogo imprimado de las Ecs. 4.102-4.104

$$\mathbf{V} = \tilde{Q}\mathbf{v}' \qquad \mathbf{v}' = \tilde{P}\mathbf{V}, \tag{4.114}$$

y

$$[V] = [v']Q \qquad [v'] = [V]P. \tag{4.115}$$

El producto escalar de dos vectores **U** y **V** se transforma en

$$[U]\{V\} = [U]PQ\{V\} = [u']\{v\} \tag{4.116}$$

de acuerdo con las Ecs. 4.112 y 4.115. { } designa un vector de columna. El cuadrado de un vector en coordenadas oblicuas no es la suma de los cuadrados de los componentes, sino más bien la suma de los productos de un componente oblicuo y el componente de celosía recíproco correspondiente.

Si **U** y **V** en la Ec. 4.116 anterior son de longitud diferencial $d\mathbf{R} = (dx, dy, dz)$, entonces

$$ds^2 = [dR]\{dR\} = [dr]\tilde{P}P\{dr\} \tag{4.117}$$

utilizando las Ecs. 4.105 y 4.113. ds^2 es el cuadrado del elemento distancia. dr es $d\mathbf{R}$, pero resuelto en coordenadas oblicuas. La referencia a la Ec. 2.4 identifica a $\tilde{P}P$ como la métrica de nuestras coordenadas oblicuas. La métrica de la celosía recíproca es $Q\tilde{Q}$.

El desarrollo adicional del análisis vectorial, particularmente de un cálculo de vector en las coordenadas oblicuas, posiblemente se considere más adecuado como una ramificación del análisis de tensores no cartesianos. $\mathbf{v} = (v_a, v_b, v_c)$ es un vector *contravariante* en el lenguaje de la Sección 3.1. Los componentes *covariantes* correspondientes son (v'_a, v'_b, v'_c) en la celosía recíproca. A partir de las Ecs. 4.105, 4.112 y 4.114

$$\{v'_i\} = \tilde{P}P\{v_i\} \qquad y \qquad \{v_i\} = Q\tilde{Q}\{v'_i\}. \tag{4.118}$$

La métrica $\tilde{P}P$ transforma el vector contravariante a la forma covariante. Su inversa, $Q\tilde{Q}$, transforma el vector covariante a la forma contravariante,

EJERCICIOS

4.4.1 A partir del resultado del Ejercicio 4.2.27 $q_{ij} = \dfrac{P_{ji}}{|P|}$, derive la relación

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}.$$

4.4.2 Los vectores que definen un sistema particular de coordenadas oblicuas son

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{j}, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{c} = (\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{2}.$$

(a) Encuentre **P**, **Q** y la métrica $\widetilde{\mathsf{PP}}$.
(b) Si $\mathbf{V} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, encuentre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$. Verifique que

$$[v'][v] = V^2.$$

4.4.3 Demuestre que

(a) $v'_a = \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}$
(b) $v_a = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{V}$.
Observe que los vectores que definen la celosía $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, etc. no requieren tener una magnitud unitaria.

4.5 Matrices Hermitianas, Matrices Unitarias

Definiciones. Hasta este momento ha sido aceptado de manera general que los elementos de la matriz eran reales. Para muchos cálculos en la física clásica, los elementos de matriz verdaderos son suficientes. Sin embargo, en la mecánica cuántica las variables complejas difícilmente pueden no presentarse debido a la forma de las de conmutación básica (o la forma de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo). Recordando esto, generalizamos el caso de los elementos de matriz complejos. Para el manejo de estos elementos es conveniente definir o especificar algunas de las nuevas propiedades.

1. Conjugado complejo, A^*, formado al considerar el conjugado complejo $(i \to -i)$ de cada elemento, en donde $i = \sqrt{-1}$.

2. Adjunto $\mathsf{A}^\dagger$, formado por la transposición de A^*,

$$\mathsf{A}^\dagger = \widetilde{\mathsf{A}^*} = \tilde{\mathsf{A}}^*. \tag{4.119}$$

3. Matriz hermitiana. La matriz A se denomina hermitiana (o hermítica) si

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}^\dagger. \tag{4.120}$$

En la mecánica cuántica (o la mecánica de matrices), las matrices generalmente se forman para ser hermíticas.

4. Matriz unitaria. La matriz U se denomina unitaria si

$$\mathsf{U}^\dagger = \mathsf{U}^{-1}, \tag{4.121}$$

lo cual representa una generalización del concepto de la matriz ortogonal (cf. Ec. 4.73). Si los elementos de la matriz son complejos, el físico casi siempre se encuentra interesado en las matrices hermíticas, matrices adjuntas y matrices unitarias. Las matrices unitarias son de especial importancia en la mecánica cuántica debido a que dejan la longitud de un vector (complejo) inalterada, análogo a la operación de una matriz ortogonal en

un vector verdadero. Una excepción importante a este interés en las matrices unitarias es el grupo de matrices de Lorentz, Secciones 3.7 y 4.12. Utilizando el espacio de Minkowski, estas matrices son *ortogonales*, no *unitarias*.

Si la matriz de transformación en una transformación de similaridad es unitaria, la transformación se denomina transformación unitaria

$$A' = UAU^\dagger \tag{4.122}$$

Justamente igual que el producto de dos matrices ortogonales se encuentra que es ortogonal (Ejercicio 4.3.1), de modo que podemos demostrar que el producto de dos matrices unitarias es unitario. Sea U_1 y U_2 unitarias. Entonces

$$\begin{aligned} 1 &= (U_1U_2)(U_1U_2)^{-1} \\ &= U_1U_2U_2^{-1}U_1^{-1} \\ &= U_1U_2U_2^\dagger U_1^\dagger , \end{aligned} \tag{4.123}$$

utilizando la propiedad unitaria. Ya que la operación de unión es la misma que la transposición (excepto por el conjugado complejo),

$$(U_1U_2)^\dagger = U_2^\dagger U_1^\dagger, \tag{4.124}$$

(Ejercicio 4.5.2). Sustituyendo en la Ec. 4.123, se tiene

$$1 = (U_1U_2)(U_1U_2)^\dagger \tag{4.125}$$

Multiplicando desde la izquierda por $(U_1U_2)^{-1}$, se obtiene

$$(U_1U_2)^{-1} = (U_1U_2)^\dagger, \tag{4.126}$$

lo cual demuestra que el producto de dos matrices unitarias es por sí mismo unitario. Esto representa una de las etapas en la demostración de que las matrices unitarias $n \times n$ forman un grupo (Sección 4.9). Otras propiedades y aplicaciones de estos conceptos se incluyen en los ejercicios al final de esta sección.

Matrices de Pauli. Cuatro de nuestras matrices complejas han sido utilizadas ampliamente en las teorías relativísticas del electrón. Un punto de partida conveniente en el desarrollo de las matrices 4×4 es el conjunto de las matrices de Pauli 2×2

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.127}$$

Estas fueron introducidas por W. Pauli para describir una partícula con spin de un medio (teoría no relativística). Fácilmente se puede demostrar que (cf. Ejercicio 4.2.12) los términos σ de Pauli satisfacen

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}1, \qquad \text{anticonmutación} \tag{4.128}$$

$$\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k, \qquad \text{permutación cíclica de índices} \tag{4.129}$$

$$(\sigma_i)^2 = 1. \tag{4.130}$$

Matrices de Dirac. En el año de 1927, P.A.M. Dirac extendió este formalismo. Dirac requirió de un conjunto de cuatro matrices de anticonmutación. Las tres matrices de Pauli, además de la matriz unitaria, forman un conjunto completo; es decir, cualquier matriz M constante de 2×2 puede indicarse en la forma

$$\mathsf{M} = c_0 1 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3, \tag{4.131}$$

en donde c_0, c_1, c_2 y c_3 son constantes. En consecuencia, las matrices 2×2 de Pauli resultaron inadecuadas. De modo similar, podemos demostrar que las matrices 3×3 no pueden proporcionar un conjunto de anticonmutación de cuatro matrices.

Regresando a las matrices 4×4 se puede formar un conjunto completo en la forma de productos directos de las matrices de Pauli y la matriz unitaria. Sea

$$\sigma_{i,\,\text{Dirac}} = 1 \otimes \sigma_{i,\,\text{Pauli}} \tag{4.132}$$

$$\rho_{j,\,\text{Dirac}} = \sigma_{j,\,\text{Pauli}} \otimes 1. \tag{4.133}$$

Por ejemplo,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1(\sigma_1) & 0 \\ 0 & 1(\sigma_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que estas matrices 4×4 satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i &= 2\delta_{ij}1, \\ \rho_i\rho_j + \rho_j\rho_i &= 2\delta_{ij}1, \end{aligned} \qquad \text{anticonmutación}, \tag{4.134}$$

$$\sigma_i\rho_j - \rho_j\sigma_i \equiv [\sigma_i, \rho_j] = 0, \qquad \text{conmutación}, \tag{4.135}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j &= i\sigma_k, \\ \rho_i\rho_j &= i\rho_k, \end{aligned} \qquad \text{permutación cíclica de índices} \tag{4.136}$$

Ahora es posible establecer una tabla de multiplicación de matrices (tabla 4.1).

Dirac seleccionó originalmente el uso del conjunto de cuatro matrices denominadas α_1, α_2, α_3 y α_4, en donde $\alpha_i = \rho_1\sigma_i$ y $\alpha_4 = \rho_3$. Actualmente, el conjunto denominado γ_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, probablemente sea de uso más común.

Las matrices de Dirac 4×4 pueden considerarse como E_{ij}, en donde

$$\mathsf{E}_{ij} = \rho_i\sigma_j.$$

Habiendo comprendido que $\rho_0 = \sigma_0 = 1$, la matriz unitaria, podemos dejar que los índices i y j varíen de 0 a 3. Estas 16 matrices E_{ij} tienen varias propiedades interesantes:

TABLA 4.1

Matrices de Dirac

	1	σ_1	σ_2	σ_3
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ σ_1	$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ σ_2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ σ_3
ρ_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho_1, -\gamma_5$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ α_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ α_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ α_3
ρ_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ρ_2, α_5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ γ_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ γ_2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ γ_3
ρ_3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rho_3, \alpha_4, \gamma_4, \beta$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ δ_1	$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$ δ_2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ δ_3

1. $\text{Det}\, E_{ij} = +1$.
2. $E_{ij}^2 = 1$.
3. $E_{ij} = E_{ij}^\dagger$; todas son hermitianas y, consecuentemente, por la propiedad 2, unitarias.
4. $\text{Traza}(E_{ij}) = 0$ excepto para $E_{00} = 1$ en cuyo caso la traza $(E_{00}) = 4$.
5. Las 16 matrices E_{ij} *casi* forman un grupo matemático.[1] Dos cualesquiera de estas multiplicadas entre sí proporcionan un miembro del conjunto dentro de un factor de -1 o $\pm i$.
6. Las 16 matrices E_{ij} son linealmente independientes. Ninguna puede establecerse como una suma lineal de las otras 15.
7. Las 16 E_{ij} forman un conjunto completo. Cualquier matriz de 4×4

[1] Las E_{ij} pueden modificarse de modo que satisfagan la propiedad de grupo exactamente, pero entonces ya no pueden considerarse como hermitianas o unitarias.

(con elementos constantes) puede indicarse como una combinación lineal de estas 16,

$$A = \sum_{i,j=0}^{3} c_{ij} E_{ij},$$

en que los coeficientes c_{ij} son constantes, reales o complejos.

Conjuntos de Anticonmutación. A partir de estas 16 matrices hermitianas se pueden formar seis grupos de anticonmutación de cinco matrices cada uno. Utilizando las designaciones mostradas en la tabla 4.1, estos conjuntos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
&1.\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5.\\
&2.\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5.\\
&3.\ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \rho_1, \rho_2.\\
&4.\ \alpha_1, \gamma_1, \delta_1, \sigma_2, \sigma_3.\\
&5.\ \alpha_2, \gamma_2, \delta_2, \sigma_1, \sigma_3.\\
&6.\ \alpha_3, \gamma_3, \delta_3, \sigma_1, \sigma_2.
\end{aligned} \tag{4.137}$$

Cada E_{ij} (sin incluir la matriz unitaria) aparece en *dos* de los conjuntos anteriores. Además del conjunto de las α, el conjunto de las γ ha sido utilizado ampliamente en la teoría cuántica relativística.

Los conjuntos completamente conmutativos, más grandes, de matrices de Dirac (incluyendo la matriz unitaria), solo tienen cuatro matrices.

La descripción de las matrices ortogonales en la Sección 4.3 y las matrices unitarias en esta sección solamente constituyen un mero principio. Las extensiones adicionales son de interés vital en la física de la partícula "elemental" moderna. Con las matrices de Pauli y Dirac se pueden desarrollar los spins para describir los electrones, los protones y otras partículas con un medio de spin. Las rotaciones del sistema coordenado dan lugar a $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$, el grupo de rotación, que generalmente se representa por medio de matrices en que los elementos son funciones de los ángulos de Euler que describen la rotación. El grupo unitario especial $SU(3)$ (compuesto de matrices unitarias 3×3 con el determinante $+1$) ha sido utilizado con gran éxito para la descripción de los mesones y los bariones. Estas extensiones se consideran adicionalmente en las Secciones 4.9-4.11.

EJERCICIOS

4.5.1 Tres matrices de momento angular satisfacen la relación de conmutación básica

$$[J_x, J_y] = iJ_z$$

(y la permutación cíclica de los índices). Si dos de las matrices tienen elementos reales, demuestre que los elementos de la tercera deben ser puramente imaginarios.

4.5.2 Demuestre que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

4.5.3 La matriz $C = S^\dagger S$. Demuestre que la traza es positiva a menos de que **A** sea la matriz nula, en cuyo caso la traza $(C) = 0$.

4.5.4 Si **A** y **B** son matrices hermitianas, demuestre que $(AB + BA)$ e $i(AB - BA)$ también son hermitianas,

4.5.5 Demuestre que la matriz hermitiana permanece como tal bajo las transformaciones de similaridad unitaria.

4.5.6 Dos matrices **A** y **B** son hermitianas cada una. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que su producto **AB** sea hermitiano.

Respuesta. $[A, B] = 0$.

4.5.7 Demuestre que la inversa de una matriz unitaria es unitaria.

4.5.8 Una transformación de similaridad particular proporciona

$$A' = UAU^{-1}$$
$$A^{\dagger\prime} = UA^\dagger U^{-1}.$$

Si la relación de unión se preserva $(A^{\dagger\prime} = A'^\dagger)$ y det $U = 1$, demuestre que U debe ser unitaria.

4.5.9 Dos matrices **U** y **H** están relacionadas por

$$U = e^{iaH}$$

en donde a es real. (La función de matriz exponencial puede interpretarse por medio de un desarrollo de Maclaurin. Esto se realiza en la Sección 4.10.)
(a) Si **H** en hermitiana, demuestre que **U** es unitaria.
(b) Si **U** es unitaria, demuestre que **H** es hermitiana (considerando términos de la forma $2\pi n/a$).

4.5.10 Demuestre que el producto directo de dos matrices unitarias es unitario.

4.5.11 Demuestre que todas las matrices 4×4 (cuyos elementos son números complejos) se pueden formar como una combinación lineal de $1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ y los *productos* de las γ.

4.5.12 Designando las 16 matrices de Dirac mediante $E_{ij} = \rho_i\sigma_j$ $(\rho_0 = \sigma_0 = 1)$, demuestre que
(a) $E_{ij}^2 = 1$ para todas las i y j,
(b) $E_{ij} = E_{ij}^\dagger$ (hermitiana).
Sugerencia. Utilice las propiedades conocidas de ρ_i y σ_j.

4.5.13 Verifique las Ecs. 4.134-4.136 para las matrices σ y ρ de 4×4.

4.5.14 Utilizando las Ecs. 4.135 y 4.136, demuestre que cada uno de los seis conjuntos de matrices de Dirac incluidas en la Ec. 4.137 es de hecho un conjunto de anticonmutación.

4.5.15 Utilizando las Ecs. 4.135 y 4.136 demuestre que
(a) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 = +1$,
(b) $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5 = +1$.

4.5.16 Si $M = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$, demuestre que

$$M^2 = M.$$

Observe que γ_5 puede sustituirse por cualquier otra matriz de Dirac (cualquier E_{ij} de la tabla 4.1). Si **M** es hermitiana, entonces este resultado, $M^2 = M$, es la ecuación de definición para el operador de proyección mecánico cuántico.

4.5.17 Demuestre que

$$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha} = 2i\boldsymbol{\sigma}$$

en donde $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector cuyos componentes son las matrices α,

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Observe que si $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector polar (Sección 3.4), entonces $\boldsymbol{\sigma}$ es un vector axial.

4.5.18 Demuestre que las dieciséis matrices de Dirac forman un conjunto linealmente independiente.
Sugerencia. Suponga lo contrario. Sea E_{mn} una combinación lineal de las otras E_{ij}. Multiplique por E_{mn}. Considere la traza y demuestre que resulta una contradicción.

4.5.19 (a) Si se supone que cierta matriz 4×4, **A** (con elementos constantes), se puede indicar como una combinación lineal de las 16 matrices de Dirac

$$A = \sum_{i,j=0}^{3} C_{ij} E_{ij},$$

demuestre que

$$C_{mn} = \tfrac{1}{4} \text{ traza } (A E_{mn}).$$

(b) Si **A** tiene uno y solamente un elemento que no desaparece, demuestre que existen exactamente cuatro coeficientes que no desaparecen en este desarrollo.
(c) Desarrolle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en términos de E_{ij}.

Respuesta. $A = \frac{1}{4}(E_{00} + E_{03} + E_{30} + E_{33})$
$= \frac{1}{4}(1 + \sigma_3 + \rho_3 + \delta_3)$.

4.5.20 Si **A** es cualquiera de las matrices de Dirac (sin incluir la matriz unitaria), se conmuta con 8 de las matrices de Dirac y se anticonmuta con las otras 8. Incluya una lista de las ocho matrices que anticonmutan con γ_1.

Respuesta. $\sigma_2, \sigma_3, \rho_1, \alpha_1, \gamma_2, \gamma_3, \rho_3, \delta_1$.

4.5.21 Para investigar las preguntas de la convariancia bajo las transformaciones de Lorentz, la teoría electrónica de Dirac generalmente se expresa en términos de γ_μ, $\mu = 1,2,3,4$. Demuestre que estas cuatro matrices conjuntamente con sus productos

(a) $\gamma_\mu \gamma_\nu$, $\mu \neq \nu$
(b) $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda$, los índices distintos
(c) $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$

y la matriz unitaria 1 reproducen todas las 16 matrices de Dirac (aparte de los factores constantes).

4.5.22 Dado $\mathbf{r}' = U\mathbf{r}$, con **U** una matriz unitaria y **r** un vector (de columna) con elementos complejos, demuestre que la norma (magnitud) de **r** es invariante bajo esta operación.

4.6 Diagonalización de Matrices

Matriz de Momento de Inercia. En muchos de los problemas físicos que involucran matrices es conveniente aplicar una transformación de similaridad ortogonal (verdadera) o una transformación unitaria para reducir la matriz a la forma diagonal, en que todos los elementos no diagonales son iguales a cero. Un ejemplo particularmente directo de esto es la matriz de momento de inercia I, de un cuerpo rígido. A partir de la definición del momento angular **L**, tenemos

$$\mathbf{L} = \mathrm{I}\boldsymbol{\omega} \tag{4.138}$$

en donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular. La matriz de inercia I se encuentra que tiene componentes diagonales

$$I_{xx} = \sum_i m_i(r_i^2 - x_i^2), \text{ etc.,} \tag{4.139}$$

en donde el subíndice i se refiere a la masa m_i. Para los componentes no diagonales, tenemos los productos de inercia

$$I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = I_{yx}. \tag{4.140}$$

Mediante la inspección se determina que la matriz I es simétrica. Asimismo, ya que I aparece en una ecuación física de la forma (4.138), consistente para todas las orientaciones del sistema coordenado, se puede considerar que es un tensor (regla del cociente, Sección 3.3).

El problema ahora consiste en orientar los ejes coordenados en el espacio, de modo que I_{xy} y los otros elementos no diagonales desaparezcan. Como consecuencia de esta orientación y una indicación de la misma es que si la velocidad angular es a lo largo de uno de los ejes realineados, la velocidad angular y el momento angular serán paralelos.

Imagen Geométrica. Elipsoide. Probablemente es instructivo considerar una imagen geométrica de este problema. Si la matriz de inercia I se multiplica en cada lado por un vector unitario de dirección viariable, $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$,

$$[n]\mathrm{I}\{n\} = \mathrm{I}, \tag{4.141}$$

en donde **I** es un número (escalar) cuya magnitud depende de la selección de la dirección de **n**. Efectuando la multiplicación

$$\mathrm{I} = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma. \tag{4.142}$$

Para llevar esto a una forma estándar para elipsoide, introducimos

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{\mathrm{I}}}, \tag{4.143}$$

en donde $\boldsymbol{\rho}$ es variable en dirección y magnitud. La Ec. 4.142 se transforma en

$$1 = I_{xx}\rho_1^2 + I_{yy}\rho_2^2 + I_{zz}\rho_3^2 + 2I_{xy}\rho_1\rho_2 + 2I_{xz}\rho_1\rho_3 + 2I_{yz}\rho_2\rho_3. \tag{4.144}$$

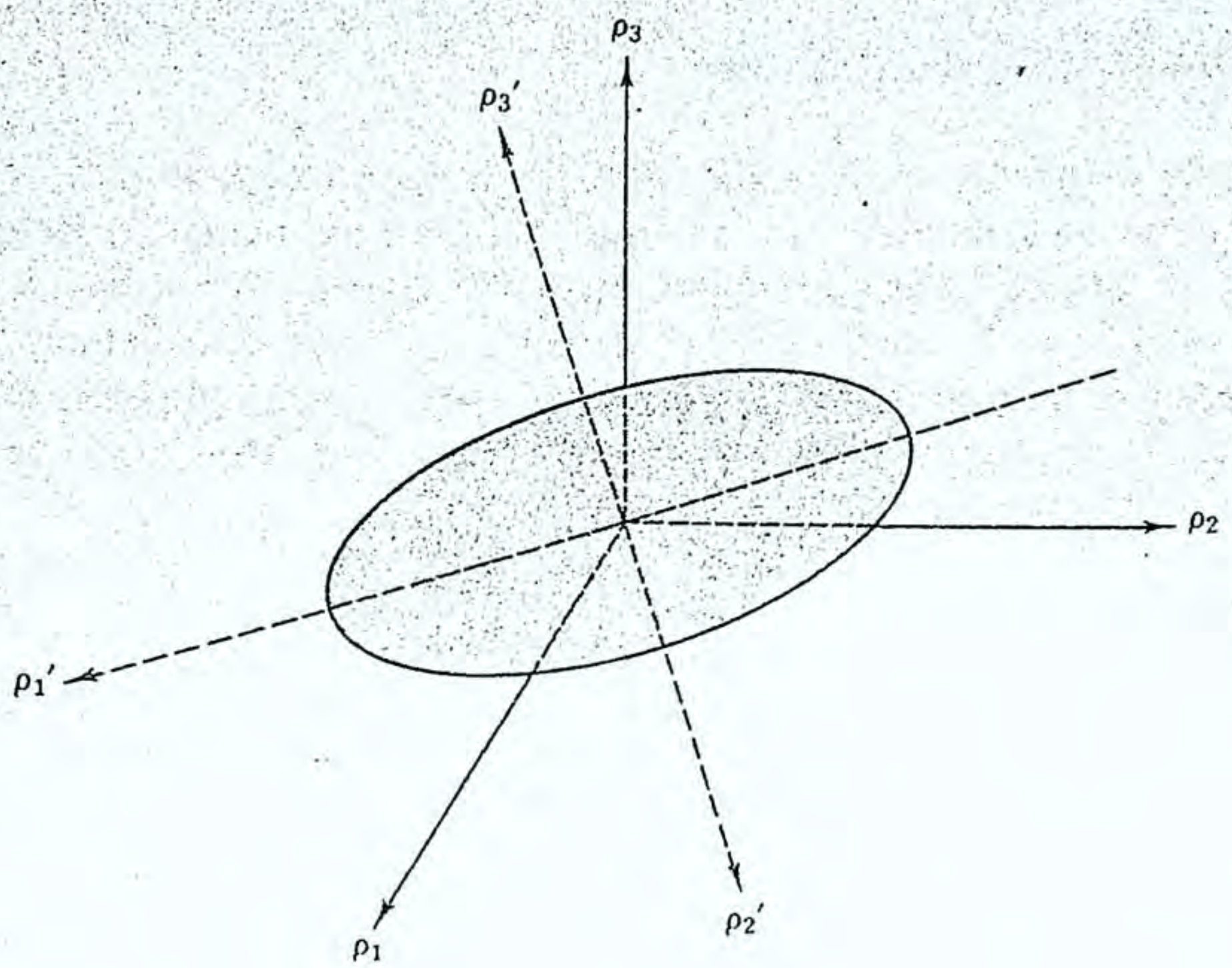


Fig. 4.5 Elipsoide del momento de inercia

Esta es la forma general de una elipsoide relativa a las coordenadas ρ_1, ρ_2, ρ_3. Sin embargo, de acuerdo con la geometría analítica, se conoce que los ejes coordenados siempre pueden rotarse para coincidir con los ejes de nuestra elipsoide. Entonces

$$1 = I_1\rho_1'^2 + I_2\rho_2'^2 + I_3\rho_3'^2, \tag{4.145}$$

en donde ρ_1', ρ_2', ρ_3' es el nuevo conjunto de coordenadas.

Ejes Principales. En muchos casos elementales, especialmente cuando se tiene presente la simetría, estos ejes nuevos, denominados *ejes principales,* se pueden encontrar mediante inspección. Ahora procedemos a desarrollar un método general para definir los elementos diagonales y los ejes principales.

Matrices Hermitianas. Primeramente, es de indicarse un teorema importante relacionado con los elementos diagonales y los ejes principales. En la ecuación

$$\mathsf{A}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} \tag{4.146}$$

en donde λ, un número (escalar), se conoce como valor propio; $\mathbf{r}$, el vector correspondiente, es el vector propio.[1] Los términos han sido introducidos desde la primera literatura alemana relacionada con la mecánica cuántica.

[1] La Ec. 4.138 toma esta forma cuando ω es a lo largo de uno de los ejes principales. Así, $\mathbf{L} = \lambda\omega$ y $\mathsf{I}\omega = \lambda\omega$. En la literatura de las matemáticas, λ generalmente se denomina *valor característico,* ω *vector característico.*

Ahora demostraremos que si **A** es una matriz hermitiana,[1] sus valores propios son verdaderos y su vector propio es ortogonal.

Sean λ_i y λ_j dos valores propios de $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_j$, los vectores propios correspondientes de **A**, una matriz hermitiana. Siendo así,

$$\mathsf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i \tag{4.147}$$

$$\mathsf{A}\mathbf{r}_j = \lambda_j \mathbf{r}_j . \tag{4.148}$$

La Ec. 4.147 se multiplica por $\mathbf{r}_j^\dagger$ para dar lugar a

$$\mathbf{r}_j^\dagger \mathsf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_j^\dagger \mathbf{r}_i . \tag{4.149}$$

(Observe que si $\mathbf{r}$ es un vector de columna, $\mathbf{r}^\dagger$ es un vector de hilera.) La Ec. 4.148 se multiplica por $\mathbf{r}_i^\dagger$ para dar lugar a

$$\mathbf{r}_i^\dagger \mathsf{A}\mathbf{r}_j = \lambda_j \mathbf{r}_i^\dagger \mathbf{r}_j . \tag{4.150}$$

Considerando el adjunto de esta ecuación

$$\mathbf{r}_j^\dagger \mathsf{A}^\dagger \mathbf{r}_i = \lambda_j^* \mathbf{r}_j^\dagger \mathbf{r}_i \tag{4.151}$$

o

$$\mathbf{r}_j^\dagger \mathsf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_j^* \mathbf{r}_j^\dagger \mathbf{r}_i , \tag{4.152}$$

ya que **A** es hermitiana. Restando la Ec. 4.152 de la Ec. 4.149, se obtiene

$$(\lambda_i - \lambda_j^*)\mathbf{r}_j^\dagger \mathbf{r}_i = 0. \tag{4.153}$$

Esto corresponde a un resultado general para las cuatro combinaciones posibles de i y j. Primeramente, sea $i = j$. Siendo así, la Ec. 4.153 se transforma en

$$(\lambda_i - \lambda_i^*)|\mathbf{r}_i|^2 = 0. \tag{4.154}$$

Ya que $|\mathbf{r}_i| = 0$ sería una solución trivial de la Ec. 4.154, se puede concluir que

$$\lambda_i = \lambda_i^* , \tag{4.155}$$

o sea que λ_i es verdadera para todas las i.

En segundo lugar, para $i \neq j$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$,

$$(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{r}_j^\dagger \mathbf{r}_i = 0 \tag{4.156}$$

o

$$\mathbf{r}_j^\dagger \mathbf{r}_i = 0, \tag{4.157}$$

lo cual significa que los vectores propios de *distintos* valores propios son ortogonales, de modo que la Ec. 4.157 representa nuestra generalización de la ortogonalidad en este espacio complejo.[2]

Si $\lambda_i = \lambda_j$ (caso degenerado), $\mathbf{r}_i$ no es automáticamente ortogonal con respecto a $\mathbf{r}_j$, pero puede *hacerse* ortogonal. Considere nuevamente el problema físico de la matriz del momento de inercia. Si x_1 es un eje de

[1] Si **A** es verdadero, el requisito hermitiano se sustituye por un requisito de simetría.

[2] La teoría correspondiente para los operadores diferenciales (teoría de Sturm-Liouville) aparece en la Sección 9.2. El análogo de ecuación integral (teoría de Hilbert-Schmidt) se proporciona en la Sección 16.4.

simetría rotacional, entonces se encuentra que $\lambda_2 = \lambda_3$. Los vectores propios $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ son cada uno perpendiculares al eje de simetría, $\mathbf{r}_1$, pero quedan localizados en alguna parte del plano perpendicular a $\mathbf{r}_1$; es decir, cualquier combinación lineal de $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ también es un vector propio. Considere $(a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3)$ con a_2 y a_3 constantes. Entonces

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3) &= a_2\lambda_2\mathbf{r}_2 + a_3\lambda_3\mathbf{r}_3 \\ &= \lambda_2(a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3), \end{aligned} \tag{4.158}$$

como era de esperarse, ya que x_1 es un eje de simetría rotacional. En consecuencia, si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se fijan, $\mathbf{r}_3$ puede seleccionarse simplemente para quedar en un plano perpendicular a $\mathbf{r}_1$ y también perpendicular a $\mathbf{r}_2$. Un método general de ortogonalizar las soluciones, el proceso de Schmidt, se aplica a las funciones en la Sección 9.3.

Lo anterior es esencialmente un teorema de existencia. Para determinar los valores propios λ_i y los vectores propios $\mathbf{r}_i$ regresamos a la Ec. 4.146. Suponiendo que $\mathbf{r}$ sea multiplicado por la matriz unitaria, podemos volver a establecer la Ec. 4.146

$$(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{1})\mathbf{r} = 0, \tag{4.159}$$

en donde $\mathsf{1}$ es la matriz unitaria. Esto representa un conjunto de ecuaciones simultáneas, homogéneas y lineales. De acuerdo con la Sección 4.1, solamente tiene soluciones no triviales cuando el determinante de los coeficientes desaparece,

$$|\mathsf{A} - \lambda\mathsf{1}| = 0. \tag{4.160}$$

Consideremos el caso en que A es una matriz hermitiana de 3×3. Siendo así,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.161}$$

Debido a su aplicación en las teorías astronómicas, la Ec. 4.161 generalmente se denomina *ecuación secular.*[1] La Ec. 4.161 proporciona una ecuación cúbica en λ, que, evidentemente, tiene tres raíces. Mediante la Ec. 4.155 conocemos que estas tres raíces son reales. Sustituyendo una raíz a la vez nuevamente en la Ec. 4.159 podemos encontrar los vectores propios correspondientes.

EJEMPLO 4.6.1

Sea

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.162}$$

[1] Esta ecuación también aparece en la teoría de perturbación de segundo orden en la mecánica cuántica.

La ecuación secular es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.163}$$

o

$$-\lambda(\lambda^2 - 1) = 0, \tag{4.164}$$

desarrollando por menores. Las raíces son $\lambda = -1, 0, 1$. Para encontrar el vector correspondiente a $\lambda = -1$, se procede a sustituir este valor nuevamente en la ecuación de valor propio, Ec. 4.159

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.165}$$

Con $\lambda = -1$, esto da lugar a

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned} \tag{4.166}$$

Dentro de un factor de escala arbitrario y con un signo arbitrario (o factor de fase), $\mathbf{r}_1 = (1, -1, 0)$. Observe cuidadosamente que (para la $\mathbf{r}$ real en el espacio ordinario) el vector propio establece una línea en el espacio. El sentido positivo o negativo no está determinado. Esta indeterminación es de esperarse si observamos que la Ec. 4.159 es homogénea en $\mathbf{r}$. Por conveniencia habremos de requerir que los vectores propios sean normalizados a la unidad, $|\mathbf{r}_1| = 1$. Con esta selección de signo,

$$\mathbf{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \tag{4.167}$$

es fijo. Para $\lambda = 0$, la Ec. 4.159 da como resultado

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ x &= 0, \end{aligned} \tag{4.168}$$

$\mathbf{r}_2 = (0, 0, 1)$ es un vector propio adecuado. Finalmente, para $\lambda = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ z &= 0, \end{aligned} \tag{4.169}$$

o

$$\mathbf{r}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right). \tag{4.170}$$

La ortogonalidad de $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$, correspondiente a los tres valores propios distintos, puede verificarse sin dificultad.

EJEMPLO 4.6.2

Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.171}$$

La ecuación secular es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.172}$$

o

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0, \qquad \lambda = -1, 1, 1, \tag{4.173}$$

un caso degenerado. Si $\lambda = -1$, la ecuación de valor propio (4.159) proporciona

$$\begin{aligned} 2x &= 0, \\ y + z &= 0. \end{aligned} \tag{4.174}$$

Un vector propio normalizado adecuado es

$$\mathbf{r}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.175}$$

Para $\lambda = 1$, se obtiene

$$-y + z = 0 \tag{4.176}$$

y ninguna información adicional. Se tiene un número infinito de selecciones. Suponga, como una selección posible, que $\mathbf{r}_2$ se considera en la forma

$$\mathbf{r}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \tag{4.177}$$

lo cual evidentemente satisface la Ec. 4.176. Entonces, $\mathbf{r}_3$ debe ser perpendicular a $\mathbf{r}_1$ y puede hacerse perpendicular a $\mathbf{r}_2$ mediante

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (1, 0, 0) \tag{4.178}$$

Diagonalización. Las ecuaciones desarrolladas en la página 236 para nuestro teorema de existencia, pueden emplearse para formar una matriz de transformación que convierta la matriz hermitiana **A** a la forma diagonal. Sea **R** una matriz formada de los tres vectores de *columna* ortonormales $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ en cualquier orden deseado.

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \tag{4.179}$$

en donde cada columna $\{x_i, y_i, z_i\}$ es un vector propio $\mathbf{r}_i$. Ya que

$$\mathbf{r}_i^\dagger \mathbf{r}_j = \delta_{ij} \tag{4.180}$$

$\mathbf{R}$ es unitaria (o simplemente ortogonal si $\mathbf{A}$ y, consecuentemente $\mathbf{r}_i$, son verdaderos). Siendo así, al formar $\mathsf{R}^\dagger\mathsf{AR}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}^\dagger\mathsf{AR} &= \begin{pmatrix} [\ \mathbf{r}_1^*\ ] \\ [\ \mathbf{r}_2^*\ ] \\ [\ \mathbf{r}_3^*\ ] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{A} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} [\ \mathbf{r}_1^*\ ] \\ [\ \mathbf{r}_2^*\ ] \\ [\ \mathbf{r}_3^*\ ] \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{r}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2\mathbf{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3\mathbf{r}_3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.181}$$

En consecuencia, $\mathsf{R}^\dagger\mathsf{AR}$ es una matriz diagonal con valores propios λ_i, en que el orden de los valores propios corresponden al orden de los vectores de columna $\mathbf{r}_i$ en $\mathbf{R}$. Para desarrollar la imagen geométrica, considere que $\mathbf{A}$ es una matriz verdadera (simétrica) con valores propios verdaderos y vectores propios verdaderos. La matriz $\mathbf{R}$ corresponde a B^{-1} en la Ec. 4.95 o, mejor dicho, $\tilde{\mathsf{R}}$ corresponde a $\mathbf{B}$, en que $\tilde{\mathsf{R}}$ está formada de los vectores propios $\mathbf{r}_i$ establecidos como vectores de hilera.

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{r}_1] \\ [\mathbf{r}_2] \\ [\mathbf{r}_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.182}$$

Ahora, la hilera (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}), que define un vector unitario $\mathbf{r}_i$ en relación al sistema coordenado original, especifica los tres cosenos de dirección de $\mathbf{r}_i$ con los ejes originales. Recordando que la matriz $\mathbf{B}$ hace girar el sistema coordenado hacia un nuevo sistema en que $\mathbf{A}$ es diagonal, se observa que este nuevo sistema está especificado por los tres vectores propios $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Estos son los vectores unitarios a lo largo de los ejes principales, los ejes con relación a los cuales $\mathbf{A}$ es diagonal.

El análisis anterior tiene la ventaja de presentar y aclarar las relaciones conceptuales en la diagonalización de las matrices. Sin embargo, para las matrices superiores a 3×3, o probablemente 4×4, el procedimiento se transforma rápidamente en algo bastante laborioso de modo que debemos

volver agradecidamente nuestra consideración hacia las computadoras de alta velocidad y las técnicas iterativas. Una de tales técnicas es el método de Jacobi para determinar los valores propios y los vectores propios de las matrices simétricas verdaderas.

EJERCICIOS

4.6.1 Demuestre que los valores de una matriz no se alteran si la matriz se transforma por similaridad.

Esta propiedad no está limitada a las matrices simétricas o hermitianas. Se aplica a las matrices unitarias y a cualquier matriz que pueda llevarse a la forma diagonal por medio de la transformación de similaridad. Como consecuencia de esta invariancia de los valores propios:

(a) la traza (suma de los valores propios) es invariante bajo la transformación de similaridad. Ejercicio 4.3.8 y

(b) el determinante (producto de los valores propios) es invariante bajo la transformación de similaridad. Ejercicio 4.3.9.

4.6.2 Como inverso del teorema establecido en la página 233, demuestre que si (a) los valores propios de la matriz son verdaderos y (b) los vectores propios satisfacen la Ec. 4.180, $\mathbf{r}_i^\dagger \mathbf{r}_j = \delta_{ij}$, entonces la matriz es hermitiana.

4.6.3 Demuestre que una matriz verdadera que no es simétrica no puede diagonalizarse mediante la transformación de similaridad ortogonal.

Sugerencia. Suponga que la matriz verdadera no simétrica puede diagonalizarse y desarrolle una contradicción.

4.6.4 Las matrices que representan los componentes de momento angular J_x, J_y y J_z son hermitianas. Demuestre que los valores propios de J^2 en donde $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ son verdaderos y no negativos.

4.6.5 El cuadrado de una matriz hermitiana particular es la matriz unitaria. Demuestre que todos los valores propios de la matriz hermitiana original son ± 1.

Nota. Las matrices de Pauli y Dirac son ejemplos específicos.

4.6.6 Una matriz cuadrada con determinante cero se denomina *singular.*

(a) Si **A** es singular, demuestre que existe al menos un vector de columna **v** no igual a cero, tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = 0.$$

(b) Si existe un vector no igual a cero tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = 0,$$

demuestre que **A** es una matriz singular.

4.6.7 La misma transformación de similaridad diagonaliza cada una de dos matrices. Demuestre que las matrices originales deben conmutarse. (Esto es particularmente importante en la formulación de matriz [Heisenberg] de la mecánica cuántica.)

4.6.8 Dos matrices hermitianas **A** y **B** tienen los mismos valores propios. Demuestre que **A** y **B** están relacionadas por una transformación de similaridad unitaria.

4.6.9 Encuentre los valores propios y un conjunto ortogonal (ortogonal y normalizado) de vectores propios para las matrices del Ejercicio 4.2.14.

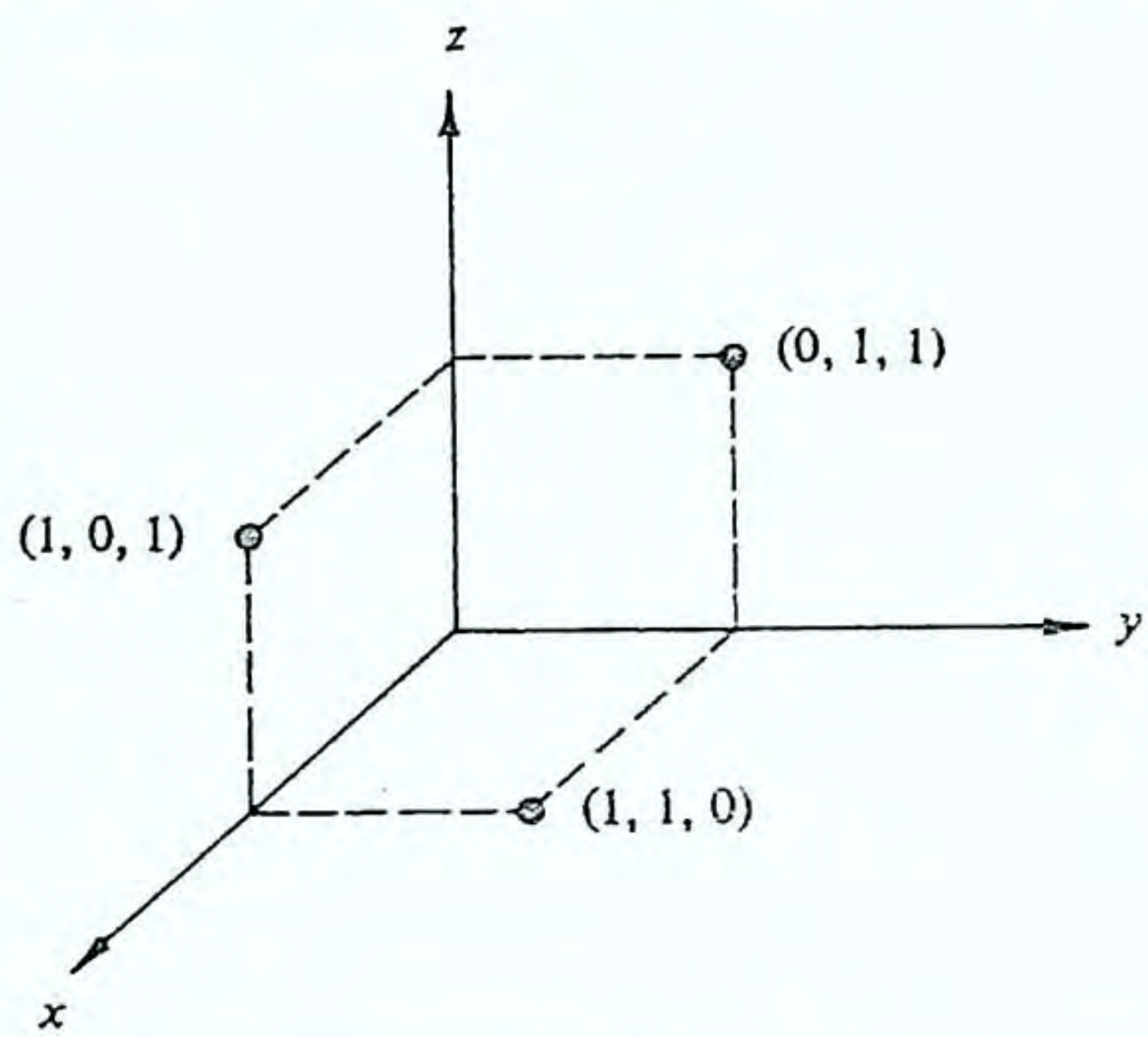
4.6.10 Demuestre que la matriz de inercia para una partícula simple de masa m en (x, y, z) tiene un determinante cero. Explique este resultado en términos de la invariancia del determinante de la matriz bajo la transformación de similaridad (Ejercicio 4.3.9) y una rotación posible del sistema coordenado.

4.6.11 Cierto cuerpo rígido puede representarse mediante las masas de tres puntos:

$$m_1 = 1 \quad \text{at} \quad (1, 1, -2)$$
$$m_2 = 2 \quad \text{at} \quad (-1, -1, 0)$$
$$m_3 = 1 \quad \text{at} \quad (1, 1, 2).$$

(a) Encuentre la matriz de inercia.
(b) Diagonalice la matriz de inercia obteniendo los valores propios y los ejes principales (en la forma de vectores propios ortonormales).

4.6.12



Se colocan masas unitarias como se muestra en la figura.
(a) Encuentre la matriz del momento de inercia.
(b) Encuentre los valores propios y un conjunto de vectores propios ortonormales.
(c) Explique la degeneración en términos de la simetría del sistema

$$\textit{Respuesta.}\quad I = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \mathbf{r}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 5. \end{array}$$

4.6.13 Masas unitarias se mantienen en las ocho esquinas de un cubo $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Encuentre la matriz del momento de inercia y demuestre que se tiene una degeneración triple. Esto significa que, al menos en lo que se refiere a los momentos de inercia, la estructura cúbica manifiesta simetría esférica.

4.6.14 Encuentre los valores propios y los vectores propios ortonormales correspondientes de las siguientes matrices (a modo de comprobación numérica, observe que la suma de los valores propios equivale a la suma de los elementos diagonales de la matriz original: Ejercicio 4.3.8):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \textit{Respuesta.}\quad \lambda = 0, 1, 2.$$

4.6.15
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = -1, 0, 2.$

4.6.16
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = -1, 1, 2.$

4.6.17
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 1 & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 1 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = -3, 1, 5.$

4.6.18
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = 0, 1, 2.$

4.6.19
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = -1, 1, 2.$

4.6.20
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}.$

4.6.21
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = 0, 2, 2.$

4.6.22
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = -1, -1, 2.$

4.6.23
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = -1, 2, 2.$

4.6.24
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = 0, 0, 3.$

4.6.25
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = 1, 1, 6.$

4.6.26
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = 0, 0, 2.$

4.6.27
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Respuesta. $\lambda = 2, 3, 6.$

4.6.28 Este es una continuación del Ejercicio 4.5.9, en donde la matriz unitaria **U** y la matriz hermitiana **H** están relacionadas por

$$U = e^{iaH}$$

(a) Si la traza **H** = 0, demuestre que el det **U** = +1.

(b) Si det **U** = +1, demuestre que la traza **U** = 0.

Sugerencia: **H** puede diagonalizarse mediante una transformación de similaridad. Siendo así, al interpretar el exponencial mediante un desarrollo de Maclaurin, **U** también es diagonal. Los valores propios correspondientes están dados por $u_j = \exp(iah_j)$.

Nota. Estas propiedades y la del Ejercicio 4.5.9 son esenciales en el desarrollo del concepto de *generadores* en la teoría de grupos: Sección 4.10.

4.6.29 (a) Suponiendo que la matriz unitaria **U** satisface una ecuación de valor propio $\mathbf{U}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$, demuestre que los valores propios de la matriz unitaria tienen magnitud unitaria.

El mismo resultado es consistente para las matrices ortogonales.

(b) Si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los vectores propios de una matriz unitaria correspondiente a dos valores propios distintos, demuestre que los vectores propios son ortogonales en el sentido de que

$$\mathbf{r}_1^\dagger \mathbf{r}_2 = 0.$$

4.6.30 Una matriz no hermitiana **A** tiene valores propios λ_i y los vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_i$. La matriz adjunta $A^\dagger$ tiene el mismo conjunto de valores propios, pero los vectores propios son *diferentes*, $\mathbf{v}_i$. Demuestre que las funciones propias forman un conjunto *biortogonal* en el sentido de que

$$[v_i^*]\{u_j\} = 0 \quad \text{para} \quad \lambda_i^* \neq \lambda_j.$$

4.6.31 Demuestre que cada matriz 2×2 tiene dos vectores propios y los valores propios correspondientes. Los vectores propios no son necesariamente ortogonales. Los valores propios no son necesariamente verdaderos.

4.6.32 Como ilustración del Ejercicio 4.6.31, encuentre los valores propios y los vectores propios correspondientes para

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que los vectores propios *no* son ortogonales.

Respuesta. $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{r}_1 = (2, -1)$;
$\lambda_2 = 4$, $\mathbf{r}_2 = (2, \quad 1)$.

4.6.33 Una matriz **P** es un operador de proyección que satisface la condición

$$P^2 = P.$$

Demuestre que los valores propios correspondientes $(\rho^2)_\lambda$ y ρ_λ satisfacen la relación

$$(\rho^2)_\lambda = (\rho_\lambda)^2 = \rho_\lambda.$$

Esto significa que los valores propios de **P** son 0 y 1.

4.7 Introducción a la Teoría de Grupos

La teoría de los grupos finitos, desarrollada originalmente como una rama de las matemáticas puras, puede convertirse en una diversión bella y fascinante. Para el físico, la teoría de grupos, sin ninguna pérdida de su belleza, también constituye una herramienta de extraordinaria utilidad en la formalización de los conceptos semiintuitivos y para la explotación de las simetrías. La teoría de grupos se transforma en una herramienta útil en

el desarrollo de la física de la cristalografía y del estado sólido cuando se introducen las representaciones específicas (matrices) y se inicia el cálculo de los caracteres de grupo (trazas). En la Sección 4.8 aparece una breve introducción a esta área. Probablemente de mayor importancia en la física es la extensión de la teoría de grupos a los grupos continuos[1] y la aplicación de estos grupos continuos a la teoría cuántica y las partículas de la física de alta energía. Este es el tema de las Secciones 4.9-4.11.

A medida que el conocimiento de nuestro mundo físico se amplió explosivamente en la primera tercera parte de este siglo, Wigner y otros comprendieron que la *invariancia* era un concepto clave en la comprensión de los nuevos fenómenos y en el desarrollo de las teorías apropiadas. La herramienta matemática para el tratamiento de la invariancia y las simetrías es la teoría de grupos. Representa la unificación y formalización de los principios tales como: la paridad y el momento angular, de amplia utilización por parte de los físicos. La paridad está relacionada con la invariancia bajo la inversión (Ejercicio 2.12.3). La conservación del momento angular es una consecuencia directa de la simetría rotacional, lo cual significa invariancia bajo las rotaciones espaciales. Aun cuando las técnicas formales de la teoría de grupos pudieran no ser necesarias, estas técnicas matemáticas poderosas pueden ahorrar mucho trabajo. La teoría de grupos puede producir la unificación que (una vez comprendida) permite lograr una mayor simplificación.

Definición de un Grupo. Un *grupo G* puede definirse como un conjunto de objetos u operaciones (denominados *elementos*), que pueden combinarse o "multiplicarse" para formar un producto bien definido y que satisface las cuatro condiciones indicadas más adelante. Establecemos el conjunto de elementos $a, b, c, \ldots$:

1. Si a y b son dos elementos cualesquiera, entonces el producto ab también es un miembro del conjunto.
2. La multiplicación definida es asociativa: $(ab)c = a(bc)$.
3. Existe un elemento unitario I tal que $Ia = aI = a$ para cada elemento en el conjunto.[2]
4. Debe existir un inverso o recíproco de cada elemento. El conjunto debe contener un elemento $b = a^{-1}$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ para cada elemento del conjunto.

En la física, estas condiciones abstractas frecuentemente adquieren un significado físico directo en términos de las transformaciones de los vectores, spins y tensores.

[1] Estos son grupos con un número infinito de elementos. Cada elemento depende de uno o más parámetros que varían continuamente.

[2] De acuerdo con Wigner, el elemento unitario de un grupo frecuentemente se denomina *E*, según la palabra alemana *Einheit*, la unidad.

Como ejemplo bastante simple, pero no trivial, considere el conjunto 1, a, b, c que se combina de acuerdo con la tabla de multiplicación de grupos[1]

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

Para representar estos elementos de grupo, sea

$$1 \to 1, \qquad a \to i, \qquad b \to -1, \qquad c \to -i, \tag{4.183}$$

combinando mediante la multiplicación ordinaria. Evidentemente, las cuatro condiciones de grupo se satisfacen, y estos cuatro elementos forman un grupo. Ya que la multiplicación de los elementos de grupo es conmutativa, el grupo se denomina *conmutativo* o *abeliano*. Nuestro grupo también es un *grupo cíclico* en cuanto a que los elementos pueden indicarse como potencias sucesivas de un elemento, que en este caso es i^n, $n = 0$, 1, 2, 3. Observe que al establecer la Ec. 4.183, hemos seleccionado una *representación* específica para este grupo de cuatro objetos.

Podemos reconocer que los elementos del grupo 1, i, -1, $-i$ pueden interpretarse como rotaciones de 90° sucesivas en el plano complejo. Luego, a partir de la Ec. 4.63, se establece el conjunto de cuatro matrices 2×2

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathsf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathsf{B} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \mathsf{C} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.184}$$

Este conjunto de cuatro matrices forma un grupo en que la ley de combinación es la multiplicación de matrices. Esto representa una segunda representación, ahora en términos de matrices. Un poco de trabajo de multiplicación de matrices verifica que esta representación también es abeliana y cíclica. Evidentemente existe una correspondencia entre las dos representaciones

$$1 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 1 \qquad a \leftrightarrow i \leftrightarrow \mathsf{A} \qquad b \leftrightarrow -1 \leftrightarrow \mathsf{B} \qquad c \leftrightarrow -i \leftrightarrow \mathsf{C}. \tag{4.185}$$

[1] El orden de los factores es hilera-columna: $ab = c$ en el ejemplo anterior indicado.

Isomorfismo, Homomorfismo. Si la correspondencia entre los elementos de dos grupos (o entre dos representaciones) es de uno a uno con cada conjunto de elementos satisfaciendo la misma tabla de multiplicación de grupo, se dice que los grupos son *isomórficos.*[1] Si la correspondencia es de dos a uno (o muchos a uno), pero aún se conservan las relaciones de multiplicación, entonces los grupos son *homomórficos.* En el caso justamente considerado, las dos representaciones $(1, i, -1, -i)$ y $(1, A, B, C)$ son isomórficas. La representación siempre posible pero trivial $(1, 1, 1, 1)$ sería homomórfica. En la Sección 4.9 se desarrolla la correspondencia más importante entre los grupos O_3^+ y $SU(2)$.

En contraste con esto, no existe correspondencia entre cualquiera de estas representaciones y otro grupo de cuatro objetos, el *vierergruppe,* Ejercicio 4.2.7. Como confirmación de esto, observe que aun cuando el *vierergruppe* es abeliano, no es cíclico.

Representaciones de Matriz: Reducibles e Irreducibles. La representación de los elementos de grupo por medio de matrices es una técnica bastante poderosa y ha sido adoptada casi universalmente dentro del grupo de los físicos. El uso de las matrices no impone ninguna limitación considerable. Se puede demostrar que los elementos de cualquier grupo finito y de los grupos continuos de la Sección 4.9 pueden representarse por medio de matrices y, en particular, mediante matrices unitarias. En la mecánica cuántica, estas representaciones unitarias adquieren una importancia particular ya que las matrices unitarias se pueden diagonalizar, y los valores propios pueden servir para la clasificación de los estados cuánticos.

En caso de existir una transformación unitaria que transforme nuestras matrices de representación a la forma diagonal o de bloque-diagonal, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{11} & q_{12} \\ 0 & 0 & q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \tag{4.186}$$

de modo que las porciones menores o submatrices ya no se encuentren acopladas entre sí, entonces la representación original es *reducible.* De manera equivalente, se tiene

$$\mathsf{SRS}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathsf{P} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{Q} \end{pmatrix}. \tag{4.187}$$

[1] Suponga que los elementos de un grupo se denominan g_i, y los elementos de un segundo grupo, h_i. Entonces, $g_i \leftrightarrow h_i$, es decir una correspondencia de uno a uno para todos los valores de i. Asimismo, si $g_i g_j = g_k$, y $h_i h_j = h_k$, entonces g_k y h_k deben ser elementos correspondientes.

Si **R** es una matriz de $n \times n$, **P** podría ser una matriz de $m \times m$, **Q** una matriz de $(n-m) \times (n-m)$. Los términos **Q** son entonces matrices rectangulares $m \times (n-m)$ y $(n-m) \times m$ en que todos los elementos son cero. Este resultado se puede indicar en la forma

$$\mathsf{R} = \mathsf{P} \oplus \mathsf{Q}, \tag{4.188}$$

y decir que **R** ha sido descompuesta en las representaciones **P** y **Q**. Por ejemplo, todas las representaciones de dimensión mayor que uno de los grupos abelianos son reducibles. En caso de no existir la transformación unitaria, la representación es *irreducible*. Dentro de las matrices de Dirac de la Tabla 4.1, $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_3, \delta_1, \delta_2$ y δ_3 se encuentran en esta forma reducida. El tema del Ejercicio 4.7.1 consiste en demostrar que las matrices 1, A, B y **C** forman una representación reducible y reducir las mismas a las representaciones irreducibles.

Las representaciones irreducibles tienen una intervención en la teoría de grupos que, en términos generales, es análoga a los vectores unitarios del análisis vectorial. Constituyen las representaciones más simples; todas las demás representaciones pueden elaborarse a partir de las mismas.

Carácter. En la Sección 4.3 hemos establecido que una matriz verdadera se transforma bajo la rotación de las coordenadas por medio de una transformación de similaridad ortogonal. Dependiendo de la selección de la estructura de referencia, prácticamente la misma matriz puede adquirir una infinidad de formas distintas. De modo similar, nuestras representaciones de grupo pueden establecerse en una infinidad de formas distintas utilizando las transformaciones unitarias. Sin embargo, cada una de las representaciones transformadas es isomórfica, con respecto a la original. De acuerdo con el Ejercicio 4.3.8, la traza de cada elemento (cada matriz de nuestra representación) es invariante bajo las transformaciones unitarias. Simplemente a causa de que es invariante, la traza (que ahora se ha denominado *carácter*) tiene una intervención de cierta importancia en la teoría de grupos, particularmente en las aplicaciones a la física del estado sólido.

Subgrupo. Frecuentemente sucede que un subconjunto de los elementos de grupo (incluyendo el elemento unitario I) satisface por sí mismo los requisitos de grupo y consecuentemente constituye un grupo. Tal subconjunto se denomina *subgrupo*. Los elementos 1 y b del grupo de cuatro elementos considerado antes forman un subgrupo. En la Sección 4.9 se considera O_3^+, el grupo (continuo) de todas las rotaciones en el espacio ordinario. Las rotaciones alrededor de cualquier eje simple forman un subgrupo de O_3^+. En las siguientes secciones aparecen una gran diversidad de ejemplos de subgrupos.

En algunas ocasiones, la transformación de similaridad de cada miembro x del subgrupo por todos los miembros g del grupo entero es un miembro de un subgrupo,

$$y = gxg^{-1}. \tag{4.189}$$

Tal subgrupo se denomina *subgrupo invariante* y está relacionado con los multipletes de los espectros atómico y nuclear y las partículas descritas en la Sección 4.11. Todos los subgrupos de un grupo abeliano son automáticamente invariantes.

EJERCICIOS

4.7.1 Demuestre que las matrices 1, **A**, **B** y **C** de la Ec. 4.184 son reducibles. Proceda a reducirlas.

Nota. Esto significa transformar **A** y **C** a la forma diagonal (mediante la *misma* transformación unitaria).

4.7.2 Las operaciones posibles de una estructura posible incluyen A_π (rotación por π), m (reflexión) e i (inversión). Estas tres operaciones se combinan en la forma

$$A_\pi^2 = m^2 = i^2 = 1,$$
$$A_\pi \cdot m = i, \qquad m \cdot i = A_\pi, \qquad \text{y} \qquad i \cdot A_\pi = m.$$

Demuestre que el grupo $(1, A_\pi, m, i)$ es isomórfico con respecto al *vierergruppe.*

4.7.3 Cuatro operaciones posibles en el plano xy son:

1. sin cambio $\begin{cases} x \to x \\ y \to y \end{cases}$

2. inversión $\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$

3. reflexión $\begin{cases} x \to -x \\ y \to y \end{cases}$

4. reflexión $\begin{cases} x \to x \\ y \to -y. \end{cases}$

(a) Demuestre que estas cuatro operaciones forman un grupo.
(b) Demuestre que este grupo es isomórfico con respecto al *vierergruppe.*
(c) Establezca una representación de matriz 2×2.

4.7.4 Teorema de readaptación.
Dado un grupo de n elementos distintos $(I, a, b, c, \ldots n)$, demuestre que el conjunto de productos $(aI, a^2, ab, ac, \ldots an)$ reproduce los n elementos distintos en un nuevo orden.

4.8 Grupos Discretos

En la física, los grupos normalmente aparecen como un conjunto de operaciones que llevan a un sistema invariante y sin cambio. Esta es una expresión de simetría. De hecho, la simetría puede definirse como la invariancia de la hamiltoniana de un sistema, bajo un grupo de transformaciones. La simetría en este aspecto es importante en la mecánica clásica,

pero adquiere una importancia mayor y más profunda en la mecánica cuántica. En esta sección se investigan las propiedades de simetría de los conjuntos de objetos (átomos en una molécula o cristal). Esto proporciona ilustraciones adicionales de los conceptos de grupo correspondientes a la Sección 4.7 y nos lleva directamente a los grupos dihedrales. Los grupos dihedrales a su vez establecen el principio del estudio de los 32 grupos de punto y los 230 grupos de espacio, cada uno de los cuales es de importancia en la cristalografía y la física de estado sólido. Hacemos notar que ha sido a través del estudio de las simetrías cristalinas como los conceptos de la simetría y la teoría de grupos han hecho su entrada a la física.

Dos Objetos: Eje de Doble Simetría. Considere primeramente el sistema bidimensional formado por dos átomos idénticos en el plano xy en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, Fig. 4.6. ¿Cuáles son las rotaciones[1] que pueden aplicarse para lograr

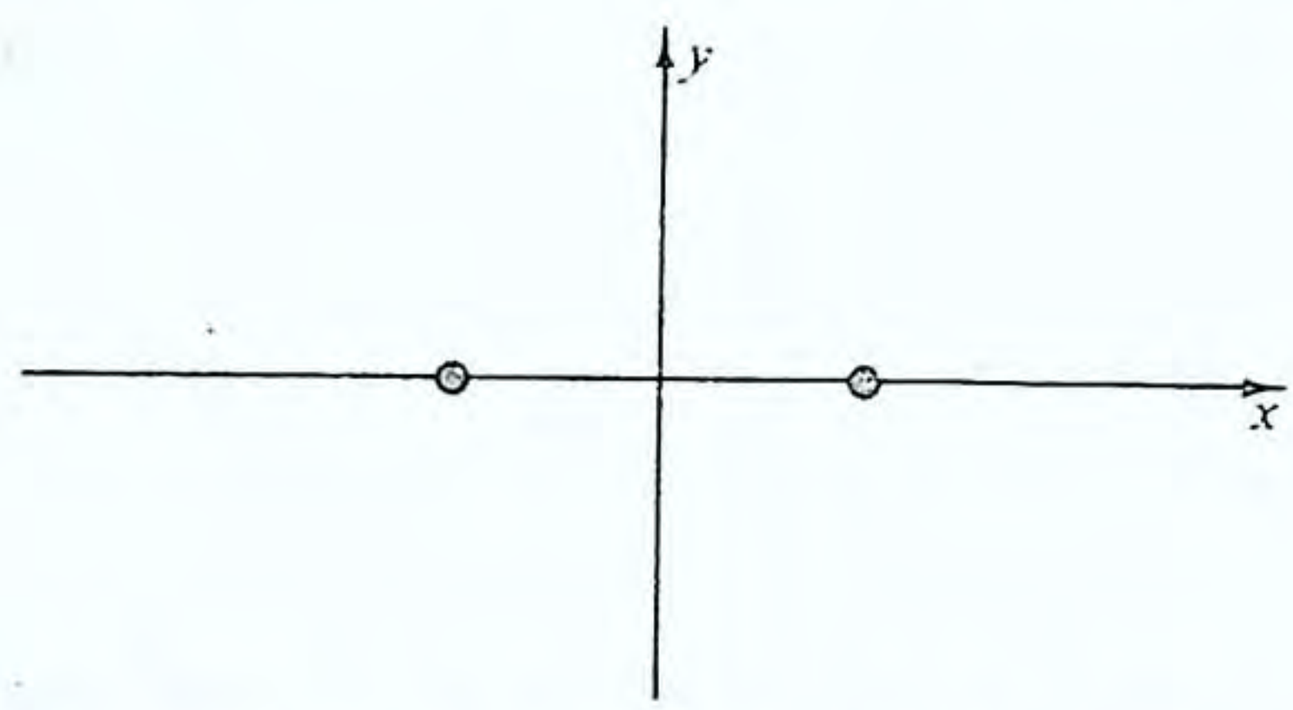


Fig. 4.6 Molécula diatómica de H_2, N_2, O_2, Cl_2, etc.

que este sistema sea invariante? Evidentemente el primer candidato es el operador unitario 1. Una rotación de π radianes alrededor del eje z, completa la lista. Siendo así, se tiene un grupo más bien falto de interés formado de dos miembros $(1, -1)$. El eje z se denomina eje de doble simetría, correspondiente a dos ángulos de rotación 0 y π, que dejan invariante al sistema.

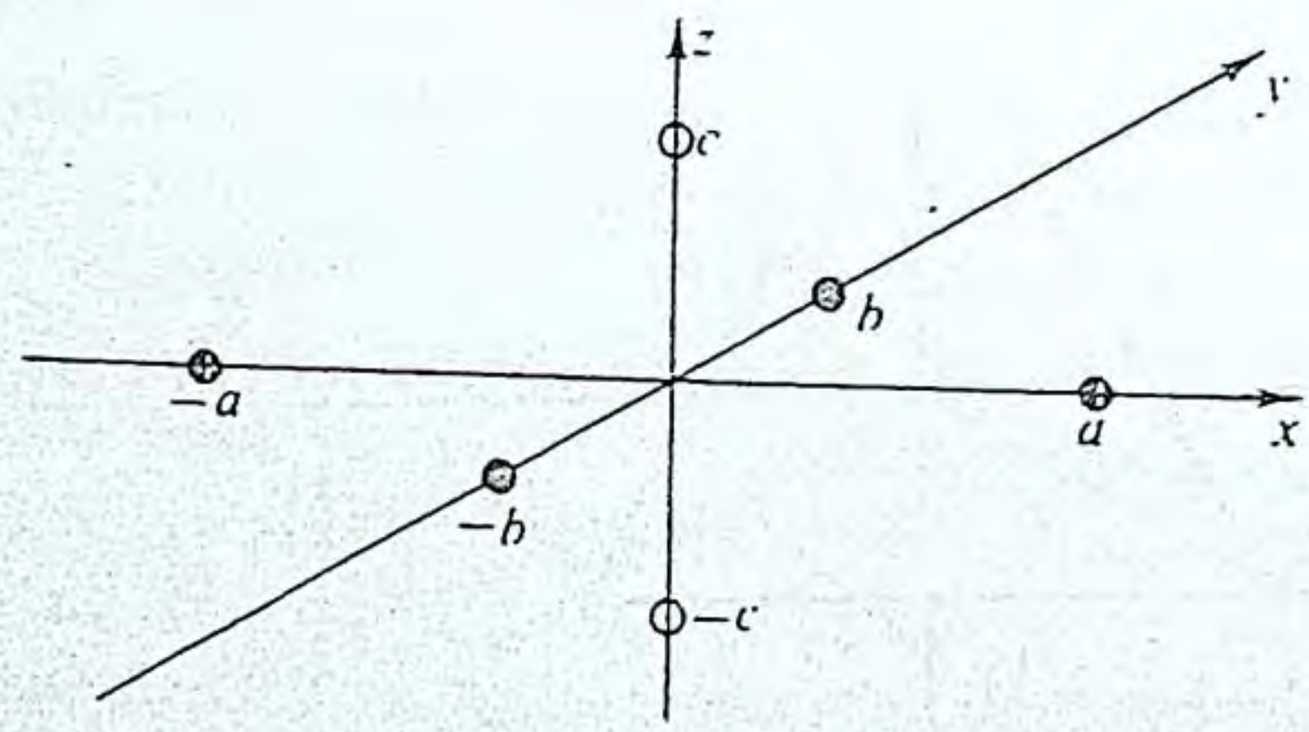


Fig. 4.7 Simetría de D_2

En este caso se han excluido deliberadamente las reflexiones y las inversiones. Deben considerarse en el desarrollo de todo el conjunto de 32 grupos de punto.

Nuestro sistema resulta más interesante en tres dimensiones. Imagine ahora una molécula (o parte de un cristal) con átomos del elemento X en $\pm a$ en el eje x, átomos del elemento Y en $\pm b$ en el eje y, y átomos del elemento Z en $\pm c$ en el eje z como se muestra en la Fig. 4.7. Evidentemente, cada eje corresponde ahora a un eje de doble simetría. Utilizando $R_x(\pi)$ para designar una rotación de π radianes alrededor del eje x, podemos establecer una representación de matriz correspondiente a las rotaciones igual que en la Sección 4.3.

$$R_x(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad R_y(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$R_z(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.190}$$

Estos cuatro elementos $[1, R_x(\pi), R_y(\pi), R_z(\pi)]$ forman un grupo abeliano con una tabla de multiplicación de grupo:

	1	$R_x(\pi)$	$R_y(\pi)$	$R_z(\pi)$
1	1	R_x	R_y	R_z
$R_x(\pi)$	R_x	1	R_z	R_y
$R_y(\pi)$	R_y	R_z	1	R_x
$R_z(\pi)$	R_z	R_y	R_x	1

La comparación de los Ejercicios 4.2.7, 4.7.2 o 4.7.3 muestra inmediatamente que este grupo es el *vierergruppe*. Las matrices de la Ec. 4.190 son isomórficas con respecto a las del Ejercicio 4.2.7. Asimismo, son evidentemente reducibles, son diagonales. Los subgrupos son $(1, R_x)$, $(1, R_y)$ y $(1, R_z)$. Son invariantes. Hay que notar que una rotación de π alrededor del eje y y una rotación de π alrededor del eje z es equivalente a una rotación de π alrededor del eje x. $R_z(\pi)R_y(\pi) = R_x(\pi)$. En términos de simetría,

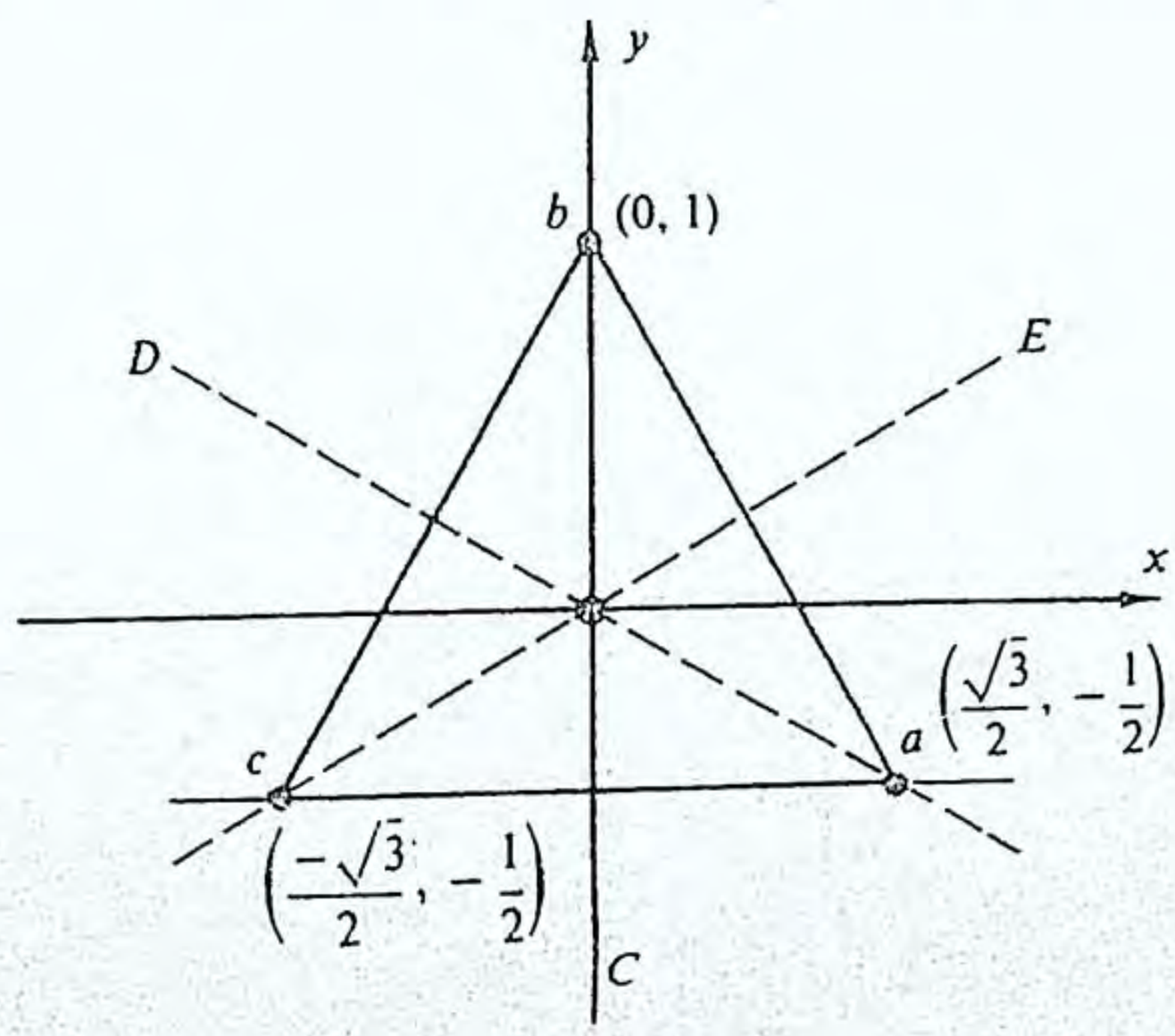


Fig. 4.8 Operaciones de simetría en un triángulo equilátero

si y y z son ejes de doble simetría, x es automáticamente un eje de doble simetría.

Este grupo de simetría, el *vierergruppe*, frecuentemente se denomina D_2, en donde D significa un grupo dihedral, y el subíndice 2 significa un eje de doble simetría (y no eje de simetría superior).

Tres Objetos: Eje de Triple Simetría. Considere ahora tres átomos idénticos en los vértices de un triángulo equilátero, Fig. 4.8. Las rotaciones *del triángulo* de 0, $2\pi/3$ y $4\pi/3$ dejan invariante el triángulo en la forma de matriz, se obtiene[1]

$$1 = R_z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = R_z(2\pi/3) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\operatorname{sen} 2\pi/3 \\ \operatorname{sen} 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$B = R_z(4\pi/3) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \tag{4.191}$$

El eje z es un eje de triple simetría. (1, A, B) forman un grupo cíclico, un subgrupo del grupo completo de seis elementos que sigue.

En el plano xy se tienen tres ejes de simetría adicionales, cada átomo (vértice) y el centro geométrico que define un eje. Cada uno de estos es un eje de doble simetría. Estas rotaciones se pueden describir más fácilmente dentro de nuestra estructura bidimensional al introducir las reflexiones. La rotación de π alrededor de C o eje y, lo cual significa el intercambio de los átomos a y c, es justamente una reflexión del eje x:

$$C = R_C(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.192}$$

Podemos sustituir la rotación alrededor del eje D por la rotación de $4\pi/3$ (alrededor del eje z) seguido de una reflexión del eje x ($x \to -x$):

$$\begin{aligned} D = R_D(\pi) &= CB \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.193}$$

De manera similar, la rotación de π alrededor del eje E intercambiando a y b es sustituida por una rotación de $2\pi/3$ (A) y luego una reflexión[2] del eje x ($x \to -x$):

[1] Observe que en este caso se hace girar el *triángulo* en el sentido de las manecillas del reloj con relación a las coordenadas fijas.

[2] Observe que, como consecuencia de estas reflexiones, det (C) = det(D) = det(E) = −1. Las rotaciones de A y B, evidentemente, tienen un determinante de +1.

$$
\begin{aligned}
E = R_E(\pi) &= CA \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.194}
$$

La tabla completa de multiplicación de grupo es

	1	A	B	C	D	E
1	1	A	B	C	D	E
A	A	B	1	D	E	C
B	B	1	A	E	C	D
C	C	E	D	1	B	A
D	D	C	E	A	1	B
E	E	D	C	B	A	1

Hemos construido un grupo de seis elementos y una representación de matriz irreducible de 2×2. El único grupo de seis elementos distintos es el grupo cíclico $[1, R, R^2, R^3, R^4, R^5]$ con

$$
R = \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\operatorname{sen} \pi/3 \\ \operatorname{sen} \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{4.195}
$$

Nuestro grupo [1, A, B, C, D, E] se denomina D_3 en cristalografía, el grupo dihedral con un eje de triple simetría. Los tres ejes (C, D y E) en el plano xy se transforman automáticamente en ejes de doble simetría. Una consecuencia de esto es que (1, C), (1, D) y (1, E) forman subgrupos de dos elementos. Ninguno de estos subgrupos de dos elementos de D_3 es invariante.

Existen otras dos representaciones irreducibles del grupo de simetría del triángulo equilátero: (i) el trivial (1, 1, 1, 1, 1, 1) y (ii) el casi trivial (1, 1, 1, −1, −1, −1), en que el signo positivo corresponde a las rotaciones propias y el signo negativo a las rotaciones impropias (implicando una reflexión). Las dos representaciones son homomórficas con D_3.

Un resultado general de los grupos *finitos* de h elementos es que

$$
\sum_i n_i^2 = h, \tag{4.196}
$$

en donde n_i es la dimensión de las matrices de la representación irreducible *iésima*. En este caso se tiene $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$ para nuestras tres representaciones. No existe ninguna otra representación irreducible del grupo de simetría de tres objetos.

Grupos Dihedrales, D_n. Un grupo dihedral D_n con un eje de simetría de n veces implica n ejes con una separación angular de $2\pi/n$ radianes. n es un número entero positivo, pero por lo demás no tiene limitaciones. Si se aplican los argumentos de simetría a las *estructuras cristalinas*, entonces n

está limitado a 1, 2, 3, 4 y 6. El requisito de la invariancia de la estructura cristalina bajo las translaciones en el plano perpendicular al eje n veces excluye a $n = 5, 7$ y los valores superiores. Trate de cubrir un plano completamente con pentágonos regulares idénticos y sin traslape. Para las moléculas individuales, esta limitación no existe, aunque los ejemplos con $n > 6$ son raros. $n = 5$ es una posibilidad verdadera. Como ejemplo, el grupo de simetría del rutenoceno, $(C_5H_5)_2Ru$, que se ilustra en la Fig. 4.9 es D_5.[1]

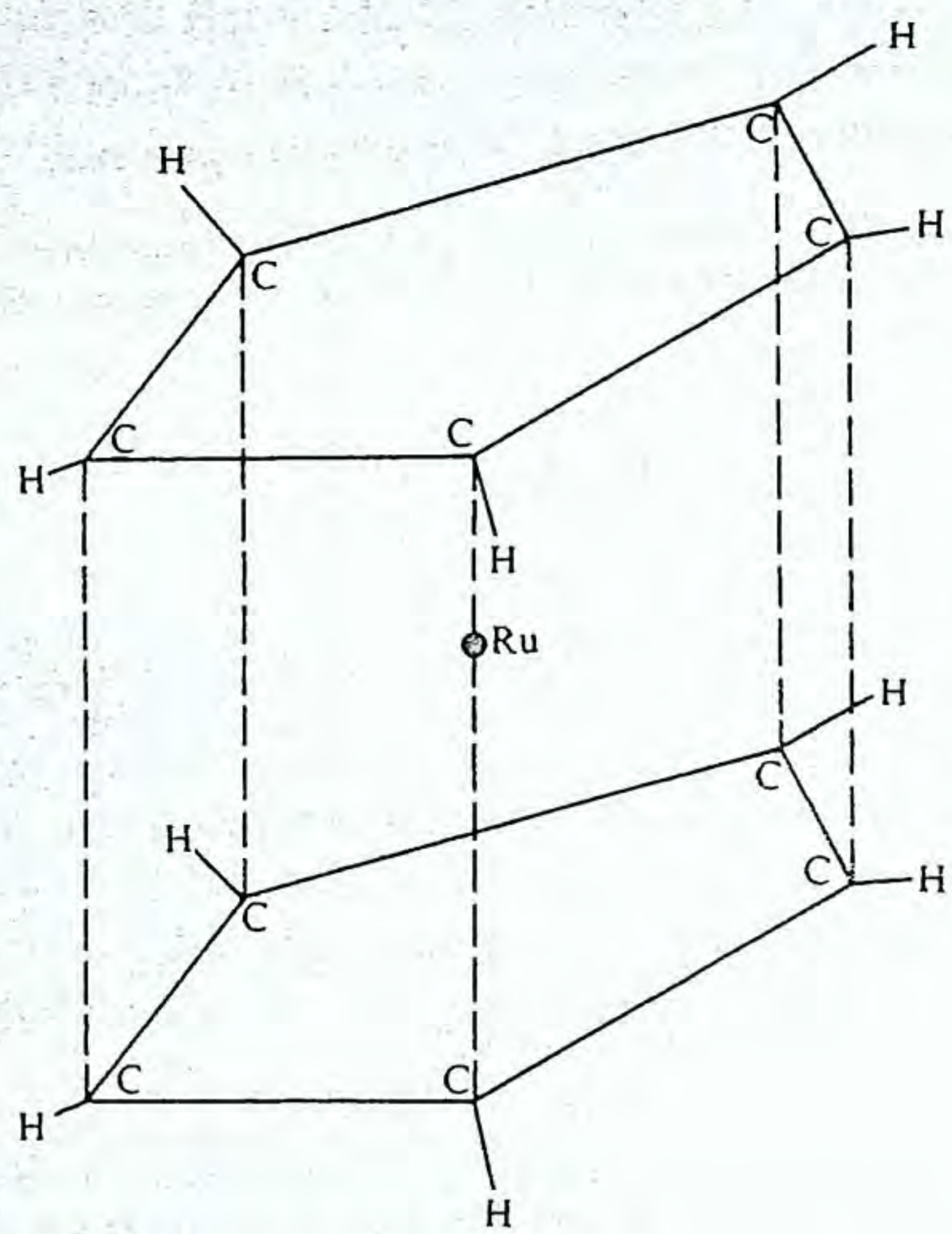


Fig. 4.9 Rutenoceno

Grupos Espaciales y Puntos Cristalográficos. Los grupos dihedrales antes considerados son ejemplos de los grupos de punto cristalográficos. Un grupo de punto está formado de una combinación de rotaciones y reflexiones (incluyendo las inversiones) que dejan a cierta estructura cristalina sin cambiar. El hecho de limitar las operaciones a las rotaciones y reflexiones (incluyendo las inversiones) significa que un punto —el origen— permanece *fijo*, siendo de esto de lo cual se deriva el término grupo de punto. Al incluir los grupos cíclicos, dos grupos cúbicos (simetrías de tetraedro y octaedro) y las formas impropias (involucrando las reflexiones), se llega a un total de 32 grupos de punto.

Si se considera que a las operaciones de rotación y reflexión que dieron lugar a estos grupos de punto se agrega la posibilidad de las translaciones y el requisito adicional de que parte de la estructura cristalina permanezca

[1] De hecho, la denominación técnica completa es D_{5h}, en que h indica la invariancia bajo una *reflexión* del eje quintuplicado.

invariante, se llega a los grupos espaciales. Existen 230 grupos espaciales distintos; un número que pudiera considerarse aterrador, excepto, posiblemente, para los especialistas en este campo. Para mayores detalles acerca de esto (que puede llegar a abarcar cientos de páginas), consulte las referencias.

EJERCICIOS

4.8.1 Demuestre que el subgrupo (**1**, **A**, **B**) de D_3 es un subgrupo *invariante*.

4.8.2 Nuestro grupo D_3 puede describirse como un grupo de *permutación* de 3 objetos. La matriz **B**, por ejemplo, hace girar a hacia b, b hacia c, y c hacia a. En tres dimensiones, esto corresponde a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}.$$

(a) Desarrolle las representaciones 3×3 análogas para los otros elementos de D_3.
(b) Reduzca la representación 3×3 a la representación 2×2 de esta sección.
Nota. La reducción verdadera de una representación reducible puede ser bastante dificultosa. Frecuentemente es más fácil desarrollar directamente una nueva representación de la dimensión requerida.

4.8.3 Los elementos del grupo dihedral D_n pueden indicarse en la forma

$$S^{\lambda} R_z^{\mu}(2\pi/n), \qquad \lambda = 0, 1$$
$$\mu = 0, 1, \ldots n-1,$$

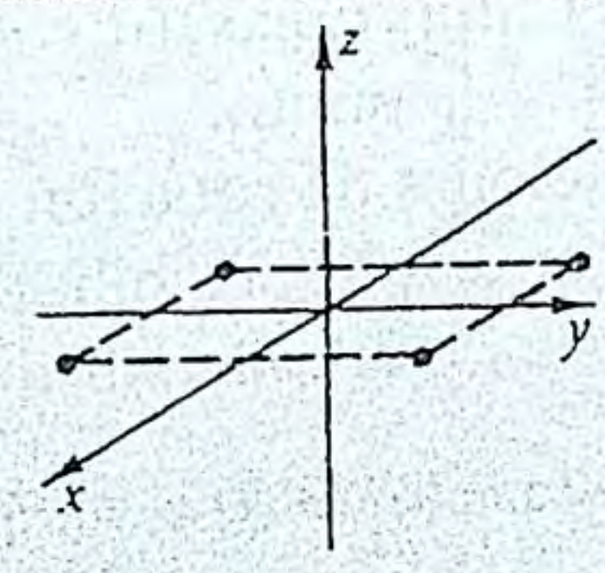
en donde $R_z(2\pi/n)$ representa una rotación de $2\pi/n$ alrededor del eje de simetría n veces, mientras que **S** representa una rotación de π alrededor de un eje que pasa a través del centro de un polígono regular y uno de sus vértices.
Para **S** = **E**, demuestre que esta forma puede describir las matrices **A**, **B**, **C** y **D** de D_3.

4.8.4 Explique la forma en que la relación

$$\sum_i n_i^2 = h$$

se aplica al *vierergruppe* ($h = 4$).

4.8.5 Desarrolle la representación de matriz 2×2 irreducible del grupo de operaciones (rotaciones y reflexiones) que transforman un cuadrado en sí mismo. Proporcione la tabla de multiplicación de grupo.
Nota. Este es el grupo de simetría de un cuadrado y también el grupo dihedral, D_4.



4.8.6 El grupo de permutación de 4 objetos contiene 4! = 24 elementos. De acuerdo con el Ejercicio 4.8.5, D_4, el grupo de simetría para un cuadrado tiene bastante menos de 24 elementos. Explique la relación entre D_4 y el grupo de permutación de 4 objetos.

4.8.7 En un cristal cúbico simple, se podrían tener átomos idénticos en $r = (la, ma, na)$, en que l, m y n adquieren valores integrales.

(a) Demuestre que cada eje cartesiano es un eje de simetría cuadruplicado.

(b) El grupo cúbico consistirá de todas las operaciones (rotaciones, reflexiones, inversión) que dejan invariante al cristal cúbico simple. A partir de la consideración de la permutación de los ejes coordenados positivo y negativo, prediga cuántos elementos contendrá este grupo cúbico.

4.9 Grupos Continuos

Grupos Infinitos, Grupos de Lie. Todos los grupos en las dos secciones anteriores han contenido un número finito de elementos; 4 para el *vierergruppe*, 6 para D_3, etc. En esta Sección se introducen los grupos con un número infinito de elementos. El elemento del grupo contendrá uno o más parámetros que varían continuamente dentro de cierto intervalo. El parámetro de variación continua origina un continuo de elementos de grupo. En contraste con el grupo cíclico de cuatro miembros $(1, i, -1, -i)$, se podría tener $e^{i\varphi}$, en que φ varía continuamente dentro del intervalo $[0, 2\pi]$. Los grupos O_3^+ y SU(2) descritos más adelante son ejemplos adicionales.

Dentro de las diversas posibilidades matemáticas, los grupos continuos conocidos como grupos de Lie son de interés particular. La característica del grupo de Lie es que los parámetros de un elemento de producto son funciones analíticas[1] de los parámetros de los factores. En el caso de las transformaciones, una rotación, por ejemplo, se puede indicar en la forma

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, \theta) \tag{4.197}$$

(cf. Ec. 1.9). Para que este grupo de transformación sea un grupo de Lie, las funciones f_i deben ser funciones analíticas del parámetro θ. Esto será cierto para los grupos O_3^+ y SU(2) considerados aquí y en la Sección 4.10, para SU(3) descrito en la Sección 4.11, y para el grupo de Lorentz de la Sección 4.12. Todos estos son grupos de Lie. La naturaleza analítica de las funciones (capacidad de diferenciación) nos permite desarrollar el concepto del *generador* (Sección 4.10) y reducir el estudio de todo el grupo al estudio de los elementos de grupo en las cercanías del elemento de identidad.

Si estos parámetros varían dentro de intervalos *estrechos*, como $[0, \pi]$, o $[0, 2\pi]$ para los ángulos, el grupo es *compacto*. Una propiedad importante es que cada representación de un grupo compacto es equivalente a una representación unitaria. En contraste con esto, el grupo homogéneo de Lorentz de la Sección 4.12 no es compacto, y la representación L(v) no es unitaria.

[1] Analítico, definido en la Sección 6.2, significa que tiene derivadas de todos los órdenes.

Grupo Ortogonal, O_3^+. El conjunto de matrices ortogonales verdaderas $n \times n$ forma un grupo. (Compruebe que las propiedades de grupo de la Sección 4.7 se satisfacen.) Nuestra matriz $n \times n$ tiene $n(n-1)/2$ parámetros *independientes*. Para $n = 2$, solamente existe un parámetro independiente: un ángulo en la Ec. 4.63. Para $n = 3$, se tienen tres parámetros independientes: los tres ángulos de Euler de la Sección 4.3.

Procederemos a considerar con cierto detalle el conjunto de las matrices ortogonales verdaderas 3×3 con un determinante $+1$; solamente rotaciones sin incluir las reflexiones. Este grupo se denomina frecuentemente O_3^+, en donde el signo $+$ indica que el determinante es $+1$. De acuerdo con la Sección 4.3, las rotaciones alrededor de los ejes coordenados son

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.198}$$

Hemos aplicado las convenciones de la Sección 4.3. Las rotaciones son rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj del sistema coordenado a una nueva orientación. También de acuerdo con la Sección 4.3, el miembro general de O_3^+ es la rotación del ángulo de Euler

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha). \tag{4.199}$$

La relación del grupo O_3^+ y el momento angular orbital se desarrolla en la Sección 4.10. O_3^+ también aparece en la Sección 4.11 que lleva a la física de las partículas y SU(3).

Grupo Unitario Especial, SU(2). El conjunto de matrices unitarias $n \times n$ también forma un grupo. (Nuevamente, compruebe para establecer que las propiedades de grupo se satisfacen.) Este grupo frecuentemente se denomina $U(n)$. Imponemos la restricción adicional de que el determinante de las matrices sea $+1$ y se obtiene el *grupo unitario especial o unimodular unitario*, $SU(n)$. Nuestra matriz de determinante unitario, unitaria $n \times n$ tiene $n^2 - 1$ parámetros independientes. Para $n = 2$, se tienen 3 parámetros, los mismos que para O_3^+. Para $n = 3$, se tienen 8 parámetros. Esto se convertirá en la forma óctupla de la Sección 4.11.

Para $n = 2$, se tiene SU(2) con un elemento de grupo general

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \tag{4.200}$$

con $a^*a + b^*b = 1$. Como se ha indicado, a y b son complejos. Estos parámetros frecuentemente se denominan parámetros de Cayley-Klein,

habiendo sido introducidos por Cayley y Klein en relación a los problemas de mecánica. Aun cuando no es tan evidente, una forma general alternativa es

$$\mathsf{U}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} e^{i\xi}\cos\eta & e^{i\zeta}\operatorname{sen}\eta \\ -e^{-i\zeta}\operatorname{sen}\eta & e^{-i\xi}\cos\eta \end{pmatrix} \tag{4.201}$$

en que los tres parámetros ξ, η, y ζ son verdaderos.

Ahora procedamos a establecer las representaciones irreducibles de SU(2). Regresando a la Ec. 4.200, **U** describe una transformación de un vector de columna complejo de dos componentes (denominado *spinor*):

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{4.202}$$

o

$$\begin{aligned} u' &= au + bv, \\ v' &= -b^*u + a^*v. \end{aligned} \tag{4.203}$$

De acuerdo con la forma de este resultado, si se iniciara con un polinomio *homogéneo* de grado n en u y v, y se realizara la transformación unitaria, la Ec. 4.203, aún tendría un polinomio de grado n homogéneo. El significado de esto es que los $n + 1$ términos u^n, $u^{n-1}v$, $u^{n-2}v^2$, etc. pertenecen a la representación $(n + 1)$ dimensional de nuestro grupo unitario especial.

Para no hacer malabarismos algebraicos, escogemos la selección de Wigner y consideramos que $n = 2j$ y la función (monomial)

$$f_m(u, v) \doteq \frac{u^{j+m}v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}. \tag{4.204}$$

El denominador es cierta clase de factor de normalización que hace unitaria a nuestra representación. Y si se considera que el efecto de **U** en $f_m(u, v)$ es[1]

$$\mathsf{U}f_m(u, v) = f_m(u', v'), \tag{4.205}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathsf{U}f_m(u, v) &= f_m(au + bv, -b^*u + a^*v) \\ &= \frac{(au + bv)^{j+m}(-b^*u + a^*v)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \end{aligned} \tag{4.206}$$

Ahora el trabajo consiste en expresar el lado derecho de la Ec. 4.206 como una combinación lineal de términos de la forma $f_m(u, v)$. Los coeficientes en la combinación lineal nos proporcionan la representación deseada.

[1] En la Sección 4.10, la transformación (rotación) de una *función* se define en términos de la rotación inversa de las coordenadas. Aquí utilizamos la Ec. 4.205 ya que se pretende establecer una comparación con O_3^+ que se describe en términos de las rotaciones de las coordenadas. Ec. 4.198.

Desarrollamos los dos binomios por medio del teorema del binomio (Sección 5.6), obteniendo

$$(au + bv)^{j+m} = \sum_{k=0}^{j+m} \frac{(j+m)!}{k!(j+m-k)!} a^{j+m-k} u^{j+m-k} b^k v^k$$

$$(-b^* u + a^* v)^{j-m} = \sum_{l=0}^{j-m} (-1)^{j-m-l} \frac{(j-m)!}{l!(j-m-l)!} b^{*(j-m-l)} u^{j-m-l} a^{*l} v^l. \tag{4.207}$$

Siendo así,

$$\mathsf{U} f_m(u, v) = \sum_{k=0}^{j+m} \sum_{l=0}^{j-m} (-1)^{j-m-l} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!l!(j+m-k)!(j-m-l)!}$$
$$\times a^{j+m-k} a^{*l} b^k b^{*(j-m-l)} u^{2j-k-l} v^{k+l}. \tag{4.208}$$

Si dejamos que $j - k - l = m'$,

$$u^{2j-k-l} v^{k+l} \to u^{j+m'} v^{j-m'} \tag{4.209}$$

igualando la forma de la Ec. 4.204. Sustituyendo la suma sobre l por la suma sobre m',

$$\mathsf{U} f_m(u, v) = \sum_{m'=-j}^{j} U_{mm'} f_{m'}(u, v) \tag{4.210}$$

en donde el elemento de matriz $U_{mm'}$ está definido por

$$U_{mm'} = \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^{m'-m+k} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!}$$
$$\times a^{j+m-k} a^{*(j-m'-k)} b^k b^{*(m'-m+k)}. \tag{4.211}$$

El índice k se inicia con cero y llega hasta $j + m$, pero los factoriales[1] en el denominador garantizan que el coeficiente desaparezca cuando cualquier exponente se vuelve negativo.

La Ec. 4.210 demuestra que la operación de $U_{mm'}$ en $f_{m'}$ (sumada con respecto a m') es idéntica a U operando en f_m. Con base en esta correspondencia, es decir este isomorfismo, identificamos estas matrices $U_{mm'}$ como representaciones de SU(2). Ya que m y m' varían cada una desde $-j$ hasta $+j$ en etapas integrales, nuestras matrices $U_{mm'}$ tienen dimensiones $(2j + 1) \times (2j + 1)$.

Para ser un poco más específicos acerca de esto, si $j = \frac{1}{2}$,

$$\mathsf{U} = \begin{array}{c} \\ m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m' = \frac{1}{2} & m' = -\frac{1}{2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.212}$$

[1] De acuerdo con la Sección 10.1, $(-n)! = \pm\infty$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

lo cual es idéntico a la Ec. 4.200. Los casos para $j = 1$ y mayores se consideran más adecuadamente por medio de las funciones trigonométricas tal como se muestra más adelante.

Homomorfismo SU(2)—O_3^+ Nuestro grupo ortogonal verdadero O_3^+ describe claramente las rotaciones en el espacio tridimensional ordinario. Igualmente claro es que tiene la característica de dejar *invariante* a $x^2 + y^2 + z^2$

La operación de SU(2) en una matriz está definida como una transformación unitaria, Ec. 4.122.

$$M' = U\,MU^\dagger. \tag{4.213}$$

Considerando que **M** es una matriz 2×2 observamos que cualquier matriz 2×2 puede indicarse como una combinación lineal de la matriz unitaria y las tres matrices de Pauli de la Sección 4.2. Sea **M** la matriz de traza cero,

$$M = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \tag{4.214}$$

en que no interviene la matriz unitaria. Ya que la traza es invariante bajo la transformación unitaria (Ej. 4.3.9), M' debe tener la misma forma,

$$M' = x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3 = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}. \tag{4.215}$$

El determinante también es invariante bajo una transformación unitaria (Ejercicio 4.3.13). En consecuencia,

$$-(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2), \tag{4.216}$$

o sea que $x^2 + y^2 + z^2$ es invariante bajo esta operación de SU(2), justamente como con O_3^+. Siendo así, SU(2) debe describir una rotación. Esto sugiere que SU(2) o O_3^+ pueden ser isomórficos y homomórficos.

De este modo nos aproximamos al problema de conocer cuál es la rotación que describe SU(2) al considerar algunos casos especiales. Regresando a la Ec. 4.200 y viendo la Ec. 4.201, tenemos $a = e^{i\xi}$ y $b = 0$, o

$$U_z = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix}. \tag{4.217}$$

Realizando una transformación unitaria en cada uno de los tres términos σ' de Pauli,

$$\mathsf{U}_z\sigma_1\mathsf{U}_z^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\xi} \\ e^{-2i\xi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.218}$$

Este resultado lo volvemos a expresar en términos de las σ de Pauli para obtener

$$\mathsf{U}_z x\sigma_1\mathsf{U}_z^\dagger = x\cos 2\xi\,\sigma_1 - x\,\mathrm{sen}\,2\xi\,\sigma_2\,. \tag{4.219}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \mathsf{U}_z y\sigma_2\,\mathsf{U}_z^\dagger &= y\,\mathrm{sen}\,2\xi\,\sigma_1 + y\cos 2\xi\,\sigma_2 \\ \mathsf{U}_z z\sigma_3\,\mathsf{U}_z^\dagger &= z\sigma_3\,. \end{aligned} \tag{4.220}$$

A partir de estas dobles expresiones de ángulo, se observa que deberíamos empezar con un *ángulo medio:* $\xi = \alpha/2$. Siendo así, de acuerdo con las Ecs. 4.213-4.215, 4.219 y 4.220,

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y' &= -x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{4.221}$$

La transformación unitaria 2×2 utilizando $\mathsf{U}_z(\alpha/2)$ es equivalente al operador de rotación $\mathsf{R}_z(\alpha)$ de la Ec. 4.198.

El establecimiento de la correspondencia de

$$\mathsf{U}_y(\beta/2) = \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & \mathrm{sen}\,\beta/2 \\ -\mathrm{sen}\,\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} \tag{4.222}$$

y $\mathsf{R}_y(\beta)$, y de

$$\mathsf{U}_x(\varphi/2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & i\,\mathrm{sen}\,\varphi/2 \\ i\,\mathrm{sen}\,\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix} \tag{4.223}$$

y $\mathsf{R}_x(\varphi)$ se dejan como Ejercicio 4.9.7. El lector podrá notar que $\mathsf{U}_k(\psi/2)$ tiene la forma general

$$\mathsf{U}_k(\psi/2) = 1\cos\psi/2 + i\sigma_k\,\mathrm{sen}\,\psi/2 \tag{4.224}$$

en donde $k = x, y, z$. Regresaremos a este asunto en la Sección 4.10.

La correspondencia

$$\mathsf{U}_z(\alpha/2) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\,\alpha & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{R}_z(\alpha) \tag{4.225}$$

no es una correspondencia simple de uno a uno. Específicamente, ya que α en R_z varía de 0 a 2π, el parámetro en U_z, $\alpha/2$, tiene una variación de 0 a π.

 Se encuentra que

$$R_z(\alpha + 2\pi) = R_z(\alpha)$$

$$U_z(\alpha/2 + \pi) = \begin{pmatrix} -e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = -U_z(\alpha/2). \tag{4.226}$$

En consecuencia, *tanto* $U_z(\alpha/2)$ como $U_z(\alpha/2 + \pi) = -U_z(\alpha/2)$ corresponden a $R_z(\alpha)$. La correspondencia es de 2 a 1, o sea que SU(2) y O_3^+ son *homomórficos*. El establecimiento de la correspondencia entre las representaciones de SU(2) y las correspondientes a O_3^+ significa que las representaciones conocidas de SU(2) nos proporcionan automáticamente las representaciones[1] de O_3^+

Combinando las diversas rotaciones, una transformación unitaria que utiliza

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = U_z(\gamma/2)U_y(\beta/2)U_z(\alpha/2) \tag{4.227}$$

corresponde a la rotación general de Euler $R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha)$. Mediante la multiplicación directa,

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & \operatorname{sen}\beta/2 \\ -\operatorname{sen}\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2}\cos\beta/2 & e^{i(\gamma-\alpha)/2}\operatorname{sen}\beta/2 \\ -e^{-i(\gamma-\alpha)/2}\operatorname{sen}\beta/2 & e^{-i(\gamma+\alpha)/2}\cos\beta/2 \end{pmatrix}. \tag{4.228}$$

Esto corresponde a nuestra forma general alternativa, Ec. 4.201, con

$$\xi = (\gamma + \alpha)/2, \qquad \eta = \beta/2, \qquad \zeta = (\gamma - \alpha)/2. \tag{4.229}$$

De la Ec. 4.228, se pueden identificar los parámetros de la Ec. 4.201 como

$$\begin{aligned} a &= e^{i(\gamma+\alpha)/2}\cos\beta/2 \\ b &= e^{i(\gamma-\alpha)/2}\operatorname{sen}\beta/2. \end{aligned} \tag{4.230}$$

Con estos, nuestra representación $U_{mm'}$ de SU(2) para la Ec. 4.211 se transforma en

$$U_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{k=0}^{j+m} (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-m'-k)!(j+m-k)!(m'-m+k)!}$$

$$\times\, e^{im\gamma}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j+m-m'-2k}\left(-\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2k} e^{im'\alpha}. \tag{4.231}$$

En este caso, se tienen las representaciones en términos de los ángulos de Euler. La importancia de la Ec. 4.231 es que nos permite calcular las representaciones irreducibles $(2j+1)\times(2j+1)$ de SU(2) para todas las $j\,(j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\ldots)$ y las representaciones irreducibles de O_3^+ para el momento angular orbital integral $j\,(j = 0, 1, 2, \ldots)$.

[1] Mientras que SU(2) tiene representaciones para valores integrales impar medios e integrales de O_3^+ está limitado a los valores integrales de $j\,(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Una descripción adicional de este tema —la relación entre O_3^+ y el momento angular orbital— aparece en las Secciones 4.10 y 12.7.

Matriz de Rotación $\mathsf{D}^j(\alpha, \beta, \gamma)$. En la literatura de la mecánica cuántica es costumbre considerar que el adjunto de $U_{mm'}$ define[1]

$$D^j_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = U^*_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{4.232}$$

Para $j = 0$,

$$\mathsf{D}^0(\alpha, \beta, \gamma) = 1. \tag{4.233}$$

Para $j = \frac{1}{2}$,

$$\mathsf{D}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{array}{c} \\ m' = \frac{1}{2} \\ m' = -\frac{1}{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} m = \frac{1}{2} & m = -\frac{1}{2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos \beta/2\, e^{-i\gamma/2} & -e^{-i\alpha/2} \operatorname{sen} \beta/2\, e^{i\gamma/2} \\ e^{i\alpha/2} \operatorname{sen} \beta/2\, e^{-i\gamma/2} & e^{i\alpha/2} \cos \beta/2\, e^{i\gamma/2} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{4.234}$$

Para $j = 1$, las Ecs. 4.231 y 4.232 originan

$$\mathsf{D}^1(\alpha, \beta, \gamma) = \tag{4.235}$$

$$\begin{array}{c} \\ m' = 1 \\ m' = 0 \\ m' = -1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m = 1 & m = 0 & m = -1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} \dfrac{1 + \cos \beta}{2} e^{-i\gamma} & -e^{-i\alpha} \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{\sqrt{2}} & e^{-i\alpha} \dfrac{1 - \cos \beta}{2} e^{i\gamma} \\ \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} & \cos \beta & -\dfrac{\operatorname{sen} \beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ e^{i\alpha} \dfrac{1 - \cos \beta}{2} e^{-i\gamma} & e^{i\alpha} \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{\sqrt{2}} & e^{i\alpha} \dfrac{1 + \cos \beta}{2} e^{i\gamma} \end{pmatrix} \end{array}$$

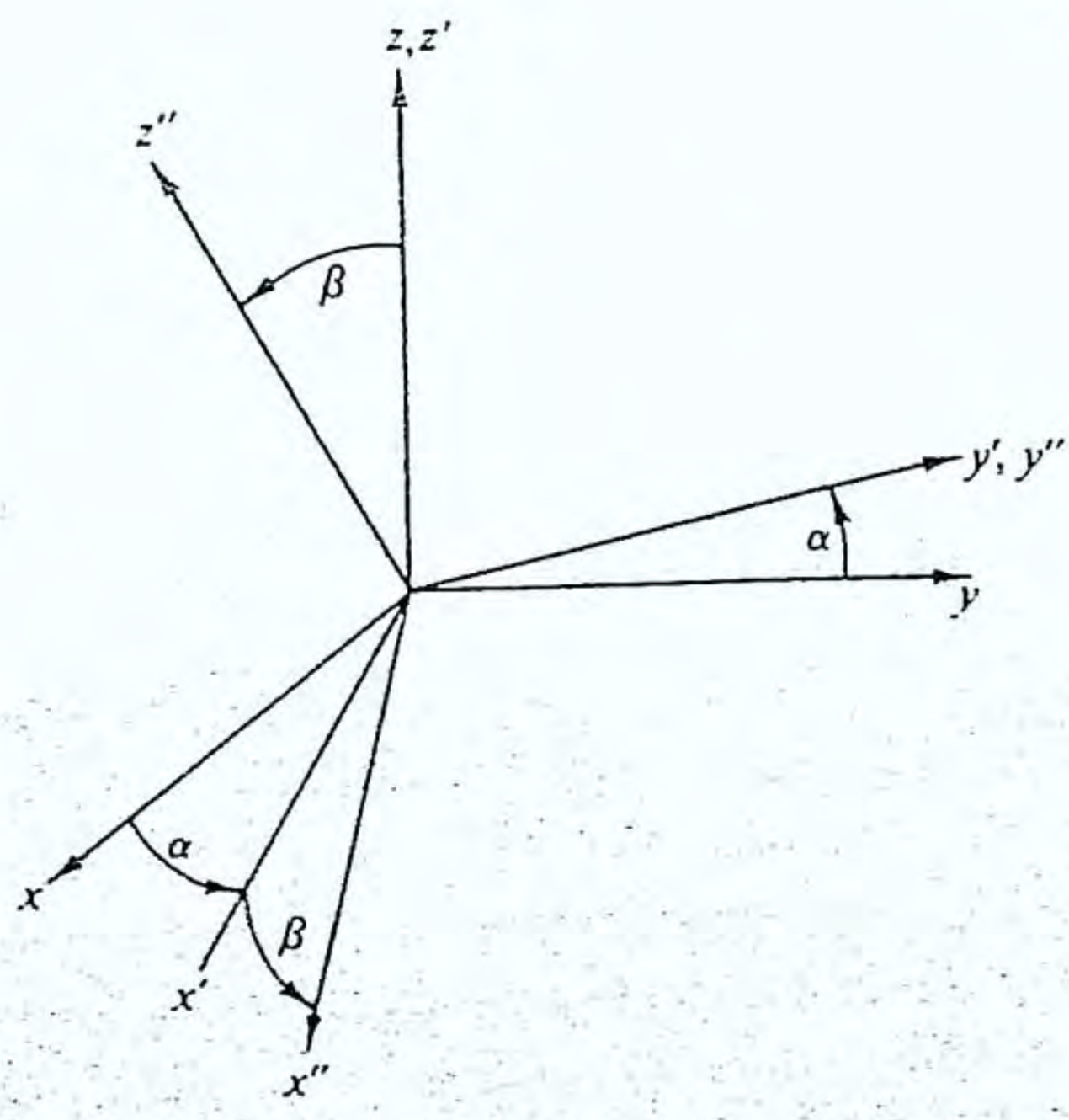


Fig. 4.10 Rotaciones de ángulo de Euler ($\gamma = 0$)

[1] La razón de esto es que $U_{mm'}$ se define aquí en términos de las rotaciones de coordenadas. $D^j_{m'm}$ se utiliza para la rotación de las funciones. Una descripción adicional de este aspecto aparece en la Sección 4.10.

Para $j = l$, integral, la operación de la matriz de rotación D^l en los armónicos esféricos (Sección 12.6) está dada por

$$Y_l^m(\theta', \varphi') = \sum_{m'} D^l_{m'm}(\alpha, \beta, 0) Y_l^{m'}(\theta, \varphi). \tag{4.236}$$

Los primeros dos ángulos de Euler α y β definen un nuevo eje polar, z'' en la Fig. 4.10 y un nuevo cero de acimutal. (El tercer ángulo de Euler γ corresponde a una rotación alrededor del nuevo eje polar; no es de importancia aquí.) El punto $(\theta' \varphi')$ es el mismo punto en el espacio que (θ, φ), pero medido con relación al sistema coordenado rotado más bien que con relación al sistema inicial.

Observe la analogía con la Ec. 4.205. Los armónicos esféricos son funciones homogéneas de x, y y z del orden l.

Para mayores detalles acerca de la matriz de rotación D^j, incluyendo una demostración del teorema de adición de armónico esférico, el lector debe consultar el texto de Rose citado al final de este Capítulo.

EJERCICIOS

4.9.1 Demuestre que una matriz ortogonal $n \times n$ tiene $n(n-1)/2$ parámetros *independientes.*

Sugerencia. La condición de ortogonalidad, Ec. 4.60, tiene limitaciones.

4.9.2 Demuestre que una matriz unitaria especial $n \times n$ tiene $n^2 - 1$ parámetros *independientes.*

Sugerencia. Cada elemento puede ser complejo —doblando así el número de parámetros posibles. Algunas de las ecuaciones limitantes son igualmente complejas— y cuenta como dos limitaciones.

4.9.3 El grupo lineal especial SL(2) consiste de todas las matrices 2×2 (con elementos complejos) que tienen un determinante de $+1$. Demuestre que tales matrices forman un grupo.

Nota. El grupo SL(2) puede relacionarse con el grupo completo de Lorentz, Sección 4.12 tanto como el grupo SU(2) está relacionado con O_3^+.

4.9.4 Demuestre que R_x es (o no es) un subgrupo invariante de O_3^+.

4.9.5 Demuestre que la forma general de una matriz unimodular unitaria 2×2 es

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

con $a^*a + b^*b = 1$.

4.9.6 Designando al spinor (u, v) de la Ec. 4.202 como s, demuestre que $s^\dagger s = s'^\dagger s'$, la longitud del spinor, se conserva bajo la transformación de U.

4.9.7 (a) Demuestre que $U_y(\beta/2)$ corresponde a $R_y(\beta)$.
(b) Demuestre que $U_x(\varphi/2)$ corresponde a $R_x(\varphi)$.

4.9.8 (a) Demuestre que la dependencia de α y γ de $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$ puede factorizarse de tal modo que

$$D^j(\alpha, \beta, \gamma) = A^j(\alpha) d^j(\beta) C^j(\gamma).$$

(b) Demuestre que $A^j(\alpha)$ y $C^j(\gamma)$ son diagonales. Encuentre las formas explícitas.
(c) Demuestre que $d^j(\beta) = D^j(0, \beta, 0)$.
Sugerencia. Los Ejercicios 4.2.28 y 4.2.29 pueden ser de utilidad.

4.9.9 Mediante el análisis de las Ecs. 4.231 y 4.232, o los casos especiales, las Ecs. 4.234 y 4.235

$$D^{j\dagger}(\alpha, \beta, \gamma) = D^j(-\gamma, -\beta, -\alpha).$$

Explique el porqué de esto.

4.9.10 (a) Suponiendo que $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$ es unitario, demuestre que

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\theta_1, \varphi_1) Y_l^m(\theta_2, \varphi_2)$$

es una cantidad escalar (invariante bajo las rotaciones). Esta es una función análoga al producto escalar de vectores.
(b) De acuerdo con la parte (a), derive el teorema de adición armónico esférico, Ec. 12.200:

$$P_l(\cos\gamma) = 4\pi(2l+1)^{-1} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\theta_1, \varphi_1) Y_l^m(\theta_2, \varphi_2).$$

Sugerencia. Sea $\theta_1 = 0$ (lo cual hace que $\theta_2 = \gamma$).

4.10 Generadores

Rotaciones y Momento Angular. Dos matrices **U** y **H** están relacionadas por la ecuación

$$U = e^{ia\mathsf{H}} = 1 + ia\mathsf{H} + (ia\mathsf{H})^2/2! + \dots. \tag{4.237}$$

Aquí, a es un parámetro verdadero. La segunda porción de la Ec. 4.237, un desarrollo de Maclaurin, sirve para interpretar el exponencial. De acuerdo con la Sección 4.5, si **H** es hermitiana, entonces **U** es unitaria. De modo similar, si **U** es unitaria, **H** es hermitiana.

Ahora bien, en el contexto de la teoría de grupos, **H** se denomina *generador,* es decir el generador de **U**. La relación entre el generador y el grupo de rotación O_3^+ se indica esquemáticamente en la Fig. 4.11.

1. Comenzando con el lado izquierdo de la Fig. 4.11, la matriz que describe una *rotación finita de las coordenadas* a través de un ángulo φ en el sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor del eje z está dada por la Ec. 4.76 en la forma

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.238}$$

2. Considere que la rotación descrita por R_z es una rotación infinitesimal a través del ángulo $\delta\varphi$. Siendo así, R_z puede indicarse en la forma

$$R_z(\delta\varphi) = 1 + i\delta\varphi M_z \tag{4.239}$$

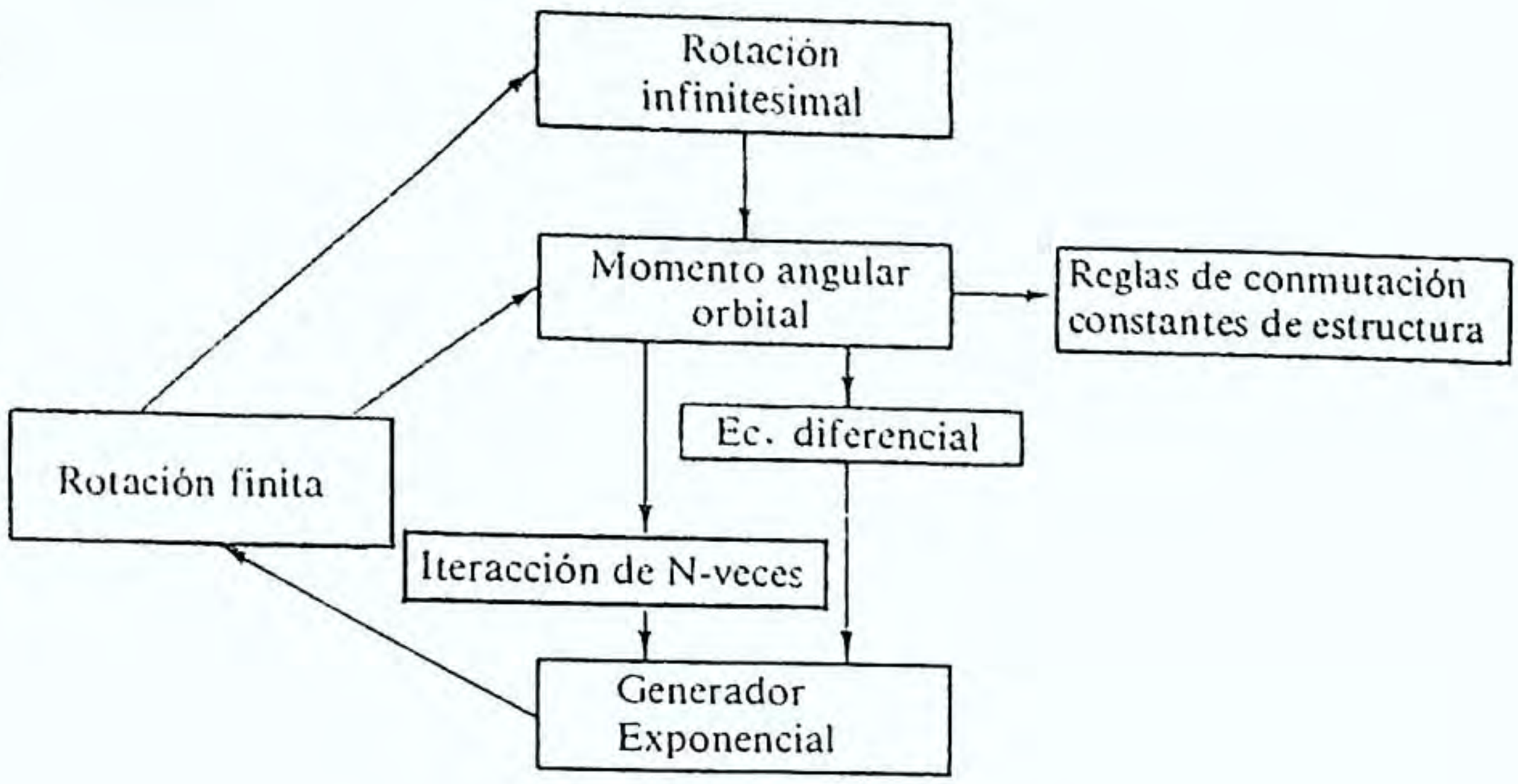


Fig. 4.11 Relaciones de grupo generador

en donde

$$\mathsf{M}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.240}$$

M_z y las matrices correspondientes M_x y M_y aparecen en el Ejercicio 4.2.15. M_z también puede obtenerse mediante la diferenciación. Si interpretamos la derivada de una matriz como la matriz de las derivadas, entonces

$$d\mathsf{R}_z/d\varphi\,|_{\varphi=0} = i\mathsf{M}_z. \tag{4.241}$$

Desde este punto de vista, la Ec. 4.239 es el desarrollo de Maclaurin de R_z con términos del orden $(\delta\varphi)^2$ y antes omitida. La validez de la Ec. 4.241 es una consecuencia de la capacidad de diferenciación de los grupos de Lie.

3. Nuestra rotación finita φ puede formarse de rotaciones infinitesimales sucesivas $\delta\varphi$.

$$\mathsf{R}_z(\delta\varphi_2 + \delta\varphi_1) = (1 + i\delta\varphi_2\mathsf{M}_z)(1 + i\delta\varphi_1\mathsf{M}_z). \tag{4.242}$$

Sea $\delta\varphi = \varphi/N$ para N rotaciones con $N \to \infty$. Siendo así,

$$\mathsf{R}_z(\varphi) = \lim_{N\to\infty} [1 + (i\varphi/N)\mathsf{M}_z]^N = \exp i\varphi\,\mathsf{M}_z. \tag{4.243}$$

A partir de esta forma, identificamos M_z como el generador del grupo $\mathsf{R}_z(\varphi)$, un subgrupo de O_3^+. La reconstrucción verdadera de $\mathsf{R}_z(\varphi)$ aparece más adelante. Son de hacerse notar dos características:

(a) M_z es hermitiana y $\mathsf{R}_z(\varphi)$ es unitaria.
(b) Traza $(\mathsf{M}_z) = 0$ y det $\mathsf{R}_z(\varphi) = +1$.

En directa analogía con M_z, M_x se puede identificar como el generador de R_x, el (sub)grupo de rotaciones alrededor del eje x. Y siendo así, M_y genera a R_y.

4. Como se indica en la Ec. 4.237, el exponencial puede desarrollarse para originar

$$\begin{aligned}\exp i\varphi M_z &= 1 + i\varphi M_z + (i\varphi M_z)^2/2! + (i\varphi M_z)^3/3! + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\{1 - \varphi^2/2! + \varphi^4/4! - \cdots\} \\ &\quad + iM_z\{\varphi - \varphi^3/3! + \varphi^5/5! - \cdots\}.\end{aligned} \tag{4.244}$$

En la segunda igualdad anterior, las relaciones

$$M_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad M_z^3 = M_z \tag{4.245}$$

se han utilizado. Reconociendo que la primera serie es cos φ y la segunda sen φ, se tiene $R_z(\varphi)$, según se ha definido en la Ec. 4.238

5. Regresando al nivel infinitesimal, nuestras relaciones infinitesimales conmutan:

$$\begin{aligned}[R_x(\delta\varphi_x), R_y(\delta\varphi_y)] &= [R_y(\delta\varphi_y), R_z(\delta\varphi_z)] \\ &= [R_z(\delta\varphi_z), R_x(\delta\varphi_x)] = 0\end{aligned} \tag{4.246}$$

y la rotación infinitesimal alrededor de un eje definida por un vector unitario **n** se transforma en

$$\begin{aligned}R_{\mathbf{n}}(\delta\varphi) &= 1 + i(\delta\varphi_x M_x + \delta\varphi_y M_y + \delta\varphi_z M_z) \\ &= 1 + i\delta\varphi\, \mathbf{n}\cdot \mathbf{M}.\end{aligned} \tag{4.247}$$

6. De acuerdo con el Ejercicio 4.2.15, los generadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk} M_k. \tag{4.248}$$

En este caso, ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico de la Sección 3.4. Se implica una suma sobre k, pero solamente existe un término que no desaparece. El coeficiente de M_k, $i\varepsilon_{ijk}$ se denomina *constante de estructura*. Las constantes de estructura forman el punto de partida para el desarrollo del álgebra de Lie. Como se ha indicado antes, los generadores de grupo determinan las constantes de estructura. Alternativamente, se puede demostrar que las constantes de estructura determinan el grupo.

Es de hacerse notar que la Ec. 4.248 tiene un número infinito de soluciones. Las tres matrices M_x, M_y, M_z del Ejercicio 4.2.15 constituyen

una solución (correspondiente a una unidad de momento angular). Otras soluciones, las matrices $(2l+1) \times (2l+1)$ con $l = 2, 3, 4, \ldots$ generan las otras representaciones irreducibles del grupo de rotación, O_3^+.

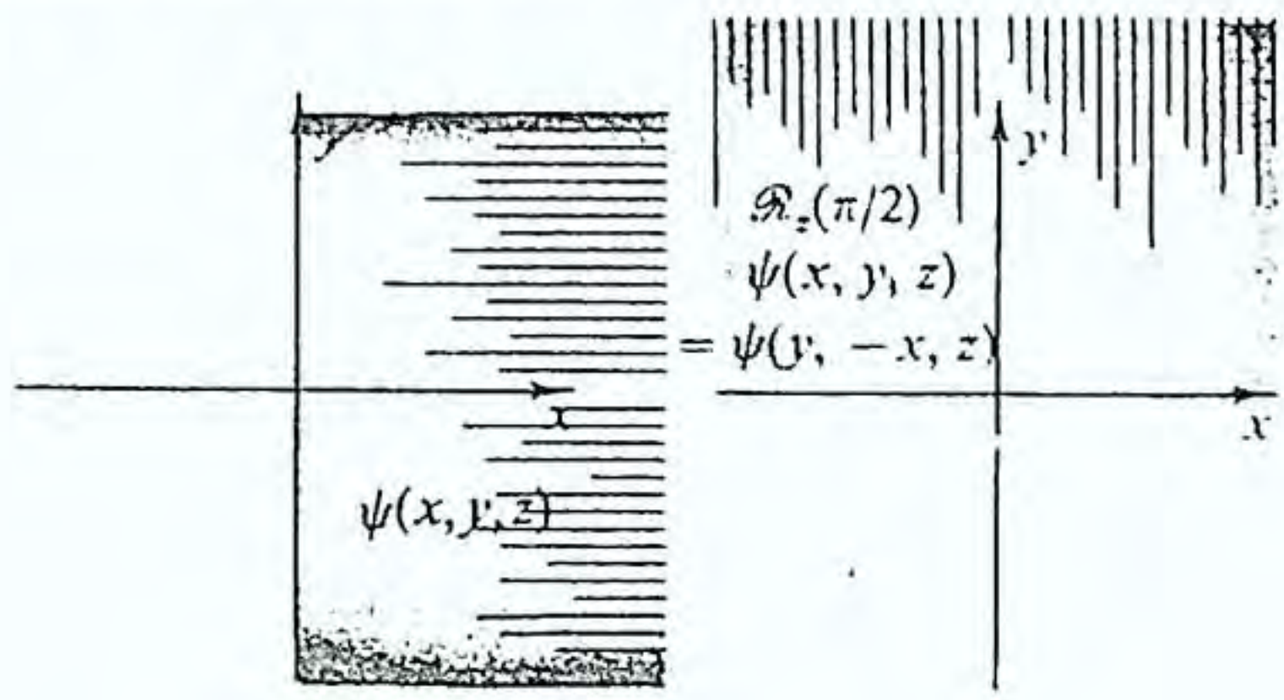


Fig. 4.12 Rotación de una función $\psi(x, y, z)$

Rotaciones de Funciones. En toda la descripción anterior, las matrices hacen girar a las coordenadas. Cualquier sistema físico descrito se mantiene fijo. Ahora conservamos fijas las coordenadas y hagamos rotar una función $\psi(x, y, z)$ con relación a las coordenadas fijas. Con **R** para rotar las coordenadas, introducimos el operador $\mathscr{R}$ para rotar las funciones. Definimos $\mathscr{R}$ mediante

$$\mathscr{R}\psi(x, y, z) = \psi'(x, y, z) \to \psi(\mathbf{x}') \tag{4.249}$$

con

$$\mathbf{x}' = \mathsf{R}\mathbf{x}. \tag{4.250}$$

En palabras, $\mathscr{R}$ opera en la función ψ, haciendo girar ψ y creando una *nueva* función ψ'. Esta nueva función ψ' es numéricamente igual a $\psi(\mathbf{x}')$, en donde $\mathbf{x}'$ indica que las *coordenadas* han sido rotadas por **R**. Para el caso especial de la rotación alrededor del eje z

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_z(\varphi)\psi(x, y, z) = \ & \psi(x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi, \\ & -x \operatorname{sen}\varphi + y \cos\varphi, z).\end{aligned} \tag{4.251}$$

Para lograr el entendimiento del significado de la Ec. 4.251, considere el caso $\varphi = \pi/2$. Siendo así,

$$\mathscr{R}_z\psi(x, y, z) = \psi(y, -x, z). \tag{4.252}$$

La función ψ puede representar una función de onda o algún sistema físico clásico.

Imagine que $\psi(x, y, z)$ es grande cuando su *primer* argumento es grande. Entonces $\mathscr{R}_z(\varphi = \pi/2)\psi(x, y, z)$ será grande cuando el *primer* argumento de $\psi(y, -x, z)$ es grande, es decir cuando y es grande. Esto se muestra en la Fig. 4.12. Entonces, el efecto de $\mathscr{R}_z$ consiste en rotar el modelo de la función ψ en el sentido contrario a las manecillas del reloj, del mismo modo que **R** haría rotar el sistema coordenado.

Regresando a la Ec. 4.251, considere una rotación infinitesimal nuevamente, $\varphi \to \delta\varphi$. Siendo así,

$$\mathscr{R}_z(\delta\varphi)\psi(x, y, z) = \psi(x + y\,\delta\varphi, y - x\,\delta\varphi, z). \tag{4.253}$$

El lado derecho puede desarrollarse como una serie de Taylor (Sección 5.6) para dar lugar a

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_z(\delta\varphi)\psi(x, y, z) &= \psi(x, y, z) - \delta\varphi\{x\,\partial\psi/\partial y - y\,\partial\psi/\partial x\} + O(\delta\varphi)^2 \\ &= (1 - i\,\delta\varphi L_z)\psi(x, y, z),\end{aligned} \tag{4.254}$$

en donde la expresión diferencial entre llaves es iL_z. Ya que

$$\mathscr{R}_z(\varphi + \delta\varphi)\psi = \mathscr{R}_z(\delta\varphi)\mathscr{R}_z(\varphi)\psi = (1 - i\,\delta\varphi L_z)\mathscr{R}_z(\varphi)\psi, \tag{4.255}$$

se tiene (como ecuación de operador)

$$(\mathscr{R}_z(\varphi + \delta\varphi) - \mathscr{R}_z(\varphi))/\delta\varphi = -iL_z\mathscr{R}_z(\varphi). \tag{4.256}$$

El lado izquierdo es justamente $d\mathscr{R}_z(\varphi)/d\varphi$ (para $\delta\varphi \to 0$). En esta forma, la Ec. 4.256 se integra inmediatamente a

$$\mathscr{R}_z(\varphi) = \exp -i\varphi L_z. \tag{4.257}$$

La constante de integración está fijada por la condición limitante $\mathscr{R}_z(0) = 1$.

Observe la semejanza con la Ec. 4.243 y las diferencias. R_z hace girar las coordenadas; $\mathscr{R}_z$ hace girar las funciones. M_z es una matriz, L_z es un operador diferencial. Observe también que L_x, L_y y L_z satisfacen exactamente la misma relación de conmutación que M_x, M_y y M_z,

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k \tag{4.258}$$

y proporcionan las mismas constantes de estructura.

Las Ecs. 4.257 y 4.243 también pudieran compararse con dos ecuaciones en la Sección 4.3; la Ec. 4.89, en donde $\mathbf{A}$ hace girar las coordenadas en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y la Ec. 4.93, en que la *misma* $\mathbf{A}$ hace girar un vector en el *sentido de las manecillas del reloj.* En este caso tenemos que $\mathbf{R}$ hace girar las coordenadas en el sentido contrario a las manecillas del reloj y $\mathscr{R}$ hace girar las funciones en el *sentido opuesto.* Esto es una consecuencia del exponencial negativo en la Ec. 4.257.

Matrices de Pauli y SU(2). Los elementos de los grupos unitarios especiales bidimensionales, SU(2), pueden generarse por medio de

$$\exp \tfrac{1}{2}ia\sigma_1, \qquad \exp \tfrac{1}{2}ib\sigma_2 \qquad \text{y} \qquad \exp \tfrac{1}{2}ic\sigma_3 \tag{4.259}$$

en donde σ_1, σ_2, y σ_3 son las tres matrices de spin de Pauli. Los tres parámetros a, b y c son reales. Nuevamente, observe que los términos σ son hermitianos y tienen una traza de cero. Los elementos de SU(2), Ec. 4.259, son unitarios y tienen un determinante de $+1$. Nótese que los generadores en forma diagonal tales como σ_3 dan lugar a números cuánticos conservados.

Los términos σ de Pauli satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{4.260}$$

Esto difiere de las relaciones de conmutación $\mathbf{L}$ y $\mathbf{M}$, Ecs. 4.248 y 4.258, por un factor de 2. En consecuencia, podemos definir $\mathsf{s}_i = \frac{1}{2}\sigma_i$, $i = 1, 2, 3$.

Siendo así

$$[s_i, s_j] = i\varepsilon_{ijk}s_k \tag{4.261}$$

exactamente igual que las relaciones de conmutación del momento angular,[1] Ecs. 4.248 y 4.258, demostrando que s_i, y no σ_i, son los operadores del momento angular. Esta es la razón para incluir el término $\frac{1}{2}$ en los exponenciales de generador. Esencialmente, esto es lo mismo que la adopción de los ángulos medios en la investigación del homomorfismo SU(2)-O_3^+ en la Sección 4.9.

Desarrollando $\exp ias_1 = \exp \frac{1}{2}ia\sigma_1$ en la forma de una serie de Maclaurin

$$\begin{aligned}\exp \tfrac{1}{2}ia\sigma_1 &= 1\{1 - (a/2)^2/2! + (a/2)^4/4! - \cdots\} \\ &\quad + i\sigma_1\{(a/2) - (a/2)^3/3! + (a/2)^5/5! - \cdots\} \\ &= \begin{pmatrix} \cos a/2 & i \operatorname{sen} a/2 \\ i \operatorname{sen} a/2 & \cos a/2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cos a/2 + i\sigma_1 \operatorname{sen} a/2,\end{aligned} \tag{4.262}$$

como caso especial de la Ec. 4.224. El parámetro a aparece como un ángulo, el coeficiente de una matriz de momento angular (igual que φ en la Ec. 4.243). Pero en la forma SU(2), el ángulo siempre aparece como medio ángulo, $a/2$. De modo similar (completando la Ec. 4.224)

$$\begin{aligned}\exp \tfrac{1}{2}ib\sigma_2 &= \begin{pmatrix} \cos b/2 & \operatorname{sen} b/2 \\ -\operatorname{sen} b/2 & \cos b/2 \end{pmatrix} = 1 \cos b/2 + i\sigma_2 \operatorname{sen} b/2 \\ \exp \tfrac{1}{2}ic\sigma_3 &= \begin{pmatrix} \exp \frac{1}{2}ic & 0 \\ 0 & \exp -\frac{1}{2}ic \end{pmatrix} = 1 \cos c/2 + i\sigma_3 \operatorname{sen} c/2.\end{aligned} \tag{4.263}$$

Con esta identificación de los exponenciales, la forma general de la matriz SU(2) puede indicarse en la forma

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = (\exp \tfrac{1}{2}i\gamma\sigma_3)(\exp \tfrac{1}{2}i\beta\sigma_2)(\exp \tfrac{1}{2}i\alpha\sigma_3). \tag{4.264}$$

Esto reproduce la Ec. 4.228 de la Sección 4.9. La selección de las matrices de Pauli corresponden a las rotaciones de ángulo de Euler descritas en las Secciones 4.3 y 4.9.

Otros ejemplos de la técnica de rotación infinitesimal, generador exponencial, aparecen en la Sección 4.12.

EJERCICIOS

4.10.1 Un operador de translación $T(a)$ convierte $\psi(x)$ en $\psi(x + a)$,

$$T(a)\psi(x) = \psi(x + a).$$

[1] Estas constantes de estructura ($i\varepsilon_{ijk}$) originan las representaciones SU(2) de dimensión $2j + 1$ para los generadores de dimensión $2j + 1$, $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Los casos de j integral también originan las representaciones de O_3^+, tal como se describe en la Sección 4.9.

En términos del operador de momento lineal (mecánico cuántico) $p_x = -i\, d/dx$, demuestre que

$$T(a) = \exp iap_x .$$

Sugerencia. Desarrolle $\psi(x + a)$ como serie de Taylor.

4.10.2 Considere que el elemento general SU(2) de la Ec. 4.201 se forma a partir de tres rotaciones de Euler; (i) una rotación de $a/2$ alrededor del eje z, (ii) una rotación de $b/2$ alrededor del nuevo eje x y (iii) una rotación de $c/2$ alrededor del nuevo eje z. (Todas las rotaciones en el sentido contrario a las manecillas del reloj.) Utilizando los generadores σ de Pauli, demuestre que los ángulos de rotación están determinados por

$$\begin{aligned} a &= \xi - \zeta + \pi/2 = \alpha + \pi/2 \\ b &= 2\eta \qquad\qquad\quad = \beta \\ c &= \xi + \zeta - \pi/2 = \gamma - \pi/2. \end{aligned}$$

Nota. Los ángulos a y b en este caso no corresponden a a y b de la Ec. 4.200.

4.10.3 La forma exponencial del momento angular de la rotación de los operadores de ángulo de Euler es

$$\begin{aligned} \mathscr{R} &= \mathscr{R}_{z''}(\gamma)\mathscr{R}_{y'}(\beta)\mathscr{R}_z(\alpha) \\ &= \exp -i\gamma J_{z''} \exp -i\beta J_{y'} \exp -i\alpha J_z . \end{aligned}$$

Demuestre que en términos de los ejes originales:

$$\mathscr{R} = \exp -i\alpha J_z \exp -i\beta J_y \exp -i\gamma J_z$$

Sugerencia. Los operadores $\mathscr{R}$ se transforman como las matrices. Las rotaciones alrededor del eje y' (segunda rotación de Euler) se pueden referir al eje y original por medio de

$$\exp -i\beta J_{y'} = \exp -i\alpha J_z \exp -i\beta J_y \exp i\alpha J_z .$$

4.11 SU(2), SU(3) y Partículas Nucleares

La aplicación de la teoría de grupos a las partículas "elementales" ha sido designada por Wigner como la tercera etapa de la teoría de grupos y la física. La primera etapa ha sido la búsqueda de los 32 grupos de punto y los 230 grupos de espacio que originan las simetrías cristalinas (Sección 4.8). La segunda etapa fue la búsqueda de las representaciones, tales como las representaciones de O_3^+ y SU(2) (Sección 4.9). Ahora, en esta tercera etapa, los físicos regresan a la búsqueda de grupos.

Al discutir las partículas de interacción intensa de la física de alta energía y los grupos unitarios especiales SU(2) y SU(3), es de utilidad considerar el momento angular y el grupo de rotación O_3^+ para una analogía. Suponga que se tiene un electrón en el potencial de atracción esféricamente simétrico de algún núcleo atómico. La función de onda electrónica de Schrödinger puede caracterizarse por medio de tres números cuánticos n, l y m. Sin embargo, la energía se degenera $2l + 1$ veces, dependiendo so-

lamente de n y l.[1] La razón de esta degeneración puede establecerse en dos formas equivalentes:

1. El potencial es esféricamente simétrico, independiente de θ y φ, y
2. La hamiltoniana de Schrödinger, $-(\hbar^2/2m_e)\nabla^2 + V(r)$ es invariante bajo las rotaciones espaciales ordinarias (O_3^+).

Como consecuencia de la simetría esférica del potencial, se conserva el momento angular **L**. En la Sección 4.10, los componentes cartesianos de **L** se identifican como los generadores del grupo de rotación O_3^+. En lugar de representar L_x, L_y y L_z por medio de operadores, podemos utilizar matrices. Los ejercicios al final de la Sección 4.2 proporcionan ejemplos para $l = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$. Las matrices L_i son las matrices $(2l + 1) \times (2l + 1)$ en que la dimensión es igual que el número de estados degenerados.[2] Estas matrices L_j generan las representaciones irreducibles de O_3^+. La dimensión $2l + 1$ se identifica con los estados degenerados $2l + 1$.

La forma común de eliminar esta degeneración consiste en introducir una inducción magnética constante **B**. Esto da lugar al efecto de Zeeman. Esta inducción magnética agrega un término a la hamiltoniana de Schrödinger que *no* es invariante bajo O_3^+. Este es el término de ruptura de simetría.

Esto es en cuanto a analogía. En el caso de las partículas de interacción intensa (neutrones, protones, etc.), no se puede aplicar la analogía directamente debido a que aún no comprendemos completamente la interacción nuclear. No se conoce la hamiltoniana. Siendo así, podemos proceder a invertir la analogía.

En el año de 1930, Heisenberg propuso que las fuerzas nucleares eran independientes de las cargas, que las dos únicas partículas masivas conocidas entonces (bariones), el neutrón y el protón, eran dos estados diferentes de la *misma* partícula. La referencia a la tabla 4.2 indica que las partículas tienen casi la misma masa. La diferencia fraccional $(m_n - m_p)/m_p \approx 0.0014$, es pequeña, sugiriendo con esto que la diferencia de masa se produce por una pequeña perturbación independiente de la carga. Se consideró conveniente describir esto como una casi degeneración, mediante la introducción de la cantidad **I** con las proyecciones en z de $I_3 = \frac{1}{2}$ para el protón, $-\frac{1}{2}$ para el neutrón. El nombre adjudicado para I fue isospin. El isospín no tiene ninguna relación con el spin (el momento angular intrínseco de la partícula) pero el vector de estado isospin de dos componentes obedece las mismas relaciones matemáticas que el vector de estado con spin $J = \frac{1}{2}$ y en particular puede considerarse como un vector propio de la matriz σ_3 de Pauli.

En ausencia de las fuerzas dependientes de la carga, el isospín se conserva (el protón y el neutrón tienen la misma masa) y se tiene una dege-

[1] Cuando el potencial es un potencial de Coulomb puro, la energía depende solamente de n (cf. Sección 13.2).

[2] Siendo L_i una matriz, la función de onda de Schrödinger $\psi(r, \theta, \varphi)$ se sustituye con un vector de estado, con los componentes $2l + 1$. El momento angular y la degeneración $(2l + 1)$ veces se describe con cierto detalle en la Sección 12.7.

neración duplicada. Equivalentemente, la hamiltoniana nuclear desconocida debe ser invariante bajo el grupo generado por las matrices de isospín. Las matrices de isospín son justamente las 3 matrices de Pauli (matrices 2×2) y el grupo generado es el grupo SU(2) de la Sección 4.9, también correspondientemente 2×2 con respecto a la degeneración duplicada.

Hacia el año de 1961 habían sido descubiertas (o creadas) muchas otras partículas. Las ocho que se muestran en la tabla 4.2 fueron de particular interés.[1] Fue conveniente describir las mismas por medio de los números cuánticos característicos, I para el isospín y Y para la hipercarga. Las partículas pueden agruparse en multipletes de isospín o carga. Luego, la hipercarga Y puede tomarse como el doble de la carga promedio del multiplete. Para el multiplete protón-neutrón

$$Y = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(0 + 1) = 1. \tag{4.265}$$

Los valores de hipercarga e isospín se indican a modo de lista en la tabla 4.2.

A partir de los experimentos de dispersión y producción, se ha hecho evidente que tanto el isospin I como la hipercarga Y se conservan bajo

TABLA 4.2

Bariones con paridad par spin 1/2

		Masa (MeV)	Y	I	I_3
	Ξ^-	1321.300			$-\frac{1}{2}$
Ξ			-1	$\frac{1}{2}$	
	Ξ^0	1314.900			$+\frac{1}{2}$
	Σ^-	1197.410			-1
Σ	Σ^0	1192.540	0	1	0
	Σ^+	1189.470			$+1$
Λ	Λ	1115.500	0	0	0
	n	939.550			$-\frac{1}{2}$
N			1	$\frac{1}{2}$	
	p	938.256			$+\frac{1}{2}$

[1] Todas las masas se proporcionan en unidades de energía, MeV.

una interacción (nuclear) intensa. Recuerde que L (o I) se conserva bajo una hamiltoniana esféricamente simétrica. De este modo, las ocho partículas aparecen como una degeneración óctupla, pero ahora con *dos* cantidades por conservarse. En el año de 1961, Gell-Mann, e independientemente Ne'eman, sugirieron que la interacción intensa debería ser invariante bajo el grupo unitario especial de tres dimensiones, SU(3), es decir con simetría SU(3).

La selección de SU(3) se basó inicialmente en la existencia de dos cantidades conservadas. Esto determinó un grupo de clase 2, un grupo, dos de cuyos generadores (y solamente dos) conmutan. En segundo lugar, el grupo debía tener una representación de 8×8 para tomar en cuenta los 8 bariones degenerados. En cierto sentido, SU(3) constituyó la generalización más simple de SU(2). Gell-Mann estableció 8 generadores: 3 para los componentes del isospín, 1 para la hipercarga y 4 adicionales. Todas son matrices 3×3, de traza cero. Igual que en el caso de O_3^+ y SU(2) existe infinidad de representaciones irreducibles. Una de ocho dimensiones ha sido asociada con las ocho partículas de la tabla 4.2.[1]

Imaginamos que la hamiltoniana para nuestros 8 bariones está formada como sigue:

$$H = H_{\text{intensa}} + H_{\text{media}} + H_{\text{electromagnética}} \tag{4.266}$$

La primera parte, H_{intensa}, tiene la simetría SU(3) y origina la degeneración óctupla. La introducción de una interacción disruptora de la simetría, H_{media}, elimina parte de la degeneración proporcionando los cuatro multipletes de isospín Ξ, Σ, Λ y N. Estos son multipletes debido a que H_{media} aún tiene la simetría SU(2). Finalmente, la presencia de las fuerzas dependientes de la carga separa los multipletes de isospín y remueve la última degeneración. La secuencia imaginada se muestra en la Fig. 4.13.

Aplicando la teoría de perturbación de primer orden de la mecánica cuántica, se pueden calcular algunas relaciones simples entre las masas de los bariones. Asimismo, las reglas de intensidad para la extinción y los procesos de dispersión, se pueden obtener.

Probablemente, el éxito más importante de este modelo SU(3) ha sido la predicción de nuevas partículas. En el año de 1961, cuatro mesones K y tres π (todos pseudoescalares; spin de 0, paridad non) sugirieron otro octeto, similar al octeto del bario. La teoría del SU(3) predijo un octavo mesón η^0, masa 563 MeV. El mesón η^0, cuya masa, determinada experimentalmente, es de 548 MeV, fue encontrado poco después. Los agrupamientos de nueve de los bariones más pesados (todos con spin de 3/2, paridad par) sugirieron un grupo de 10 miembros o decupleto. Se predijo que el décimo barión faltante tendría una masa de aproximadamente 1680 MeV y una carga negativa. En el año 1964, Ω^-, cargado negativamente, con masa de 1675 ± 12 MeV, fue descubierto.

[1] Esta aplicación de SU(3) ha sido denominada por Gell-Mann "la forma óctupla". Observe los 8 parámetros independientes de SU(3) (desde $n^2 - 1$), los 8 generadores, la representación 8×8 asociada con 8 partículas. El nombre también se refiere al procedimiento óctuplo de Buda.

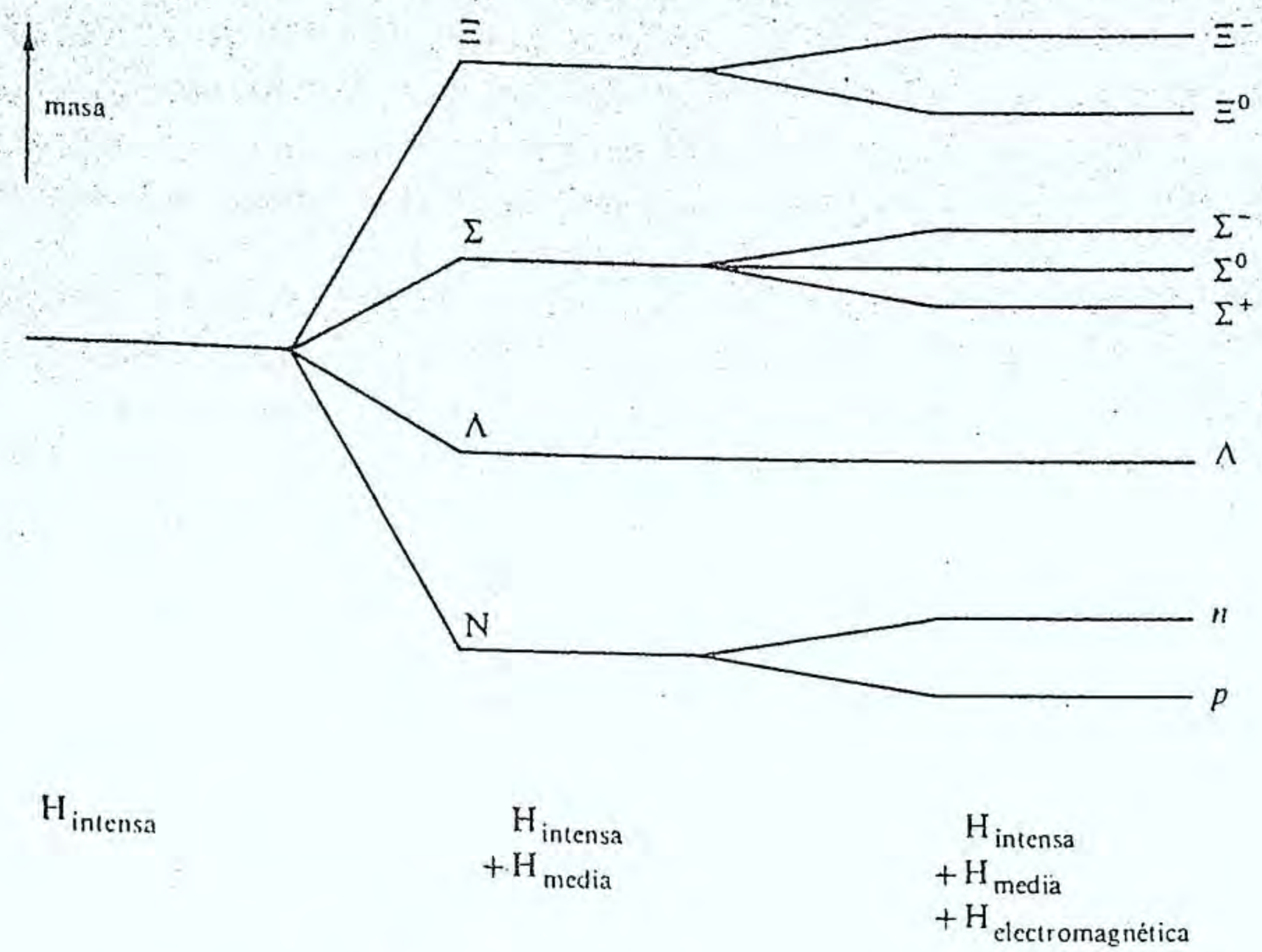


Fig. 4.13 Separación másica del barión

Desde el cumplimiento de este decupleto $3/2^+$ se ha establecido un multiplete de $5/2^-$ (paridad non) para los bariones y los multipletes 1^- y 2^+ para los mesones.

La aplicación de la teoría de grupos a las partículas de interacción intensa ha sido extendida más allá del SU(3). Se ha realizado una amplia investigación del SU(6) y los grupos más complejos y dimensionales superiores. Se ha dado gran atención a los generadores de grupo y a las *constantes de estructura* en las relaciones de conmutación de generador (tal como $i\varepsilon_{ijk}$ para el momento angular orbital). Las constantes de estructura definen el *álgebra de Lie.* Existe la posibilidad de asociar las integrales de espacio de las densidades de corriente con los generadores de grupo. Esto da origen a un álgebra de corriente bastante fuera del campo de esta descripción.

Para conservar la teoría de grupos y su verdadero logro en la perspectiva adecuada, es de hacerse notar que la teoría de grupos identifica y formaliza las simetrías. Clasifica (y algunas veces predice) las partículas. Pero aparte de indicar que una parte de la hamiltoniana tiene una simetría SU(2) y otra parte tiene una simetría SU(3), la teoría de grupos no dice *nada* acerca de las interacciones de las partículas. Recuerde que el enunciado de que el potencial atómico es esféricamente simétrico, no indica nada acerca de la dependencia radial del potencial o bien de la función de onda.

4.12 Grupo de Lorentz Homogéneo

Generalizado el procedimiento de los vectores de la Sección 1.2, los científicos requieren que las leyes físicas sean covariantes[1] bajo

(a) las translaciones de tiempo y espacio
(b) rotaciones en el espacio verdadero tridimensional, y
(c) transformaciones de Lorentz.

El requisito de la covariancia bajo las translaciones está basado en la homogeneidad del espacio y tiempo. La convariancia bajo las rotaciones es una afirmación de la isotropía del espacio. El requisito de la covariancia de Lorentz se basa en la aceptación de la relatividad especial. Las tres transformaciones anteriores forman conjuntamente el grupo de Lorentz inhomogéneo o el grupo de Poincaré. Aquí excluimos las translaciones. Las rotaciones espaciales de las transformaciones de Lorentz forman conjuntamente un grupo, el grupo de Lorentz homogéneo.

Primeramente se genera un subgrupo, las transformaciones de Lorentz en que la velocidad relativa **v** es a lo largo del eje $x = x_1$. El generador puede determinarse al considerar las estructuras de referencia de espacio-tiempo de Lorentz que se mueven con la velocidad relativa δv, una infinitesimal.[2] Las relaciones son similares que las correspondientes a las rotaciones en el espacio verdadero, Secciones 1.2, 3.1 y 4.3, excepto que en este caso el ángulo de rotación es puramente imaginario (cf. Sección 3.7).

Trabajaremos en el espacio de Minkowski con $x_4 = ict$. Para una velocidad relativa infinitesimal δv, la transformación de espacio-tiempo es galileana:

$$x_1' = x_1 - \delta v\, t = x_1 + i\, \delta\beta\, x_4 . \tag{4.267}$$

Aquí, como es usual, $\beta = v/c$. Por simetría, también puede indicarse

$$x_4' = x_4 + ia\, \delta\beta x_1 \tag{4.268}$$

en que a es un parámetro determinado por el requisito de que $x_1^2 + x_4^2$ sea invariante,

$$x_1'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_4^2 . \tag{4.269}$$

Recuerde que x_μ es el vector prototipo de cuatro dimensiones en el espacio de Minkowski. Elevando al cuadrado y sumando las Ecs. 4.267 y 4.268 y desechando los términos del orden $(\delta\beta)^2$, se encuentra que $a = -1$. Las Ecs. 4.267 y 4.268 se pueden combinar en la forma de una ecuación de matriz

[1] El ser covariante significa tener la misma forma en diferentes sistemas coordenados de modo que no existe un sistema de *referencia preferido* (cf. Secciones 1.2 y 3.1).

[2] Esta derivación, con una métrica ligeramente distinta, aparece en el artículo de J. L. Strecker, *Am. J. Phys.* 35. 12 (1967).

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix}_{\delta\beta} = (1 + \delta\beta\sigma_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{4.270}$$

en donde sucede que σ_2 es el negativo de la matriz de Pauli, σ_y.

El parámetro $\delta\beta$ representa un cambio infinitesimal. Utilizando las mismas técnicas que en la Sección 4.10, repetimos la transformación N veces para desarrollar una transformación *finita* con el parámetro de velocidad $\theta = N\,\delta\beta$. Siendo así,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{\theta\sigma_2}{N}\right)^N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{4.271}$$

En el límite, a medida que $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{\theta\sigma_2}{N}\right)^N = \exp\theta\sigma_2\,. \tag{4.272}$$

Del mismo modo que en la Sección 4.10, el exponencial se interpreta por medio de un desarrollo de Maclaurin

$$\exp\theta\sigma_2 = 1 + \theta\sigma_2 + (\theta\sigma_2)^2/2! + (\theta\sigma_2)^3/3! + \cdots. \tag{4.273}$$

Observando que $\sigma_2^2 = 1$,

$$\exp\theta\sigma_2 = 1\cosh\theta + \sigma_2\,\mathrm{senh}\,\theta. \tag{4.274}$$

En consecuencia, nuestra transformación finita de Lorentz es

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & i\,\mathrm{senh}\,\theta \\ -i\,\mathrm{senh}\,\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{4.275}$$

σ_2 ha *generado* las representaciones de esta transformación de Lorentz especial.

Cosh θ y senh θ se pueden identificar al considerar el origen del sistema coordenado imprimado, $x_1' = 0$, o $x_1 = vt$. Sustituyendo en la Ec. 4.275,

$$0 = x_1\cosh\theta + x_4\,i\,\mathrm{senh}\,\theta. \tag{4.276}$$

Con $x_1 = vt$ y $x_4 = ict$

$$\tanh\theta = \beta.$$

Utilizando $1 - \tanh^2\theta = (\cosh^2\theta)^{-1}$,

$$\cosh\theta = (1-\beta^2)^{-1/2} \equiv \gamma, \qquad \mathrm{senh}\,\theta = \beta\gamma. \tag{4.277}$$

La matriz en la Ec. 4.275 concuerda con la porción $x_3 - x_4$ de la matriz en la Ec. 3.120.

El caso especial precedente de la velocidad paralela a un eje espacial no presenta problemas, pero no ilustra la técnica del generador—exponenciación— de la velocidad infinitesimal. Ahora aplicamos esta técnica exacta para derivar la transformación de Lorentz para la velocidad relativa $\mathbf{v}$ *no* paralela a ningún eje espacial.

Sea $v_1 = \lambda|\mathbf{v}|$, $v_2 = \mu|\mathbf{v}|$ y $v_3 = \nu|\mathbf{v}|$ con λ, μ y ν los cosenos de dirección para $\mathbf{v}$. En analogía con la Ec. 4.267, se puede indicar

$$x_1' = x_1 + i\lambda\,\delta\beta\,x_4$$
$$x_2' = x_2 + i\mu\,\delta\beta\,x_4 \tag{4.278}$$
$$x_3' = x_3 + i\nu\,\delta\beta\,x_4.$$

Nuevamente, por simetría intentamos

$$x_4' = x_4 + ia_1\delta\beta x_1 + ia_2\,\delta\beta x_2 + ia_3\,\delta\beta x_3. \tag{4.279}$$

A partir de

$$\sum_{\xi=1}^{4} x_\xi'^2 = \sum_{\zeta=1}^{4} x_\zeta^2, \tag{4.280}$$

$$a_1 = -\lambda, \qquad a_2 = -\mu, \qquad \text{y} \qquad a_3 = -\nu.$$

Volviendo a establecer las Ecs. 4.278 y 4.279 como ecuación de matriz:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i\lambda\delta\beta \\ 0 & 1 & 0 & i\mu\delta\beta \\ 0 & 0 & 1 & i\nu\delta\beta \\ -i\lambda\delta\beta & -i\mu\delta\beta & -i\nu\delta\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{4.281}$$

Restando 1 y eliminando $\delta\beta$ como factor

$$\mathbf{x}' = (1 + \delta\beta\sigma)\mathbf{x}. \tag{4.282}$$

Aquí

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\lambda \\ 0 & 0 & 0 & i\mu \\ 0 & 0 & 0 & i\nu \\ -i\lambda & -i\mu & -i\nu & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.283}$$

Mediante la multiplicación directa (con $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$),

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu & 0 \\ \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu & 0 \\ \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.284}$$

y

$$\sigma^3 = \sigma. \tag{4.285}$$

Como antes, reiteramos N veces con $\theta = N\,\delta\beta$. Formando el exponencial

$$\lim_{N\to\infty} (1 + \theta\sigma/N)^N = e^{\theta\sigma}$$
$$= 1 + \sigma \operatorname{senh}\theta + \sigma^2(\cosh\theta - 1). \tag{4.286}$$

σ es nuestro generador con los parámetros λ, μ y ν que definen la dirección de la velocidad implícita. Estableciendo la segunda parte de la Ec. 4.286, la matriz de transformación de Lorentz en toda su amplitud es

$$\mathsf{L}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2(\cosh\theta-1) & \lambda\mu(\cosh\theta-1) & \lambda\nu(\cosh\theta-1) & i\lambda\,\mathrm{senh}\,\theta \\ \lambda\mu(\cosh\theta-1) & 1+\mu^2(\cosh\theta-1) & \mu\nu(\cosh\theta-1) & i\mu\,\mathrm{senh}\,\theta \\ \lambda\nu(\cosh\theta-1) & \mu\nu(\cosh\theta-1) & 1+\nu^2(\cosh\theta-1) & i\nu\,\mathrm{senh}\,\theta \\ -i\lambda\,\mathrm{senh}\,\theta & -i\mu\,\mathrm{senh}\,\theta & -i\nu\,\mathrm{senh}\,\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \tag{4.287}$$

Nuevamente $\cosh\theta = (1-\beta^2)^{-1/2} = \gamma$, $\mathrm{senh}\,\theta = \beta\gamma$.

Nótese que la combinación de las Ecs. 4.286 y 4.287,

$$\mathsf{L}(\mathbf{v}) = e^{\theta\sigma} \tag{4.288}$$

no es una forma exacta de la Ec. 4.237. El exponente adolece de la falta del factor i, y $\mathsf{L}(\mathbf{v})$ *no* es unitario.

Las matrices proporcionadas por la Ec. 4.275 para el caso de $\mathbf{v} = iv_x$ forman un subgrupo. Las matrices de la Ec. 4.287, *no* lo forman. El producto de dos matrices de transformación de Lorentz $\mathsf{L}(\mathbf{v}_1)$ y $\mathsf{L}(\mathbf{v}_2)$, proporcionan una tercera matriz de Lorentz $\mathsf{L}(\mathbf{v}_3)$, si las dos velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son paralelas. La velocidad resultante $\mathbf{v}_3$ está relacionada con $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ por medio de la ley de adición de la velocidad de Einstein, Sección 3.7. Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son paralelas, no existe una relación de tal simplicidad. Específicamente, considere las tres estructuras de referencia S, S' y S'', en donde S y S' están relacionadas por $\mathsf{L}(\mathbf{v}_1)$ y S' y S'' están relacionadas por $\mathsf{L}(\mathbf{v}_2)$. Si la velocidad de S'' con relación al sistema original S es $\mathbf{v}_3$, S'' *no* se obtiene de S por medio de $\mathsf{L}(\mathbf{v}_3)$ solamente. Más bien, se encuentra que

$$\mathsf{L}(\mathbf{v}_3) = \mathsf{R}\mathsf{L}(\mathbf{v}_2)\mathsf{L}(\mathbf{v}_1) \tag{4.289}$$

en donde $\mathbf{R}$ es una matriz de rotación espacial 3×3 incrustada en nuestro espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Con $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no paralelas, el sistema final S'' queda *rotado* con relación a S. Esta rotación es el origen de la precesión de Thomas involucrada en los términos de acoplamiento spin-órbita en la física atómica y nuclear. Debido a su presencia, los términos $\mathsf{L}(\mathbf{v})$ por sí mismos no forman un grupo.

EJERCICIOS

4.12.1 Obtenga $\sigma(\lambda, \mu, \nu)$ mediante la diferenciación de la matriz final, Ec. 4.287.

4.12.2 Se realizan dos transformaciones de Lorentz en sucesión: v_1 a lo largo del eje x, luego v_2 a lo largo del eje y. Demuestre que la transformación resultante (definida por el

producto de estas dos transformaciones sucesivas) *no* puede establecerse en la forma de la Ec. 4.287.

Nota. La discrepancia corresponde a una rotación.

REFERENCIAS

AITKEN, A. C., *Determinants and Matrices.* Nueva York: Interscience Publishers (1956). Una introducción, de fácil lectura, a los determinantes y las matrices.

BICKLEY, W. G. y R. S. H. G. THOMPSON, *Matrices—Their Meaning and Manipulation,* Princeton, Nueva Jersey: Van Nostrand (1964). Una relación amplia de la ocurrencia de las matrices en los problemas físicos, sus propiedades analíticas y las técnicas numéricas.

BUERGER, M. J., *Elementary Crystallography.* Nueva York: Wiley (1956). Una descripción amplia de las simetrías cristalinas. Buerger desarrolla todos los 32 grupos de punto y todos los 230 grupos de espacio.

FALICOV, L. M., *Group Theory and Its Physical Applications.* Notas recopiladas por A. Luehrmann. Chicago: University of Chicago Press (1966). La teoría de grupos con énfasis en las aplicaciones a las simetrías cristalinas y la física del estado sólido.

GELL-MANN, M. y NE'EMAN, Y., *The Eightgord Way.* Nueva York: Benjamin (1965). Una colección de reimpresiones de artículos interesantes acerca de SU(3) y las partículas de la física de alta energía. Las diversas secciones introductorias por parte de Gell-Mann y Ne'eman son de especial utilidad.

HAMERMESH, M., *Group and Its Application to Physical Problems.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley (1962). Una relación detallada y amplia de los grupos finitos y continuos. Se desarrollan los 32 grupos de punto. Los grupos continuos se tratan conjuntamente con el álgebra de Lie incluida. Una gran diversidad de aplicaciones a la física atómica y nuclear.

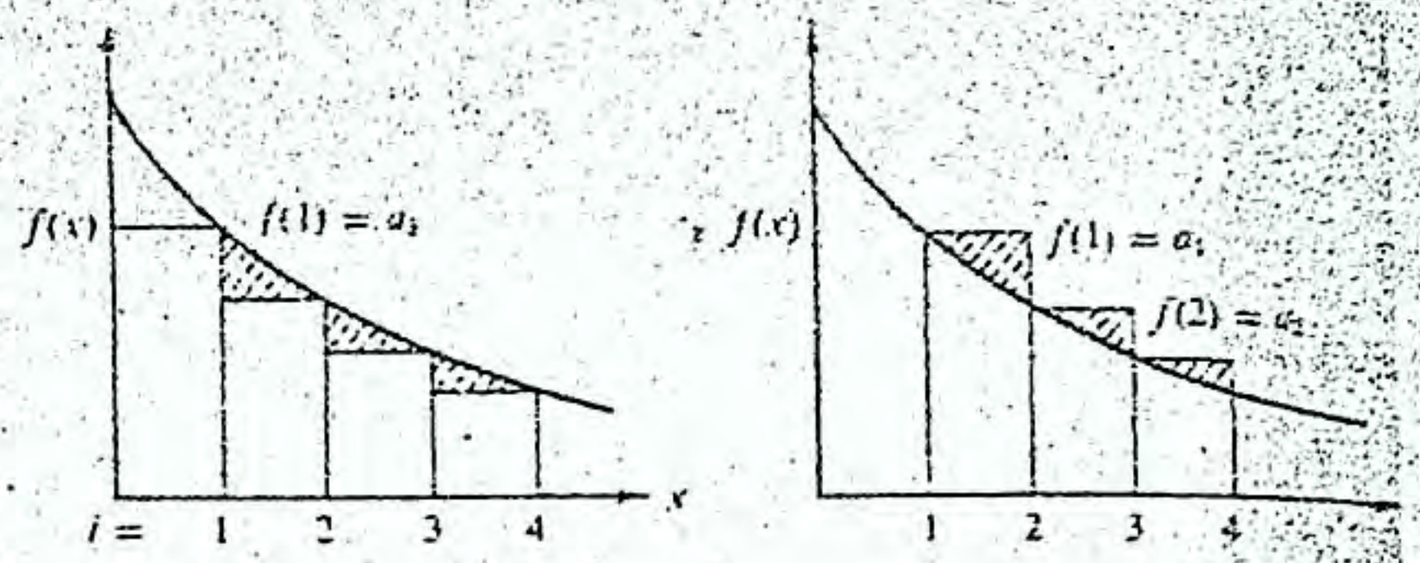
HIGMAN, B., *Applied Group-Theoretic and Matrix Methods.* Nueva York: Dover (1964), Oxford: Oxford University Press (1955). Un desarrollo más bien completo y raramente inteligible del análisis de las matrices y la teoría de los grupos.

MICHAEL, A. D., *Matrix and Tensor Calculus With Applications to Mechanics, Elasticity and Aeronautics.* Nueva York: Wiley (1947). Una exposición inusitada, clara, sobre el desarrollo de un cálculo de las matrices y los tensores.

RAM, B., *Am. J. Phys.* **35**, 16 (1967). Una excelente descripción de la aplicación de SU(3) a las partículas de interacción intensa (bariones).

ROSE, M. E., *Elementary Theory of Angular Momentum.* Nueva York: Wiley (1957). Como parte del desarrollo de la teoría cuántica del momento angular, Rose incluye una relación detallada y de fácil lectura acerca del grupo de rotación.

WIGNER, E. P., *Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra.* Traducido al inglés por J. J. Griffin. Nueva York y Londres: Academic Press (1959). Este constituye la referencia clásica a la teoría de grupos para el físico. El grupo de rotación se trata con gran detalle. También se incluye una gran diversidad de aplicaciones a la física atómica.



CAPITULO 5

SERIES INFINITAS

5.1 Conceptos Fundamentales

Las series infinitas, que literalmente representan sumas de un número infinito de términos, se presentan frecuentemente en las matemáticas puras y aplicadas. Se pueden utilizar en las matemáticas puras para definir las funciones como un procedimiento fundamental a la teoría de las funciones. También se pueden utilizar en el cálculo de valores precisos de constantes y funciones trascendentales. En las matemáticas de la ciencia y la ingeniería las series infinitas son omnipresentes ya que aparecen en la evaluación de las integrales (Secciones 5.6 y 5.7), en la solución de las ecuaciones diferenciales (Secciones 8.4 y 8.5) y en las series de Fourier (Capítulo 14), y compiten con las representaciones integrales para la descripción de una gran diversidad de funciones especiales (Capítulos 11, 12 y 13).

Justo al principio, nos enfrentamos con el problema de adjudicar un significado a la suma de un número infinito de términos. El procedimiento usual es mediante las sumas parciales. Si se tiene una secuencia de términos finitos $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots$, definimos la suma parcial hasta el término i como

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} u_n. \tag{5.1}$$

Esto es una suma finita y no ofrece dificultades. Si las sumas parciales s_i convergen a un límite (finito) conforme $i \to \infty$,

$$\lim_{i \to \infty} s_i = S, \tag{5.2}$$

se dice que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es *convergente* y que tiene el valor S. Observe cuidadosamente que de modo razonable, plausible, pero aun así, arbitrario, hemos definido la serie infinita como equivalente a S. El lector deberá notar también que una condición necesaria para esta convergencia hasta cierto límite es que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Sin embargo, esta condición, no es suficiente para garantizar la convergencia.

Nuestras sumas parciales s_i pueden no convergir a un límite simple sino más bien oscilar, tal como en el caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \cdots - (-1)^n + \cdots. \tag{5.3}$$

Evidentemente, $s_i = 1$ para i non pero 0 para i par. No existe convergencia hacia un límite, y las series como esta se denominan oscilatorias.

Para las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots \tag{5.4}$$

se tiene

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5.5}$$

A medida que $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty. \tag{5.6}$$

Siempre que la secuencia de las sumas parciales presente divergencia (se aproxime a $\pm\infty$), se dice que la serie infinita es *divergente*. Frecuentemente, el término divergencia se extiende para incluir también las series oscilatorias.

Debido a que hemos evaluado las sumas parciales por medio de la aritmética ordinaria, la serie convergente, definida en términos de un límite de sumas parciales, adquiere una posición de gran importancia. Dos ejemplos pueden aclarar la naturaleza de la convergencia o la divergencia de una serie y además también pueden servir como base para una investigación detallada adicional en la siguiente sección.

La secuencia geométrica, comenzando con a y con relación r ($r \geqslant 0$), está definida por

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$$

La enésima suma parcial está definida por

$$s_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}. \tag{5.7}$$

Considerando el límite como $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1 - r}, \quad \text{para } r < 1. \tag{5.8}$$

En consecuencia, por definición, la serie geométrica infinita converge para $r < 1$ y está determinada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}. \tag{5.9}$$

Por otra parte, si $r \geqslant 1$, la condición necesaria $u_n \to 0$ no se satisface y la serie infinita es divergente.

Como segundo ejemplo, más involucrado, se considera la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots. \tag{5.10}$$

Se tiene que el $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, pero esto no es suficiente para garantizar la convergencia. Si agrupamos los términos (sin cambio en el orden) en la forma

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + (\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}) + \cdots, \tag{5.11}$$

se observa que cada par de paréntesis encierra los términos p de la forma

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{p+p} > \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}. \tag{5.12}$$

Efectuando cada una de las sumas parciales de los grupos entre paréntesis, se obtiene

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, & s_4 &> \frac{5}{2}, \\ s_2 &= \frac{3}{2}, & s_5 &> \frac{6}{2}, \\ s_3 &> \frac{4}{2}, & s_n &> \frac{n+1}{2}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

La serie armónica considerada en esta forma ciertamente es divergente.[1] Una demostración alternativa e independiente de esta divergencia aparece en la Sección 5.2.

Utilizando el teorema binomial[2] (Sección 5.6), se puede desarrollar la función $(1 + x)^{-1}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} + \cdots. \tag{5.14}$$

[1] Las series armónicas (finitas) aparecen en una nota interesante del máximo desplazamiento estable de un apilamiento de monedas, "The Leaning of Lire", P. R. Johnson, *Amer. J. Phys.* 23, 240 (1955).

[2] En realidad, la Ec. 5.14 puede considerarse como una identidad y verificarse mediante la multiplicación de ambos lados por $1 + x$.

Si consideramos que $x \to 1$, la serie se transforma en

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots, \tag{5.15}$$

una serie que anteriormente ha sido denominada oscilatoria en esta sección. Aun cuando no es convergente en el sentido usual, existe la posibilidad de aplicar un significado a esta serie. Euler, por ejemplo, asignó un valor de $\frac{1}{2}$ a esta secuencia oscilatoria con base en la correspondencia entre esta serie y la función bien definida $(1 + x)^{-1}$. Desafortunadamente, tal correspondencia entre la serie y la función no es única y este procedimiento debe refinarse. Otros métodos para la asignación de un significado a las series divergente u oscilatoria, es decir métodos para definir una suma, han sido desarrollados. Sin embargo, en general, este aspecto de la serie infinita es de poco interés relativo para el científico o el ingeniero. Una excepción a este enunciado, la serie asintótica o semiconvergente de enorme importancia, se considera en la Sección 5.11.

EJERCICIOS

5.1.1 Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Sugerencia. Demuestre (mediante inducción matemática) que

5.1.2 Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

5.2 Pruebas de Convergencia

Aun cuando las series no convergentes pueden ser de utilidad en ciertos casos (cf. Sección 5.11), normalmente se insiste, como aspecto de conveniencia, aun cuando no de necesidad, que nuestra serie sea convergente. Asimismo, es un asunto de extrema importancia para nuestra capacitación, ya que con ello, podremos establecer si cierta serie es convergente. Desarrollaremos algunas pruebas posibles, comenzando con las pruebas simples y relativamente insensibles, para pasar posteriormente a las pruebas de más complejidad pero de mayor sensibilidad.

Por el momento, consideremos una serie de términos positivos, $a_n > 0$, dejando pendientes los términos negativos hasta la siguiente sección.

Prueba de Comparación. Cuando, término por término, una serie de términos $u_n \leqslant a_n$, en donde a_n forma una serie convergente, se dice que la serie $\sum_n u_n$ también es convergente.

Cuando, término por término, una serie de términos $v_n \geqslant b_n$, en donde b_n forma una serie divergente, se dice que la serie $\sum_n v_n$ también es divergente. Observe que las comparaciones de u_n con b_n o v_n con a_n no proporcionan información.

Para la serie convergente a_n ya se tiene el caso de la serie geométrica, mientras que la serie armónica nos puede servir como la serie divergente b_n. A medida que se identifiquen otras series dentro de la clasificación de convergente o divergente, se pueden utilizar como series conocidas para esta prueba de comparación.

EJEMPLO 5.2.1

Ensaye $\sum_n n^{-p}$, $p = 0.999$, en cuanto a convergencia. $n^{-0.999} > n^{-1}$, y $b_n = n^{-1}$ forman la serie armónica divergente, y la prueba de comparación demuestra que $\sum_n n^{-0.999}$ es divergente. Generalizando, se observa que $\sum_n n^{-p}$ es divergente para todos los valores de $p \leqslant 1$.

Prueba de la Raíz de Cauchy. Si $(a_n)^{1/n} \leqslant r < 1$ para todos los valores suficientes de n, con r independiente de n, entonces $\sum_n a_n$ es convergente. Si $(a_n)^{1/n} \geqslant 1$ para un número suficientemente grande de n, entonces $\sum_n a_n$ es divergente.

La primera parte de esta prueba se verifica muy fácilmente al elevar $(a_n)^{1/n} \leqslant r$ a la potencia n. Se obtiene

$$a_n \leqslant r^n < 1.$$

Ya que r^n es justamente el enésimo término en una serie geométrica convergente, $\sum_n a_n$ es convergente de acuerdo con la prueba de comparación. Alternativamente, si $(a_n)^{1/n} \geqslant 1$, entonces $a_n \geqslant 1$ y la serie debe ser divergente. Esta prueba de raíz es de utilidad al establecer las propiedades de las series de potencias (Sección 5.7).

Prueba de Relación de D'Alembert o Cauchy. Si $a_{n+1}/a_n \leqslant r < 1$ para un número suficientemente grande de n, y r es independiente de n, entonces $\sum_n a_n$ es convergente. Si $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$ para un número suficientemente grande de n, entonces $\sum_n a_n$ es divergente.

La convergencia se demuestra mediante la comparación directa con la serie geométrica $a_n(1 + r + r^2 + \cdots)$. En la segunda parte, $a_{n+1} \geqslant a_n$ y la divergencia deberá ser razonablemente obvia. Aun cuando no es tan sensible como la prueba de la raíz de Cauchy, esta prueba de la relación de D'Alembert es una de las más fáciles de aplicar y se utiliza ampliamente. Un enunciado alternativo de la prueba de relación es en la forma de un límite:

Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \quad \text{convergencia,}$$
$$> 1, \quad \text{divergencia,}$$
$$= 1, \quad \text{indeterminante} \tag{5.16}$$

Debido a esta posibilidad indeterminante final, la prueba de relación probablemente falle en puntos cruciales, y quizás sean necesarias pruebas más delicadas y precisas.

El lector listo pudiera preguntarse cómo es que se ha originado esta indeterminación. De hecho, ha sido establecida en el primer enunciado $a_{n+1}/a_n \leqslant r < 1$. Pudiéramos encontrar $a_{n+1}/a_n < 1$ pero ser incapaces de escoger una $r < 1$ *e independiente* de n tal que $a_{n+1}/a_n \leqslant r$ para todas las n suficientemente grandes. Un ejemplo lo proporciona la serie armónica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1. \tag{5.17}$$

Ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \tag{5.18}$$

no existe una relación fija $r < 1$ y la prueba de relación falla.

EJEMPLO 5.2.2

Ensaye $\sum_n n/2^n$ en cuanto a convergencia.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}. \tag{5.19}$$

Ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{3}{4} \quad \text{para } n \geqslant 2, \tag{5.20}$$

se tiene la convergencia. Alternativamente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \tag{5.21}$$

y nuevamente convergencia.

Prueba de la Integral de Maclaurin o Cauchy. Esta es otra clase de prueba de comparación, en que se compara una serie con una integral. Geométricamente se compara el área de una serie con rectángulos de ancho unitario con el área bajo la curva.

Considere que $f(x)$ es una función continua decreciente monotónica en que $f(n) = a_n$. Entonces $\sum_n a_n$ converge cuando $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es finita y diverge si la integral es infinita.

Para la suma parcial iésima

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} a_n = \sum_{n=1}^{i} f(n). \tag{5.22}$$

Pero

$$s_i > \int_1^{i+1} f(x)\,dx \tag{5.23}$$

que según la Fig. 5.1*a*, $f(x)$ es decreciente monotónica. Por otra parte, de la Fig. 5.1*b*,

$$s_i - a_1 < \int_1^{i} f(x)\,dx, \tag{5.24}$$

en donde la serie está representada por los rectángulos inscritos. Considerando el límite como $i \to \infty$, se tiene

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \int_1^{\infty} f(x)\,dx + a_1. \tag{5.25}$$

En consecuencia, la serie infinita converge o diverge del mismo modo que la integral correspondiente converge o diverge.

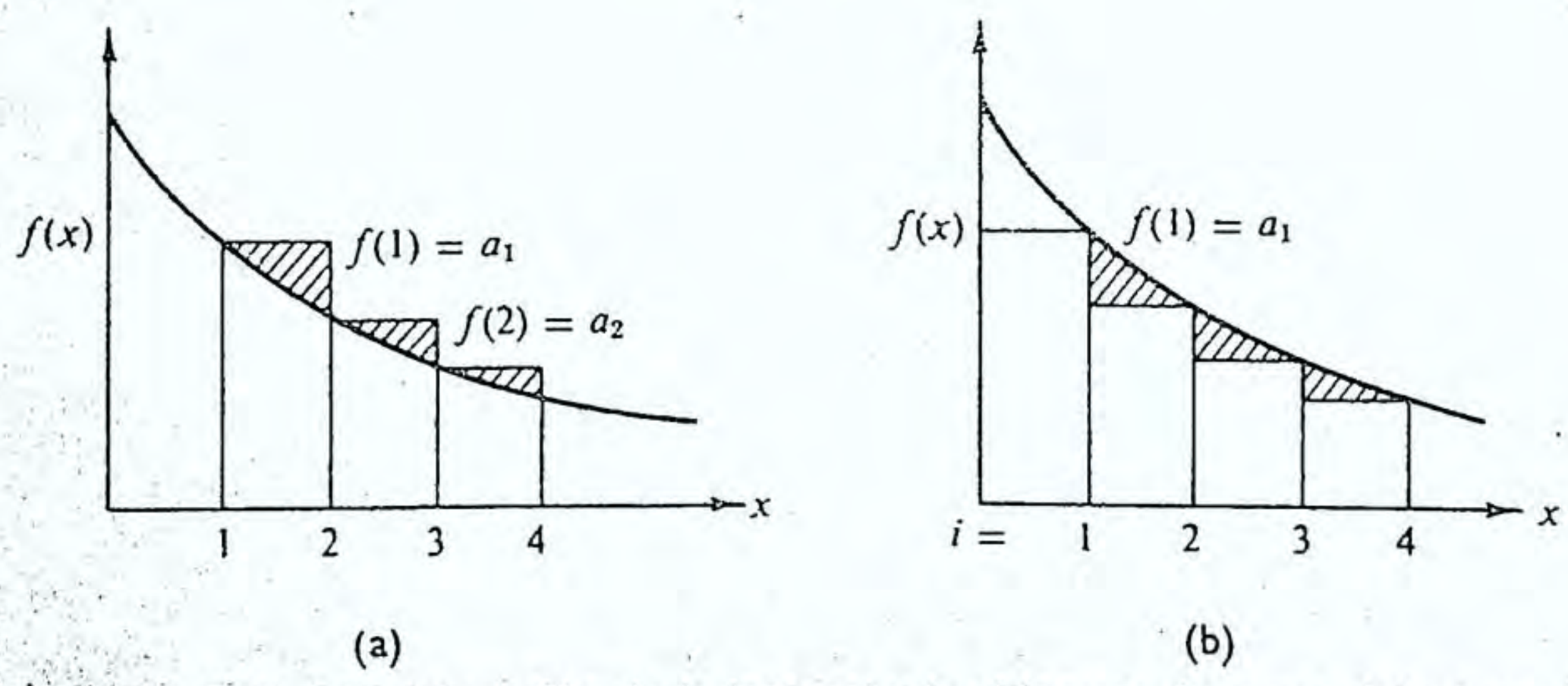


Fig. 5.1(a) Comparación de la integral y los bloques de suma delanteros. (b) Comparación de la integral y los bloques de suma posteriores

EJEMPLO 5.2.3

La función zeta de Riemann está definida por

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}. \tag{5.26}$$

Consideramos $f(x) = x^{-p}$ y luego

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}, \qquad p \neq 1$$

$$= \ln x \Big|_1^{x}, \qquad p = 1. \tag{5.27}$$

La integral, y consecuentemente la serie, es divergente para $p \leqslant 1$, convergente para $p > 1$. Incidentalmente, esto es una prueba independiente de que la serie armónica ($p = 1$) es divergente y que diverge logarítmicamente. La suma del primer millón de términos $\sum^{1\,000\,000} n^{-1}$, es de tan solo 14.392 726...

Esta comparación de integral también puede utilizarse para establecer un límite superior a la constante de Euler-Mascheroni[1] definida por

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{m=1}^{n} m^{-1} - \ln n \right). \tag{5.28}$$

Regresando a las sumas parciales,

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} m^{-1} - \ln n < \int_1^n \frac{dx}{x} - \ln n + 1. \tag{5.29}$$

Evaluando la integral en el lado derecho, $s_n < 1$ para todas las n y consecuentemente $\gamma < 1$. De hecho, la constante de Euler-Mascheroni es 0.577 215 66...

Prueba de Kummer. Esta es la primera, de tres pruebas, que son algo más dificultosas de aplicar que las anteriores. Su importancia radica en su poderío y sensibilidad. Frecuentemente, al menos una de las tres, funciona cuando las pruebas más simples y fáciles no son decisivas. Sin embargo, es de recordarse que estas pruebas, del mismo modo que las anteriormente descritas, se basan finalmente en comparaciones. Podemos demostrar que no existe una serie convergente que sea la más lentamente convergente y que tampoco existe una serie divergente que sea las más lentamente divergente. Esto significa que todas las pruebas de convergencia mencionadas aquí, incluyendo la prueba de Kummer, pueden fallar en ocasiones.

Consideremos una serie de términos positivos u_i y una secuencia de constantes positivas finitas a_i. Si

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant C > 0 \tag{5.30}$$

para todas las $n \geqslant N$, algún número fijo,[2] entonces $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ converge. Si

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0 \tag{5.31}$$

y $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1}$ diverge, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ diverge.

[1] Esto corresponde a la notación del "Handbook of Mathematical Functions". National Bureau of Standars, Applied Mathematics Series-55 (*AMS*-55).

[2] Con u_m finita, la suma parcial s_N siempre será finita para N finita. La convergencia o divergencia de una serie depende del comportamiento de los últimos términos infinitos y *no* de los primeros términos N.

La demostración de esta prueba poderosa es notablemente simple. De la Ec. 5.30, con C una constante positiva cualquiera,

$$\begin{aligned} Cu_{N+1} &\leqslant a_N u_N - a_{N+1}u_{N+1} \\ Cu_{N+2} &\leqslant a_{N+1}u_{N+1} - a_{N+2}u_{N+2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Cu_n &\leqslant a_{n-1}u_{n-1} - a_n u_n \end{aligned} \tag{5.32}$$

Sumando y dividiendo por C, $(C \neq 0)$,

$$\sum_{i=N+1}^{n} u_i \leqslant \frac{a_N u_N}{C} - \frac{a_n u_n}{C}. \tag{5.33}$$

En consecuencia, la suma parcial, s_n,

$$\begin{aligned} s_n &\leqslant \sum_{i=1}^{N} u_i + \frac{a_N u_N}{C} - \frac{a_n u_n}{C} \\ &< \sum_{i=1}^{N} u_i + \frac{a_N u_N}{C}, \qquad \text{una constante, independiente de } n. \end{aligned} \tag{5.34}$$

En consecuencia, las sumas parciales tienen un enlace superior. Con cero como límite inferior evidente, la serie $\sum_i u_i$ debe ser convergente.

La divergencia se muestra como sigue. De la Ec. 5. 31

$$a_n u_n \geqslant a_{n-1}u_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_N u_N. \tag{5.35}$$

Siendo así,

$$u_n \geqslant \frac{a_N u_N}{a_n} \tag{5.36}$$

y

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} u_i \geqslant a_N u_N \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i^{-1}. \tag{5.37}$$

Mediante la prueba de comparación, $\sum_i u_i$ diverge.

Las Ecs. 5.30 y 5.31 frecuentemente se indican en la forma de límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = C. \tag{5.38}$$

Siendo así, para $C > 0$ se tiene la convergencia, mientras que para $C < 0$ (y $\sum_i a_i^{-1}$ divergente) se tiene la divergencia. Probablemente es de utilidad mostrar la equivalencia entre la Ec. 5.38 y las Ecs. 5.30 y 5.31 y demostrar por qué la indeterminancia se hace aparente cuando el límite $C = 0$. De acuerdo con la definición de límite

$$\left| a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} - C \right| < \varepsilon \tag{5.39}$$

para todas las $n \geqslant N$ y para todas las $\varepsilon > 0$, independientemente de qué tan pequeña sea ε. Cuando los signos de valor absoluto se eliminan

$$C - \varepsilon < a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < C + \varepsilon. \tag{5.40}$$

Ahora bien, si $C > 0$, la Ec. 5.30 se deriva de ε lo suficientemente pequeña. Por otra parte, si $C < 0$, se deriva la Ec. 5.31. Sin embargo, cuando $C = 0$, el término central $a_n(u_n/u_{n+1}) - a_{n+1}$ puede ser positivo o negativo y la prueba falla. El principal uso de la prueba de Kummer consiste en demostrar otras pruebas tales como la de Raabe (cf. también el Ejercicio 5.2.3).

Si las constantes positivas a_n de la prueba de Kummer se seleccionan de modo que $a_n = n$, se tiene la prueba de Raabe.

Prueba de Raabe. Si $u_n > 0$ y si

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant P > 1 \tag{5.41}$$

para todas las $n \geqslant N$, en donde N es un número positivo entero independiente de n, entonces $\sum_i u_i$ converge. Si

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1, \tag{5.42}$$

entonces $\sum_i u_i$ diverge.

La forma de límite para la prueba de Raabe es

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = P. \tag{5.43}$$

Se tiene la convergencia para $P > 1$, la divergencia para $P < 1$, y no hay prueba para $P = 1$ exactamente como en el caso de la prueba de Kummer. Esta indeterminancia queda establecida por el Ejercicio 5.2.4, en el cual se presenta una serie convergente y una serie divergente, en que ambas series dan lugar a $P = 1$ en la Ec. 5.43.

La prueba de Raabe es más sensible que la prueba de la relación de D'Alembert debido a que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ diverge más lentamente que $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. Se puede obtener una prueba aún más sensible (y una que es relativamente fácil de aplicar) al seleccionar $a_n = n \ln n$. Esta constituye la prueba de Gauss.

Prueba de Gauss. Si $u_n > 0$ para todas las n finitas y

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2}, \tag{5.44}$$

en donde $B(n)$ es una función limitada de n para $n \to \infty$, de modo que $\sum_i u_i$ converge para $h > 1$ y diverge para $h \leqslant 1$.

Esta es una prueba extremadamente sensible para determinar la convergencia de una serie. Puede aplicarse a todas las series que el físico

probablemente pudiera encontrar. Para $h > 1$ o $h < 1$ la demostración se deriva directamente de la prueba de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty}\left[h + \frac{B(n)}{n}\right]$$
$$= h. \tag{5.45}$$

Si $h = 1$, la prueba de Raabe falla. Sin embargo, si regresamos a la prueba de Kummer y utilizamos $a_n = n \ln n$, la Ec. 5.38 da lugar a

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n \ln n\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{B(n)}{n^2}\right] - (n+1)\ln(n+1)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[n \ln n \cdot \frac{(n+1)}{n} - (n+1)\ln(n+1)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)\left[\ln n - \ln n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]. \tag{5.46}$$

Tomando prestado un resultado de la Sección 5.6 (que no depende de la prueba de Gauss), se tiene

$$\lim_{n\to\infty} -(n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} -(n+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\cdots\right)$$
$$= -1 < 0. \tag{5.47}$$

En consecuencia, se tiene divergencia para $h = 1$. Esto es un ejemplo del éxito de la aplicación de la prueba de Kummer en que la prueba de Raabe ha fallado.

EJEMPLO 5.2.4

La relación de recurrencia para la solución en serie de la ecuación de Legendre (Sección 8.4) puede indicarse en la forma

$$\frac{a_{2j+2}}{a_{2j}} = \frac{2j(2j+1) - l(l+1)}{(2j+1)(2j+2)}. \tag{5.48}$$

Esto es equivalente a u_{2j+2}/u_{2j} para $x = +1$. Para $j \gg l$,[1]

$$\frac{u_{2j}}{u_{2j+2}} \to \frac{(2j+1)(2j+2)}{2j(2j+1)} = \frac{2j+2}{2j}$$
$$= 1 + \frac{1}{j}. \tag{5.49}$$

[1] La dependencia de n interviene en $B(n)$ pero no altera a h.

Mediante la Ec. 5.44 la serie es divergente. Posteriormente habremos de requerir que la serie de Legendre sea finita en $x = 1$. Eliminaremos la divergencia al establecer el parámetro $n = 2j_0$, un número entero par.

Toda esta sección hasta ahora ha estado relacionada con el establecimiento de la convergencia a modo de una propiedad matemática abstracta. En la práctica, la *tasa* de convergencia puede ser de extrema importancia. Por ejemplo, pudiéramos desear establecer el límite de convergencia. Un método de aumentar la *tasa* de convergencia ha sido proporcionado por Kummer. Si se tiene una serie S (lentamente convergente) y una serie conocida S', se puede indicar

$$S = S' + (S - S').$$

La peculiaridad de esta readaptación de razonamiento simple consiste en que, mediante la selección adecuada de S', la nueva serie $(S - S')$ puede converger con *mayor rapidez* que la S original.

EJEMPLO 5.2.5

Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$. En la Sección 5.9, esto ha sido identificado como $\zeta(3)$. Seleccione

$$S' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{4}.$$

El valor numérico de S' se deriva del desarrollo del Ejercicio 5.1.2. Siendo así

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} = \frac{1}{4} + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^3 - n} \right) \tag{5.50}$$

$$= \frac{5}{4} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3(n^2 - 1)},$$

que converge como n^{-5}, evidentemente con mayor rapidez que la n^{-3} original.

Para los problemas en la aproximación numérica de una serie, el método del límite de Kummer puede ser, seguramente, de bastante utilidad.

EJERCICIOS

5.2.1 (a) Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n \to A < \infty; \qquad p > 1,$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

(b) Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = A > 0$$

la serie diverge. (La prueba falla para $A = 0$.)

Estas dos pruebas, conocidas como pruebas de límite, frecuentemente son convenientes para establecer la convergencia o divergencia de una serie. Se pueden tratar como pruebas de comparación, comparando con

$$\sum n^{-q}, \qquad 1 \leqslant q < p.$$

5.2.2 Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = K,$$

una constante con $0 < K < \infty$, demuestre que $\sum b_n$ converge o diverge con $\sum a_n$.
Sugerencia: Si $\sum a_n$ converge, utilice

$$b'_n = \frac{1}{2K} b_n .$$

Si $\sum a_n$ diverge, utilice

$$b''_n = \frac{2}{K} b_n .$$

5.2.3 Demuestre que la prueba completa de la relación de D'Alembert se deriva directamente de la prueba de Kummer con $a_i = 1$.

5.2.4 Demuestre que la prueba de Raabe es indecisiva para $P = 1$ al establecer que $P = 1$ para la serie

(a) $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$ y que la serie diverge.

(b) $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ y que la serie converge.

5.2.5 La prueba de Gauss frecuentemente se proporciona en la forma de una prueba de la relación

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2 + a_1 n + a_0}{n^2 + b_1 n + b_0}.$$

¿Para qué valores de los parámetros a_1 y b_1 se tiene convergencia? ¿Divergencia?

5.2.6 Ensaye en cuanto a convergencia

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-1}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1)]^{-1/2}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

5.2.7 Ensaye en cuanto a convergencia

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n^{1/n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

5.2.8 ¿Para qué valores de p y q converge la siguiente serie?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q},$$

Respuesta. Convergencia para $\begin{cases} p > 1, & \text{todas las } q, \\ p = 1, & q > 1, \end{cases}$

divergencia para $\begin{cases} p < 1, & \text{todas las } q, \\ p = 1, & q \leqslant 1. \end{cases}$

5.2.9 Determine el intervalo de convergencia para la serie hipergeométrica de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots.$$

Sugerencia: Gauss desarrolló su prueba para el propósito específico de establecer la convergencia de esta serie.

Respuesta. Convergente para $-1 < x < 1$ y para $x = \pm 1$ si $\gamma > \alpha + \beta$.

5.2.10 Un cálculo de computadora simple proporciona

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-3} = 1.202\,007.$$

demuestre que

$$1.202\,056 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \leqslant 1.202\,057.$$

Sugerencia: Utilice las integrales para establecer los límites superior e inferior en $\sum_{n=101}^{\infty} n^{-3}$.

Comentario. Un valor más exacto para la suma $\sum_1^{\infty} n^{-3}$ es 1.202 056 903...

5.2.11 Establezca los límites superior e inferior en $\sum_{n=1}^{1\,000\,000} n^{-1}$, suponiendo que (a) la constante de Euler-Mascheroni es conocida.

Respuesta. $14.392\,726 < \sum_{n=1}^{1\,000\,000} n^{-1} < 14.392\,727.$

(b) La constante de Euler-Mascheroni es desconocida.

5.2.12 Dada $\sum_{n=1}^{1\,000} n^{-1} = 7.485\,470\cdots$, establezca los límites superior e inferior en la constante de Euler-Mascheroni.

Respuesta. $0.5767 < \gamma < 0.5778.$

5.2.13 (De la paradoja de Olbers.) Suponga un universo estático en que las estrellas están distribuidas uniformemente. Divida el espacio en cubiertas de espesor constante; las estrellas en cualquiera de las cubiertas, por sí mismas, subtienden un ángulo sólido de ω_0. *Permitiendo el siluetaje de las estrellas distantes por las estrellas cercanas,* demuestre que el ángulo sólido neto total subtendido por todas las estrellas, en que las cubiertas se extienden al infinito, es exactamente 4π. (En consecuencia, el cielo nocturno debería ser definitivamente luminoso.)

5.2.14 Ensaye en cuanto a convergencia $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right]^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{64} + \frac{25}{256} + \cdots$

5.2.15 La serie de Legendre $\sum_{j \text{ par}} u_j(x)$ satisface las relaciones de recurrencia

$$u_{j+2}(x) = \frac{(j+1)(j+2) - l(l+1)}{(j+2)(j+3)} x^2 u_j(x)$$

en donde el índice j es par y l es alguna constante (pero, en este problema, *no* corresponde a un integro non, no negativo). Encuentre el intervalo de valores de x para los cuales esta serie de Legendre es convergente. Ensaye cuidadosamente los puntos finales.

Respuesta. $-1 < x < 1$.

5.2.16 Una solución en forma de serie (Sección 8.4) de la ecuación de Chebyshev origina términos sucesivos que tienen la relación

$$\frac{u_{j+2}(x)}{u_j(x)} = \frac{(k+j)^2 - n^2}{(k+j+1)(k+j+2)} x^2.$$

con $k = 0$ y $k = 1$. Ensaye en cuanto a convergencia en $x = \pm 1$.

Respuesta. Convergente.

5.2.17 Una solución en forma de serie para la función ultraesférica (Gegenbauer) $C_n^\alpha(x)$ origina la relación de recurrencia

$$a_{j+2} = a_j \frac{(k+j)(k+j+2\alpha) - n(n+2\alpha)}{(k+j+1)(k+j+2)}.$$

Investigue la convergencia de cada una de estas series en $x = \pm 1$ como función del parámetro α.

Respuesta. Convergente para $\alpha < \frac{1}{2}$.
divergente para $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

5.2.18 Un desarrollo en serie de la función beta incompleta (Sección 10.4) proporciona

$$B_x(p,q) = x^p \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1-q}{p+1} x + \frac{(1-q)(2-q)}{2!(p+2)} x^2 + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(1-q)(2-q)\cdots(n-q)}{n!(p+n)} x^n + \cdots \right\}.$$

Considerando que $0 \leqslant x \leqslant 1$, $p > 0$, y $q > 0$, ensaye la serie en cuanto a convergencia. ¿Qué sucede en $x = 1$?

5.2.19 Demuestre que la siguiente serie es convergente.

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!(2s+1)}$$

[*Nota.* $(2s-1)!! = (2s-1)(2s-3)\cdots 3 \cdot 1$ con $(-1)!! = 1$. $(2s)!! = (2s)(2s-2)\cdots 4 \cdot 2$ con $0!! = 1$. La serie aparece como un desarrollo en serie de $\operatorname{sen}^{-1}(1)$ y equivale a $\pi/2$.]

5.3 Serie Alternante

En la Sección 5.2 nos hemos limitado a las series de términos positivos. Ahora, en contraste, procederemos a considerar las series infinitas en que los signos son alternados. La cancelación parcial debida a los signos alter-

nantes hace que la convergencia sea más rápida y más fácil de identificar. Demostraremos el criterio de Leibnitz, una condición general para la convergencia de una serie alternante.

Criterio de Leibnitz. Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ con $a_n > 0$. Si a_n decrece monotónicamente (para n lo suficientemente grande) y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie converge.

Para demostrar esto, examinamos las sumas parciales pares

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n}, \\ s_{2n+2} &= s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Ya que $a_{2n+1} > a_{2n+2}$, se tiene

$$s_{2n+2} > s_{2n}. \tag{5.52}$$

Por otra parte,

$$s_{2n+2} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - a_{2n+2}. \tag{5.53}$$

En consecuencia, cada par de términos $a_{2p} - a_{2p+1} > 0$,

$$s_{2n+2} < a_1. \tag{5.54}$$

Con las sumas parciales pares limitadas $s_{2n} < s_{2n+2} < a_1$ y los términos a_n disminuyendo monotónicamente y aproximándose a cero, esta serie alternante converge.

Un resultado de importancia se puede extraer de las sumas parciales. A partir de la diferencia entre el límite de la serie S y la suma parcial s_n

$$\begin{aligned} S - s_n &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \end{aligned} \tag{5.55}$$

o

$$S - s_n < a_{n+1}. \tag{5.56}$$

La Ec. 5.66 indica que el error de cortar una serie alternante después de n términos es menor que a_{n+1}, el primer término desechado. El conocimiento del error obtenido, en esta forma, puede ser de gran importancia práctica.

Convergencia Absoluta. Dada una serie de términos u_n, en donde u_n puede variar de signo, si $\sum |u_n|$ converge, entonces se dice que $\sum u_n$ es absolutamente convergente. Si $\sum u_n$ converge, pero $\sum |u_n|$ diverge, la convergencia se denomina condicional.

La serie armónica alternante es un ejemplo simple de esta convergencia condicional. Se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \cdots, \tag{5.57}$$

convergente de acuerdo con el criterio de Leibnitz; pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{5.58}$$

se ha demostrado que es divergente en las Secciones 5.1 y 5.2.

El lector podrá notar que todas las pruebas desarrolladas en la Sección 5.2 suponen una serie de términos positivos. En consecuencia, todas las pruebas en esta sección garantizan la convergencia absoluta.

EJERCICIOS

5.3.1 (a) A partir del problema de dos hemisferios electrostáticos (Ejercicio 12.3.14) se obtiene la serie

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) \frac{(2s-1)!!}{(2s+2)!!}.$$

Ensaye en cuanto a convergencia.

(b) La serie correspondiente para la densidad de carga superficial es

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}.$$

Ensaye en cuanto a convergencia. La notación !! se explica en la Sección 10.1.

5.3.2 Demuestre mediante el cómputo numérico directo que la suma de los primeros diez términos de

$$\lim_{x \to 1} \ln(1+x) = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1}$$

difiere de ln 2 en menos que el onceavo término: $\ln 2 = 0.69314\ 71806 \cdots$.

5.3.3 En el Ejercicio 5.2.9 se demuestra que la serie hipergeométrica es convergente para $x = \pm 1$, si $\gamma > \alpha + \beta$. Demuestre que se tiene una convergencia condicional para $x = -1$ para γ considerando hasta $\gamma > \alpha + \beta - 1$.
Sugerencia: El comportamiento asintótico de la función factorial está definido por la serie de Stirling, Sección 10.3.

5.4 Algebra de las Series

El establecimiento de la convergencia absoluta es importante porque puede demostrar la serie absolutamente convergente, además de su manejo, de acuerdo con las reglas ordinarias ya conocidas del álgebra o la aritmética.

1. Si una serie infinita es absolutamente convergente, la suma de serie es independiente del orden en que se agreguen los términos.

2. La serie puede multiplicarse con otra serie absolutamente convergente. El límite del producto será el producto de los límites de serie individuales. La serie de producto, una serie doble, también tendrá convergencia absoluta.

No pueden aplicarse las mismas garantías para la serie convergente condicional. Nuevamente, considere la serie armónica alternante. Si indicamos

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots = 1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - \cdots, \tag{5.59}$$

es evidente que la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} < 1. \tag{5.60}$$

Sin embargo, al readaptar ligeramente los términos, se puede lograr que la serie armónica alternante converja a $\frac{3}{2}$. Reagrupamos los términos de la Ec. 5.59

$$\begin{aligned}&(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}) - (\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15}) - (\tfrac{1}{4})\\ &+ (\tfrac{1}{17} + \cdots + \tfrac{1}{25}) - (\tfrac{1}{6}) + (\tfrac{1}{27} + \cdots + \tfrac{1}{35}) - (\tfrac{1}{8}) + \cdots.\end{aligned} \tag{5.61}$$

Tratando los términos agrupados en paréntesis como términos simples, por conveniencia, se obtienen las sumas parciales

$s_1 = 1.5333$	$s_2 = 1.0333$
$s_3 = 1.5218$	$s_4 = 1.2718$
$s_5 = 1.5143$	$s_6 = 1.3476$
$s_7 = 1.5103$	$s_8 = 1.3853$
$s_9 = 1.5078$	$s_{10} = 1.4078$

A partir de esta tabulación de s_n y la gráfica de en función de n en la Fig. 5.2, es bastante evidente la convergencia a $\frac{3}{2}$. Hemos readaptado los términos, considerándolos positivos hasta que la suma parcial es igual o mayor que agregando luego los negativos hasta que la suma parcial quede ligeramente abajo de $\frac{3}{2}$, y así sucesivamente. A medida que la serie se extiende hasta el infinito, todos los términos originales aparecen eventualmente, pero las sumas parciales de esta serie armónica alternante readaptada convergen a $\frac{3}{2}$.

Mediante una readaptación adecuada de términos, una serie convergente condicional puede hacerse convergente en cualquier valor deseado, aunque sea divergente. Este enunciado se establece, por ocasiones, en el

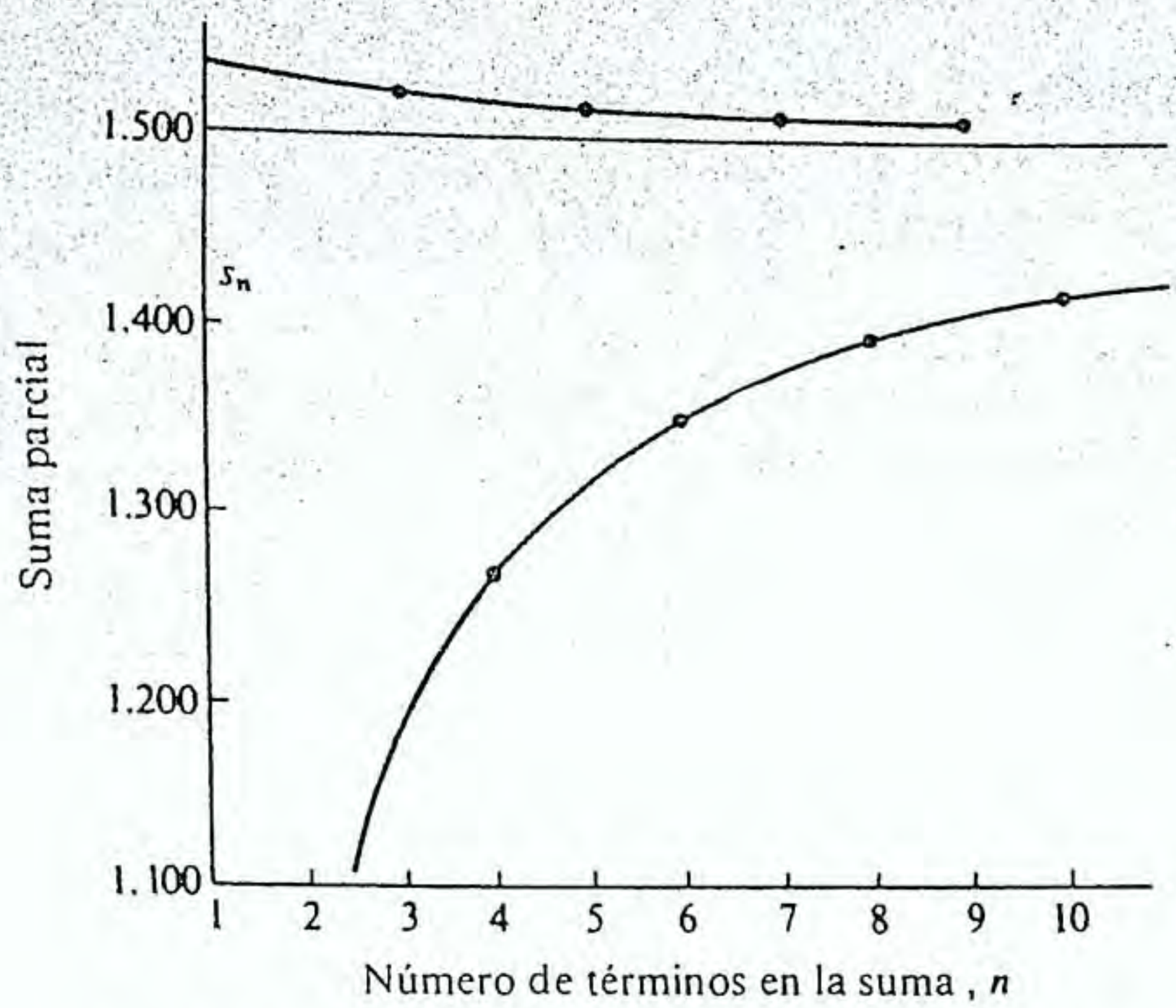


Fig. 5.2 Serie armónica alternante. Términos readaptados para lograr la convergencia en 1.5

teorema de Riemann. Por evidencia, la serie convergente condicional debe tratarse con precaución.

Otro aspecto de la readaptación de las series aparece en el tratamiento de las series dobles

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}.$$

Procedamos a sustituir

$$n = q \geqslant 0,$$
$$m = p - q \geqslant 0$$
$$(q \leqslant p).$$

Esto resulta en la identidad

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} a_{q,p-q} \tag{5.62}$$

La sustitución

$$n = s \geqslant 0,$$
$$m = r - 2s \geqslant 0$$
$$\left(s \leqslant \frac{r}{2}\right),$$

origina

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s,r-2s} \tag{5.63}$$

	$m=0$	1	2	3
$n=0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Fig. 5.3 Serie doble. Suma sobre n indicada por medio de las líneas descontinuas verticales

	$p=0$	1	2	3
$q=0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}
1		a_{10}	a_{11}	a_{12}
2			a_{20}	a_{21}
3				a_{30}

Fig. 5.4 Serie doble. Nuevamente la primera suma se representa por medio de líneas discontinuas verticales, pero estas líneas verticales corresponden a las diagonales en la Fig. 5.3

	$r=0$	1	2	3	4
$s=0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}
1			a_{10}	a_{11}	a_{12}
2					a_{20}

Fig. 5.5 Serie doble. La suma con respecto a s corresponde a la suma a lo largo de las líneas inclinadas casi horizontales en la Fig. 5.3

con $[r/2] = r/2$ para r par, $(r-1)/2$ para r impar. Las Ecs. 5.62 y 5.63 se representan en la Fig. 5.3.

Las Ecs. 5.62 y 5.63 son claras readaptaciones de la hilera de los coeficientes a_{nm}, mismas que son válidas, mientras se tenga la convergencia absoluta.

La combinación de las Ecs. 5.62 y 5.63

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} a_{q,p-q} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s,r-2s}, \tag{5.64}$$

se utiliza en la Sección 12.1 para determinar la forma de serie de los polinomios de Legendre.

EJERCICIOS

5.4.1 Considerando la serie

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots, \qquad -1 < x \leq 1,$$

demuestre que

$$\text{(a)} \ \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots, \qquad -1 \leqslant x < 1.$$

$$\text{(b)} \ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \qquad -1 < x < 1.$$

La serie original, $\ln(1+x)$, aparece en el análisis de la energía de unión de los cristales. Corresponde a $\frac{1}{2}$ de la constante de Madelung ($2 \ln 2$) para una cadena de átomos. La segunda serie (b) es útil para normalizar los polinomios de Legendre (Sección 12.3) y en el desarrollo de una segunda solución para la ecuación diferencial de Legendre (Sección 12.10).

5.5 Series de Funciones

Extenderemos nuestro concepto de serie infinita para incluir la posibilidad de que cada término u_n pueda ser una función de alguna variable, $u_n = u_n(x)$. Las sumas parciales, entonces, se transforman en funciones de la variable x

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x), \tag{5.65}$$

tal como lo hace la suma de serie, definida como el límite de las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x). \tag{5.66}$$

Hasta ahora, hemos estado intersados en el comportamiento de las sumas parciales como una función de n. Ahora, procederemos a considerar la forma en que las cantidades anteriores dependen de x. El concepto clave en este caso se relaciona con la convergencia uniforme.

Convergencia Uniforme. Si para cualquier valor pequeño de $\varepsilon > 0$ existe un número N *independiene de* x en el intervalo $[a, b]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ tal que

$$|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para toda } n \geqslant N, \tag{5.67}$$

se dice que la serie es convergente uniformemente en el intervalo $[a, b]$. Esto indica que para que la serie sea uniformemente convergente debe encontrarse una N finita, para que la cola de la serie infinita $|\sum_{i=N+1}^{\infty} u_i(x)|$, sea menor que un valor arbitrariamente pequeño de ε para todas las x en el intervalo considerado.

Esta condición, Ec. 5.67, que define la convergencia uniforme, se ilustra en la Fig. 5.6. Lo importante es que, independientemente de qué tan pequeño se considere ε, siempre se puede seleccionar una n lo bastante grande, de modo, que la magnitud absoluta de la diferencia entre $S(x)$ y $s_n(x)$ sea menor que ε para todas las x, $a \leqslant x \leqslant b$. Si esto no puede lograrse, entonces $\sum u_n(x)$ *no* es uniformemente convergente en $[a, b]$.

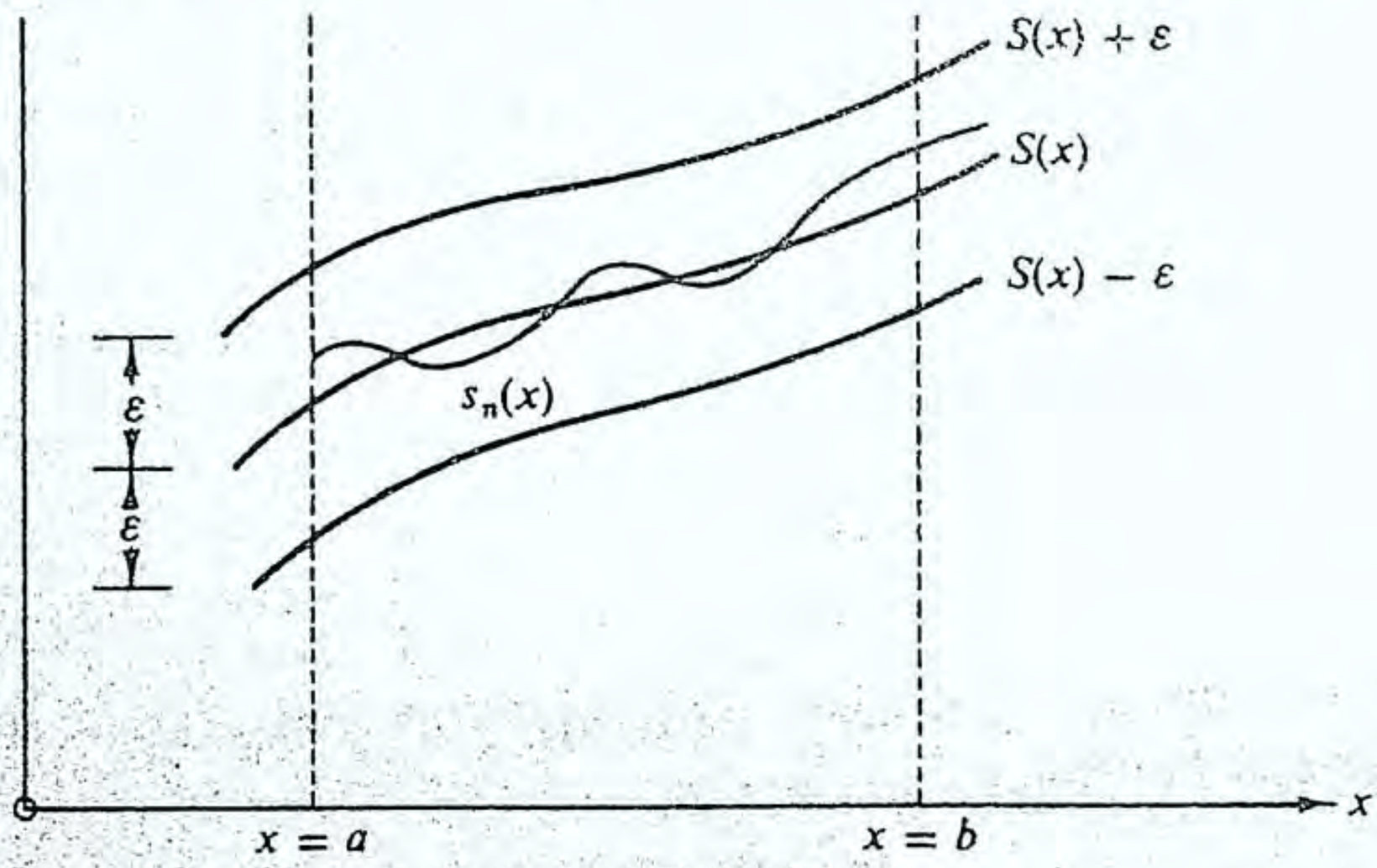


Fig. 5.6 Convergencia uniforme

EJEMPLO 5.5.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]} \tag{5.68}$$

La suma parcial $s_n(x) = nx(nx+1)^{-1}$ puede verificarse por inducción matemática. Mediante el análisis, esta expresión para $s_n(x)$ es consistente para $n = 1, 2$. Suponemos que es consistente para n' términos y luego demostramos que es consistente para $n+1$ términos.

$$s_{n+1}(x) = s_n(x) + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]}$$

$$= \frac{nx}{[nx+1]} + \frac{x}{[nx+1][(n+1)x+1]}$$

$$= \frac{(n+1)x}{(n+1)x+1}$$

completando la demostración.

Permitiendo que n se aproxime al infinito, se obtiene

$$S(0) = \lim_{n\to\infty} s_n(0) = 0,$$

$$S(x \neq 0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x \neq 0) = 1.$$

Se tiene, así, una discontinuidad en el límite de serie en $x = 0$. Sin embargo, $s_n(x)$ es una función continua de x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, para todas las n finitas. La Ec. 5.67 con una ε suficientemente pequeña quedará violada para todas las *n finitas*. Nuestra serie no converge uniformemente.

Prueba M de Weierstrass. La prueba que se encuentra con mayor frecuencia para la convergencia uniforme es la prueba M de Weierstrass. Si se construye una serie de números $\sum_1^\infty M_i$, en donde $M_i \geqslant |u_i(x)|$ para todas las x en el intervalo $[a, b]$ y $\sum_1^\infty M_i$ es convergente, la serie $\sum_1^\infty u_i(x)$ será uniformemente convergente en $[a, b]$.

La demostración de esta prueba M de Weierstrass es directa y simple. Ya que $\sum_i M_i$ converge, existe algún número N tal que $n + 1 \geqslant N$,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i < \varepsilon. \tag{5.69}$$

Esto se deriva de nuestra definición de convergencia. Siendo así, con $|u_i(x)| \leqslant M_i$ para x en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |u_i(x)| < \varepsilon. \tag{5.70}$$

En consecuencia,

$$|S(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)\right| < \varepsilon, \tag{5.71}$$

y por definición $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ es uniformemente convergente en $[a, b]$. Ya que hemos especificado valores absolutos en el establecimiento de la prueba M de Weierstrass, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ también resulta convergente en absoluto.

El lector cuidadoso deberá notar que la convergencia uniforme y la convergencia absoluta son propiedades independientes. Ninguna de ambas implica a la otra. Para ejemplos específicos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{5.72}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln (1 + x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{5.73}$$

convergen uniformemente en los intervalos indicados, pero no convergen absolutamente. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n &= 1, \qquad 0 \leqslant x < 1 \\ &= 0, \qquad x = 1 \end{aligned} \tag{5.74}$$

converge absolutamente pero no converge uniformemente en $[0, 1]$.

De acuerdo con la definición de convergencia uniforme, se puede demostrar que cualquier serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{5.75}$$

no puede converger uniformemente en cualquier intervalo que incluye una discontinuidad de $f(x)$.

Ya que la prueba M de Weierstrass establece la convergencia uniforme y absoluta, necesariamente falla para las series que son de convergencia uniforme pero condicional. Una prueba algo más delicada para la convergencia uniforme ha sido establecida por Abel. Si

$$u_n(x) = a_n f_n(x),$$

$$\sum a_n = A, \quad \text{convergente},$$

y las funciones $f_n(x)$ son monotónicas $[f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)]$ y limitadas, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant M$, para todas las x en $[a, b]$, entonces $\sum u_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$.

Esta prueba es de especial utilidad en el análisis de las series de potencias (cf. Sección 5.7). Los detalles de la demostración de la prueba de Abel y de otras pruebas para la convergencia uniforme se proporcionan en las referencias incluidas al final de este capítulo.

Las series uniformemente convergentes tienen tres propiedades útiles:

1. Si los términos individuales $u_n(x)$ son continuos, la suma de serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{5.76}$$

también es continua.

2. Si los términos individuales $u_n(x)$ son continuos, la serie se puede integrar término por término. La suma de las integrales es igual a la integral de la suma.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx. \tag{5.77}$$

3. La derivada de una suma de serie $f(x)$ es igual a la suma de las derivadas de términos individuales.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x), \tag{5.78}$$

considerando que se satisfacen las siguientes condiciones.

$$u_n(x) \quad \text{y} \quad \frac{du_n(x)}{dx} \quad \text{y son continuas en } [a, b].$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx} \quad \text{es uniformemente convergente en } [a, b].$$

La integración término por término de una serie uniformemente convergente[1] requiere solo de la continuidad de los términos individuales. Esta condición casi siempre se satisface en las aplicaciones físicas. La diferenciación término por término de una serie, con frecuencia, no es válida, debido a que deben satisfacerse otras condiciones de restricción. De hecho, nos encontraremos con casos en el Capítulo 14, Series de Fourier, en donde la diferenciación término por término de una serie uniformemente convergente origina una serie divergente.

EJERCICIOS

5.5.1 Encuentre el intervalo de convergencia *uniforme* de

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Respuesta. (a) $1 \leqslant x < \infty$.
(b) $1 < s \leqslant x < \infty$.

5.5.2 ¿Para qué intervalo de x es uniformemente convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$?

Respuesta. $-1 < -s \leqslant x \leqslant s < 1$

[1] La integración término por término también *puede* ser válida en ausencia de la convergencia uniforme.

5.5.3 ¿Para qué intervalo de valores positivos de x es $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(1+x^n)$?

(a) ¿Convergencia? (b) ¿Uniformemente convergente?

5.5.4 Si la serie de coeficientes $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes, demuestre que la serie de Fourier

$$\sum (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

es *uniformemente* convergente para $-\infty < x < \infty$.

5.6 Desarrollo de Taylor

Este es un desarrollo de una función a una serie infinita o una serie finita más un término remanente. Los coeficientes de los términos sucesivos de la serie involucran las derivadas sucesivas de una función. Ya hemos utilizado el desarrollo de Taylor en el establecimiento de la interpretación física de la divergencia (Sección 1.7) y en otras secciones de los Capítulos 1 y 2. Ahora, procederemos a derivar el desarrollo de Taylor.

Supondremos que nuestra función $f(x)$ tiene una derivada n continua[1] en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Así, al integrar la derivada enésima n veces

$$\int_a^x f^{(n)}(x)\,dx = f^{(n-1)}(x)\Big|_a^x = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)$$

$$\int_a^x \left(\int_a^x f^{(n)}(x)\,dx \right) dx = \int_a^x [f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)]\,dx \tag{5.79}$$

$$= f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a) f^{(n-1)}(a).$$

Continuando, se obtiene

$$\iiint_a^x f^{(n)}(x)\,(dx)^3 = f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(a) - (x-a) f^{(n-2)}(a)$$

$$- \frac{(x-a)^2}{2} f^{(n-1)}(a). \tag{5.80}$$

Finalmente, al integrar por enésima vez

$$\int_a^x \cdots \int f^{(n)}(x)\,(dx)^n = f(x) - f(a) - (x-a) f'(a)$$

$$- \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \cdots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a). \tag{5.81}$$

[1] El desarrollo de Taylor se puede derivar bajo condiciones ligeramente menos limitadas, cf. *Methods of Mathematical Physics*, Jeffreys y Jeffreys, Sección 1.133.

Observe que esta expresión es exacta. No se ha desechado ningún término y tampoco se ha establecido ninguna aproximación. Ahora, resolviendo para $f(x)$ se tiene

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n. \tag{5.82}$$

El remanente, R_n, está determinado por la integral enésima

$$R_n = \int_a^x \cdots \int f^{(n)}(x)\,(dx)^n. \tag{5.83}$$

Este remanente, Ec. 5.83, se puede establecer quizás en una forma más inteligible mediante el uso del teorema de valor medio del cálculo diferencial

$$\int_a^x g(x)\,dx = (x-a)\,g(\xi), \tag{5.84}$$

con $a \leqslant \xi \leqslant x$. Mediante la integración n veces se obtiene la forma Lagrangiana del restante:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi). \tag{5.85}$$

Con el desarrollo de Taylor, en esta forma, no quedamos implicados en ningún asunto de la convergencia de la serie infinita. Esta serie es finita y la única duda se relaciona con la magnitud del remanente.

Cuando la función $f(x)$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0, \tag{5.86}$$

la Ec. 5.82 se transforma en la serie de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).^{1} \end{aligned} \tag{5.87}$$

En el Ejercicio 4.10.1 aparece una forma de operador equivalente de este desarrollo de Taylor.

Teorema de Maclaurin. Si se desarrolla alrededor del origen ($a = 0$), la Ec. 5.87 se conoce como serie de Maclaurin

[1] Observe que $0! = 1$ (cf. Sección 10.1).

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0). \tag{5.88}$$

Una aplicación inmediata de la serie de Maclaurin (o la serie de Taylor) se tiene en el desarrollo de diversas funciones trascendentales a series infinitas.

EJEMPLO 5.6.1

Sea $f(x) = e^x$. Diferenciando

$$f^{(n)}(0) = 1 \tag{5.89}$$

Para todas las n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Siendo así, mediante la ecuación 5.88 se tiene

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{5.90}$$

Este es el desarrollo en serie de la función exponencial. Algunos autores utilizan esta serie para definir la función exponencial.

Aun cuando esta serie es, por evidencia, convergente para todas las x, procederemos a comprobar el término restante, R_n. De acuerdo con la Ec. 5.85, se tiene

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$
$$= \frac{x^n}{n!} e^{\xi}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant x. \tag{5.91}$$

En consecuencia

$$R_n \leqslant \frac{x^n e^x}{n!} \tag{5.92}$$

y

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0 \tag{5.93}$$

para todos los valores *finitos* de x, lo cual indica que este desarrollo de Maclaurin de e^x es válido dentro del intervalo $-\infty < x < \infty$.

EJEMPLO 5.6.2

Sea $f(x) = \ln(1 + x)$. Mediante la diferenciación se obtiene

$$f'(x) = (1 + x)^{-1},$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}. \tag{5.94}$$

El desarrollo de Maclaurin (Ec. 5.88) proporciona

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + R_n$$

$$= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{(x)^p}{p} + R_n. \tag{5.95}$$

En este caso, el remanente está definido por

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant x$$

$$\leqslant \frac{x^n}{n}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1. \tag{5.96}$$

Ahora el remanente se aproxima a cero conforme n se incrementa indefinidamente, considerando que $0 \leqslant x \leqslant 1$.[1] Como serie infinita

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \tag{5.97}$$

la cual converge para $-1 < x \leqslant 1$. El intervalo $-1 < x < 1$ se puede establecer, con facilidad, mediante la prueba de la relación de D'Alembert (Sección 5.2). La convergencia a $x = 1$ se deriva del criterio de Leibnitz (Sección 5.3). En particular, a $x = 1$, se tiene

$$\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1}, \tag{5.98}$$

es decir la serie armónica alternante condicionalmente convergente.

Teorema Binomial. Una segunda aplicación extremadamente importante de los desarrollos de Taylor y Maclaurin es la derivación del teorema binomial para las potencias negativas y/o no integrales.

Sea $f(x) = (1+x)^m$, en que m puede ser negativo y no está limitado a valores integrales. La aplicación directa de la Ec. 5.88 proporciona

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + R_n. \tag{5.99}$$

Para esta función, el remanente es

$$R_n = \frac{x^n}{n!} (1+\xi)^{m-n} \times m(m-1)\cdots(m-n+1) \tag{5.100}$$

[1] Este intervalo puede extenderse fácilmente a $-1 < x \leqslant 1$ pero no a $x = -1$.

Y queda entre 0 y x, $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Ahora, para $n > m$, $(1+\xi)^{m-n}$ es un máximo para $\xi = 0$. En consecuencia,

$$R_n \leqslant \frac{x^n}{n!} \times m(m-1)\cdots(m-n+1). \tag{5.101}$$

Observe que los factores dependientes de m no proporcionan un cero a menos de que m sea un íntegro no negativo; R_n tiende a cero conforme $n \to \infty$ si x se limita al intervalo $0 \leqslant x < 1$.

El desarrollo binomial consecuentemente es

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots. \tag{5.102}$$

En otra notación equivalente

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^m. \tag{5.103}$$

La cantidad $\binom{m}{n}$, que equivale a $m!/n!(m-n)!$ se denomina *coeficiente binomial.* Aun cuando solamente hemos demostrado que el remanente desaparece,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$$

para $0 \leqslant x < 1$, la serie en la Ec. 5.102 de hecho puede demostrarse que es convergente para el intervalo extendido de $-1 < x < 1$.

EJEMPLO 5.6.3

La energía relativística total de una partícula es

$$E = mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{5.104}$$

Compare esta ecuación con la energía cinética clásica, $\frac{1}{2}mv^2$.

Mediante la Ec. 5.102 con $x = -v^2/c^2$ y $m = -\frac{1}{2}$ se tiene

$$E = mc^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^3 + \cdots\right]$$

o

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{16}mv^2 \cdot \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \cdots \tag{5.105}$$

El primer término, mc^2, se identifica como la energía másica restante. Siendo así,

$$E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2} mv^2 \left[1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2} + \frac{5}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \cdots \right]. \tag{5.106}$$

Para la velocidad de la partícula $v \ll c$, la velocidad de la luz, la expresión entre paréntesis se reduce a la unidad y se observa que la porción cinética de la energía relativística total concuerda con el resultado clásico.

Para los polinomios se puede generalizar el desarrollo binomial a

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m},$$

en que la suma incluye todas las combinaciones diferentes de $n_1, n_2, \ldots, n_m$ con $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$. Aquí, n_i y n son integrales. Esta generalización tiene un uso considerable en la mecánica estadística.

Desarrollo de Taylor. Más de una Variable. Si la función f tiene más de una variable independiente, por ejemplo $f = f(x, y)$, el desarrollo de Taylor se transforma en

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(a, b) &+ (x - a)\frac{\partial f}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \\ &+ \frac{1}{3!}\left[(x-a)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3(x-a)^2(y-b)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}\right. \\ &\left. + 3(x-a)(y-b)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} + (y-b)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right] + \cdots, \end{aligned} \tag{5.107}$$

en que todas las derivadas se encuentran evaluadas en el punto (a, b). Utilizando $\alpha_j t = x_j - x_{j0}$, se puede indicar el desarrollo de Taylor para m variables independientes en la forma simbólica

$$f(x_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(x_k)\bigg|_{x_k = x_{k0}} \tag{5.108}$$

Una forma vectorial conveniente es

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathbf{a} \cdot \nabla)^n \psi(\mathbf{r}). \tag{5.109}$$

EJERCICIOS

5.6.1 Demuestre que

$$\text{(a) } \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \text{(b) } \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

En la Sección 6.1, e^{ix} está *definida* por un desarrollo en serie tal que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Esta es la base para la representación polar de cantidades complejas. Como caso especial podremos encontrar, con $x = \pi$,

$$e^{i\pi} = -1.$$

5.6.2 Derive en desarrollo en serie de $\cot x$ en potencias crecientes de x al dividir $\cos x$ entre $\operatorname{sen} x$.

Nota. La serie resultante que se inicia con $1/x$ es de hecho una serie de Laurent (Sección 6.5). Aun cuando las dos series para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son válidas para todas las x, la convergencia de la serie para $\cot x$ está limitada por los ceros del denominador, $\operatorname{sen} x$.

5.6.3 (a) Desarrolle $(1 + x) \ln(1 + x)$ en una serie de Maclaurin. Encuentre los límites en x para la convergencia.

(b) A partir de los resultados de la parte (a) demuestre que

$$\ln 2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Respuesta. (a) $(1 + x)\ln(1 + x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n(n-1)}, \quad -1 < x \leq 1.$

5.6.4 La prueba de Raabe para $\sum (n \ln n)^{-1}$ da lugar a

$$\lim_{n \to \infty} n \left[\frac{(n+1) \ln (n+1)}{n \ln n} - 1 \right].$$

Demuestre que este límite es unitario (lo cual significa que la prueba de Raabe en este caso es indeterminante).

5.6.5 Demuestre mediante el desarrollo en serie que

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} = \coth^{-1} \eta_0, \qquad |\eta_0| > 1.$$

Esta identidad se utiliza para obtener una segunda solución para la ecuación de Legendre (Sección 12.10).

5.6.6 Demuestre que $f(x) = x^{1/2}$ (a) no tiene desarrollo de Maclaurin pero (b) tiene desarrollo de Taylor alrededor de cualquier punto $x_0 \neq 0$. Encuentre el intervalo de convergencia del desarrollo de Taylor alrededor de $x = x_0$.

5.6.7 Sea x una aproximación para un cero de $f(x)$ en Δx, la corrección. Demuestre que al despreciar los términos del orden $(\Delta x)^2$

$$\Delta x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Esta es la fórmula de Newton para encontrar una raíz.

5.6.8 Desarrolle una función $\Phi(x, y, z)$ mediante el desarrollo de Taylor. Evalúe $\bar{\Phi}$, el valor promedio de Φ, promediado sobre un pequeño cubo cuyo lado a se encuentra centrado en el origen y demuestre que la laplaciana de Φ es una medida de la desviación de $\bar{\Phi}$ con respecto a $\Phi(0, 0, 0)$.

5.6.9 La relación de dos funciones que pueden diferenciarse $f(x)$ y $g(x)$ considera la forma indeterminada $0/0$ en $x = x_0$. Utilizando el desarrollo de Taylor demuestre la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.6.10 Con $n > 1$, demuestre que

$$\text{(a)}\ \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) < 0, \qquad \text{(b)}\ \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0.$$

Utilice estas desigualdades para demostrar que el límite que define la constante de Euler-Mascheroni es finito.

5.6.11 Desarrolle $(1 - 2tz + t^2)^{-1/2}$ en potencias de t. Suponga que t es pequeña. Recolecte los coeficientes de t^0, t^1 y t^2.

Respuesta. $a_0 = P_0(z) = 1$,

$a_1 = P_1(z) = z$,

$a_2 = P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$,

en donde $a_n = P_n(z)$, el enésimo polinomio de Legendre.

5.6.12 Utilizando la notación de doble factorial de la Sección 10.1, demuestre que

$$(1 + x)^{-m/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m + 2n - 2)!!}{2^n n!\,(m - 2)!!}\, x^n,$$

para $m = 1, 2, 3, \ldots$

5.6.13 Utilizando los desarrollos compare las tres fórmulas de desplazamiento de Doppler:

$$\text{(a)}\ \nu' = \nu\left(1 \mp \frac{v}{c}\right)^{-1} \quad \text{fuente móvil;} \qquad \text{(c)}\ \nu' = \nu\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \ \text{relativística;}$$

$$\text{(b)}\ \nu' = \nu\left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \ \text{observador móvil;}$$

Observe que la fórmula relativística concuerda con las fórmulas clásicas si los términos del orden v^2/c^2 pueden despreciarse.

5.6.14 En la teoría de la relatividad general, se tienen diversas formas de relacionar (definir) una velocidad de recesión de una galaxia hasta su desplazamiento rojo, δ. El modelo de Milne (relatividad cinemática) proporciona

$$\text{(a)}\quad v_1 = c\,\delta(1 + \tfrac{1}{2}\delta), \qquad \text{(c)}\quad 1 + \delta = \left[\frac{1 + v_3/c}{1 - v_3/c}\right]^{1/2}$$

$$\text{(b)}\quad v_2 = c\,\delta(1 + \tfrac{1}{2}\delta)(1 + \delta)^{-2}$$

1. Demuestre que para $\delta \ll 1$ (y $v_3/c \ll 1$) las tres fórmulas se reducen a $v = c\delta$.
2. Compare las tres velocidades a través de términos del orden δ^2.

5.6.15 La suma relativística w de dos velocidades u y v está definida por

$$\frac{w}{c} = \frac{u/c + v/c}{1 + uv/c^2}.$$

$$\frac{v}{c} = \frac{u}{c} = 1 - \alpha,$$

en donde $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, encuentre w/c en potencias de α a través de términos en α^3.

5.6.16 El desplazamiento x de una partícula de masa en reposo m_0, resultante de una fuerza constante $m_0 g$ a lo largo del eje x es

$$x = \frac{c^2}{g}\left\{\left[1 + \left(g\frac{t}{c}\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\},$$

incluyendo los efectos relativísticos. Encuentre el desplazamiento x a modo de una serie de potencias en el tiempo t. Compare con el resultado clásico

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

5.6.17 Mediante el uso de la teoría relativística de Dirac, la fórmula de estructura fina de la espectroscopia atómica está definida por

$$E = mc^2\left[1 + \frac{\gamma^2}{(s + n - |k|)^2}\right]^{-1/2},$$

donde

$$s = (|k|^2 - \gamma^2)^{1/2}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Desarrolle en potencias de γ^2 a través del orden γ^4. ($\gamma^2 = Ze^2/\hbar c$, en que Z es el número atómico.) Este desarrollo es de utilidad para comparar las predicciones de la teoría electrónica de Dirac con las correspondientes a la teoría electrónica de Schrödinger. Los resultados experimentales apoyan a la teoría de Dirac.

5.6.18 En un choque frontal protón-protón, la relación de la energía cinética en el centro del sistema de masa a la energía cinética incidente es

$$R = \frac{\sqrt{2mc^2(E_k + 2mc^2)} - 2mc^2}{E_k}.$$

Encuentre el valor de esta relación de energías cinéticas para
(a) $E_k \ll mc^2$ (no relativística)
(b) $E_k \gg mc^2$ (extrema relativística).

Respuesta. (a) $\frac{1}{2}$, (b) 0. La última respuesta es cierta clase de ley de retornos disminuyentes para los aceleradores de partícula de alta energía (con blancos estacionarios).

5.6.19 Con los desarrollos binomiales

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n}.$$

Sumando estas dos series $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n = 0$.
Probablemente podamos concordar en que esto no tiene sentido, pero ¿qué es lo que está mal?

5.7 Series de Potencias

La serie de potencias es un tipo especial y extremadamente útil de serie infinita de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.110}$$

en donde los coeficientes a_i son constantes e independientes de x.[1]

Convergencia. La Ec. 5.110 se puede ensayar fácilmente en cuanto a la convergencia, ya sea mediante la prueba de la raíz de Cauchy o la prueba de la relación de D'Alembert (Sección 5.2). Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R^{-1}, \tag{5.111}$$

la serie converge para $-R < x < R$. Este es el intervalo o radio de la convergencia. Ya que la prueba de la raíz o de la relación fallan cuando el límite es unitario, los puntos finales del intervalo requieren de atención especial.

Por ejemplo, si $a_n = n^{-1}$, entonces $R = 1$, de acuerdo con las secciones 5.1, 5.2 y 5.3, la serie converge para $x = -1$ pero diverge para $x = +1$. Si $a_n = n!$, entonces $R = 0$ y la serie diverge para todas las $x \neq 0$.

Convergencia Uniforme y Absoluta. Suponga que nuestra serie de potencias (Ec. 5.110) es convergente para $-R < x < R$; esto será uniforme y en absoluto convergente, para cualquier intervalo *interior*, $-S \leqslant x \leqslant S$, en donde $0 < S < R$.

Esto puede demostrarse directamente por medio de la prueba M de Weierstrass (Sección 5.5) mediante el uso de $M_i = |a_i|\, S^i$.

Continuidad. Ya que cada uno de los términos $u_n(x) = a_n x^n$ es una función continua de x y $f(x) = \sum a_n x^n$ converge uniformemente para $-S \leqslant x \leqslant S$, $f(x)$ debe ser una función continua en el intervalo de la convergencia uniforme.

Este comportamiento es contrastante con el comportamiento notablemente distinto de la Serie de Fourier (Capítulo 14), en que dicha serie se utiliza frecuentemente para representar las funciones discontinuas, tales como las ondas de dientes de sierra y cuadradas.

Diferenciación e Integración. Siendo $u_n(x)$ continua y $\sum a_n x^n$ uniformemente convergente, se encuentra que la serie diferenciada es una serie de potencias con funciones continuas y el mismo radio de convergencia que la serie original. Los nuevos factores introducidos mediante la diferenciación (o la integración) no afectan la prueba de la raíz o de la relación. En consecuencia, nuestra serie de potencias puede diferenciarse o in-

[1] La Ec. 5.110 puede volver a establecerse con $z = x + iy$ sustituyendo a x. Las siguientes secciones proporcionan luego la convergencia uniforme, la integrabilidad y la diferenciabilidad en una región de un plano complejo en lugar de un intervalo en el eje x.

tegrarse tan frecuentemente como se requiera dentro del intervalo de la convergencia uniforme (Ejercicio 5.7.14).

Tomando en cuenta las restricciones más bien severas impuestas en la diferenciación (Sección 5.5), esto constituye un resultado notable y de gran utilidad.

Teorema de la Unicidad. En la sección anterior, utilizando la serie de Maclaurin, hemos desarrollado e^x y $\ln(1+x)$ a una serie infinita. En los siguientes capítulos, las funciones frecuentemente se representan o probablemente se definen por medio de una serie infinita. Ahora estableceremos que la representación de la serie de potencias es única.

Si

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad -R_a < x < R_a \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad -R_b < x < R_b, \end{aligned} \tag{5.112}$$

con intervalos traslapados de convergencia, incluyendo el origen, de modo que

$$a_n = b_n \tag{5.113}$$

para todas las n; es decir, se suponen dos representaciones de serie de potencias (distintas) y luego se procede para demostrar que las dos son de hecho iguales.

A partir de la Ec. 5.112

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad -R < x < R, \tag{5.114}$$

en donde R es la menor de R_a, R_b. Estableciendo $x = 0$ para eliminar todos los términos, excepto los constantes, se obtiene

$$a_0 = b_0. \tag{5.115}$$

Ahora bien, aprovechando la capacidad de diferenciación de la serie de potencias, se procede a diferenciar la Ec. 5.113 con lo cual se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}. \tag{5.116}$$

Nuevamente establecemos $x = 0$ para aislar los nuevos términos constantes y se encuentra

$$a_1 = b_1. \tag{5.117}$$

Repitiendo este procedimiento n veces, se obtiene

$$a_n = b_n. \tag{5.118}$$

lo cual demuestra que las dos series coinciden. En consecuencia, la presentación de la serie de potencias es única.

Esto constituirá un punto de gran importancia en la Sección 8.4, en que las series de potencias se utilizan para desarrollar soluciones de ecuaciones diferenciales. La unicidad de la serie de potencias aparece frecuentemente en la física teórica. El establecimiento de la teoría de la perturbación en la mecánica cuántica es un ejemplo. La representación de la serie de potencias de funciones frecuentemente es de utilidad para evaluar las formas indeterminadas, particularmente cuando se dificulte aplicar la regla de L'Hospital (Ejercicio 5.7.10).

EJEMPLO 5.7.1

Evalúe

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. \tag{5.119}$$

Sustituyendo cos x por su desarrollo de serie de Maclaurin

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - (1 - x^2/2! + x^4/4! - \cdots)}{x^2} \\ &= \frac{x^2/2! - x^4/4! + \cdots}{x^2} \\ &= 1/2! - x^2/4! + \cdots. \end{aligned}$$

Permitiendo que $x \to 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{5.120}$$

Reversión (Inversión) de las Series de Potencias. Suponga que se tiene la serie

$$\begin{aligned} y - y_0 &= a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \end{aligned} \tag{5.121}$$

Esto proporciona $(y - y_0)$ en términos de $(x - x_0)$. Sin embargo, pudiera ser conveniente tener una expresión explícita de $(x - x_0)$ en términos de $(y - y_0)$.

Podemos resolver la Ec. 5.121 para $x - x_0$ por medio de la reversión (inversión) de la serie. Suponga que

$$x - x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y - y_0)^n, \tag{5.122}$$

en donde b_n debe determinarse en términos de la a_n supuestamente conocida. Un procedimiento tosco, que es perfectamente adecuado para los primeros coeficientes, consiste simplemente en sustituir la Ec. 5.121 en la Ec. 5.122. Mediante la igualación de los coeficientes de $(x - x_0)^n$ en ambos lados de la Ec. 5.122, ya que la serie de potencias es única, se obtiene

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{a_1}, \\
b_2 &= -\frac{a_2}{a_1^3}, \\
b_3 &= \frac{1}{a_1^5}(2a_2^2 - a_1 a_3), \\
b_4 &= \frac{1}{a_1^7}(5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3), \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
\tag{5.123}
$$

Algunos de los coeficientes superiores han sido listados por parte de Dwight.[1] En la Sección 7.3 se desarrolla un procedimiento más general y elegante mediante el uso de las variables complejas.

EJERCICIOS

5.7.1 La teoría clásica de Langevin del paramagnetismo origina una expresión para la polarización magnética

$$P(x) = C\left(\frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} - \frac{1}{x}\right).$$

Desarrolle $P(x)$ a modo de una serie de potencias para x pequeña (campos bajos, temperatura alta).

5.7.2 El factor de despolarización L, para un elipsoide oblato, en un campo eléctrico uniforme paralelo al eje de rotación (Sección 12.11) es

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0}(1 + \zeta_0^2)(1 - \zeta_0 \cot^{-1} \zeta_0),$$

en donde ζ_0 define un elipsoide oblato en coordenadas esferoidales oblatas (ξ, ζ, φ). Demuestre que

$$\lim_{\zeta_0 \to \infty} L = \frac{1}{3\varepsilon_0} \quad \text{(esfera)},$$

$$\lim_{\zeta_0 \to 0} L = \frac{1}{\varepsilon_0} \quad \text{(hoja delgada)}.$$

[1] H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*. 4a. ed. Nueva York: Macmillan (1961). (Cf, fórmula No. 50).

5.7.3 El factor de despolarización correspondiente (Ejercicio 5.7.2) para un elipsoide prolato es

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0}(\eta_0^2 - 1)\left(\frac{1}{2}\eta_0 \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - 1\right).$$

Demuestre que

$$\lim_{\eta_0 \to \infty} L = \frac{1}{3\varepsilon_0} \qquad \text{(esfera)},$$

$$\lim_{\eta_0 \to 1} L = 0 \qquad \text{(aguja larga)}.$$

5.7.4 El análisis del modelo de difracción de una abertura circular involucra

$$\int_0^{2\pi} \cos(c \cos \varphi)\, d\varphi.$$

Desarrolle el *integrando* en una serie e integre mediante el uso de

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi\, d\varphi = 0.$$

El resultado es 2π veces la función de Bessel $J_0(c)$.

5.7.5 Se originan neutrones (mediante una reacción nuclear) dentro de una esfera hueca de radio R. Los neutrones recientemente originados se distribuyen con uniformidad sobre el volumen esférico. Suponiendo que todas las direcciones son igualmente probables (isotropía), ¿cuál es la distancia promedio en que se desplaza un neutrón antes de incidir en la superficie de la esfera? Suponga el movimiento en línea recta y sin colisiones.

(a) Demuestre que

$$\bar{r} = \tfrac{3}{2}R \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, k^2\, dk \operatorname{sen} \theta\, d\theta.$$

(b) Desarrolle el *integrando* a modo de una serie e integre para obtener

$$\bar{r} = R\left[1 - 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right].$$

(c) Demuestre que la suma de esta serie infinita es $\frac{1}{12}$, resultando en $\bar{r} = \frac{3}{4}R$. *Sugerencia:* Demuestre que $s_n = \frac{1}{12} - [4(2n+1)(2n+3)]^{-1}$ mediante inducción matemática. Luego, permita que $n \to \infty$.

5.7.6 Teniendo

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

desarrolle el *integrando* en una serie e integre término por término para obtener

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots,$$

lo cual es la fórmula de Leibnitz para π. Compare la convergencia (o la falta de la misma) de la serie de *integrando* y la serie integrada a $x = 1$.

La fórmula de Leibnitz converge de modo tan lento que resulta de poca utilidad para el trabajo numérico; π ha sido computada hasta 100.000 decimales [(D. Shanks y J. W. Wrench, Jr., Mathematics of Computation **16**, 76 (1962)] mediante el uso de una expresión tal como

$$\pi = 24\tan^{-1}\tfrac{1}{8} + 8\tan^{-1}\tfrac{1}{57} + 4\tan^{-1}\tfrac{1}{239},$$

$$\pi = 48\tan^{-1}\tfrac{1}{18} + 32\tan^{-1}\tfrac{1}{57} - 20\tan^{-1}\tfrac{1}{239}.$$

5.7.7 Desarrolle la función factorial incompleta

$$\int_0^x e^{-t}t^n\,dt$$

en una serie de potencias de x con valores pequeños de x. ¿Cuál es el intervalo de convergencia de la serie resultante? ¿Por qué debe especificarse que x sea pequeña?

Respuesta. $\displaystyle\int_0^x e^{-t}t^n\,dt = x^{n+1}\left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{x}{(n+2)} + \frac{x^2}{2!(n+3)} - \cdots \frac{(-1)^p x^p}{p!(n+p+1)} + \cdots\right].$

5.7.8 Un análisis del fenómeno de Gibbs de la Sección 14.5 origina la expresión

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Encuentre el valor numérico con cuatro cifras significativas.

Respuesta. 1.179.

5.7.9 Derive el desarrollo en serie de la función beta incompleta

$$\begin{aligned} B_x(p,q) &= \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \\ &= x^p\left\{\frac{1}{p} + \frac{1-q}{p+1}x + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{(1-q)\cdots(n-q)}{n!(p+n)}x^n + \cdots\right\} \end{aligned}$$

para $0 \leqslant x \leqslant 1$, $p > 0$ y $q > 0$ (si $x = 1$).

5.7.10 Evalúe

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)}{x^7}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-n} j_n(x)$ para $n = 3$.

en donde $j_n(x)$ es una función esférica de Bessel (Sección 11.7) definida por

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right).$$

Respuesta. (a) $-\dfrac{1}{30}$, (b) $\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \to \dfrac{1}{105}$ para $n = 3$.

5.7.11 La teoría del transporte de neutrones proporciona la siguiente expresión para la longitud de difusión de neutrones inversa de k:

$$\frac{a-b}{k}\tanh^{-1}\left(\frac{k}{a}\right) = 1.$$

Mediante la inversión de series, o de cualquier otro modo, determine k^2 como una serie de potencias de b/a. Proporcione los primeros dos términos de la serie.

Respuesta. $k^2 = 3ab\left(1 - \dfrac{4}{5}\dfrac{b}{a}\right)$.

5.7.12 Establezca un desarrollo de serie para $\operatorname{senh}^{-1} x$ en potencias de x por medio de
(a) la reversión de series para $\operatorname{senh} y$,
(b) un desarrollo de Maclaurin directo.

5.7.13 Una función $f(z)$ está representada por una serie de potencias *descendente*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \qquad R \leq z < \infty.$$

Demuestre que este desarrollo en serie es único, es decir si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$, $R \leq z < \infty$, entonces $a_n = b_n$ para todas las n.

5.7.14 Una serie de potencias definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge para $-R < x < R$. Demuestre que la serie diferenciada y la serie integrada tienen el mismo intervalo de convergencia. (No se preocupe acerca de los puntos finales $x = \pm R$.)

5.7.15 Suponiendo que $f(x)$ puede desarrollarse en la forma de una serie de potencias alrededor del origen, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con un intervalo de convergencia no igual a cero. Utilice las técnicas aplicadas para demostrar la unicidad de la serie con objeto de demostrar que la serie supuesta es una serie de Maclaurin:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

5.8 Integrales Elípticas

Las integrales elípticas se incluyen aquí parcialmente como una ilustración del uso de las series de potencias y en parte por su propio interés intrínseco. Este interés incluye la presencia de las integrales elípticas en los problemas físicos (Ejemplo 5.8.1 y Ejercicio 5.8.4) y en las aplicaciones a los problemas matemáticos.

EJEMPLO 5.8.1 PERIODO DE UN PENDULO SIMPLE

Para oscilaciones de pequeña amplitud, nuestro péndulo tiene movimiento armónico simple con periodo $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$. Para una amplitud máxima θ_M lo suficientemente grande de modo que $\operatorname{sen} \theta_M \neq \theta_M$, la segunda ley de Newton del movimiento y la ecuación de Lagrange (Sección 17.7) originan una ecuación diferencial no lineal ($\operatorname{sen} \theta$ es una función no lineal de θ), de modo que consideramos un procedimiento diferente.

La masa oscilante m tiene una energía cinética de $\frac{1}{2}ml^2(d\theta/dt)^2$ y una energía potencial de $-mgl\cos\theta$ ($\theta = \frac{1}{2}\pi$ considerado para el cero arbitrario de energía potencial). Ya que $d\theta/dt = 0$ a $\theta = \theta_M$, el principio de la conservación de la energía indica

$$\tfrac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl\cos\theta = -mgl\cos\theta_M. \tag{5.124}$$

Resolviendo para $d\theta/dt$ se obtiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2}(\cos\theta - \cos\theta_M)^{1/2} \tag{5.125}$$

en que la masa m se cancela. Permitimos que t sea cero cuando $\theta = 0$ y $d\theta/dt > 0$. La integración desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \theta_M$ proporciona

$$\int_0^{\theta_M}(\cos\theta - \cos\theta_M)^{-1/2}\,d\theta = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2}\int_0^t dt = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} t. \tag{5.126}$$

Esto es $\frac{1}{4}$ de ciclo y consecuentemente el tiempo t es $\frac{1}{4}$ del período, T. Observamos que $\theta \leqslant \theta_M$, y con insignificante clarividencia intentamos la sustitución de medio ángulo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_M}{2}\right)\operatorname{sen}\varphi. \tag{5.127}$$

Con esto, la Ec. 5.126 se transforma en

$$T = 4\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}\int_0^{\pi/2}\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_M}{2}\right)\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{-1/2} d\varphi. \tag{5.128}$$

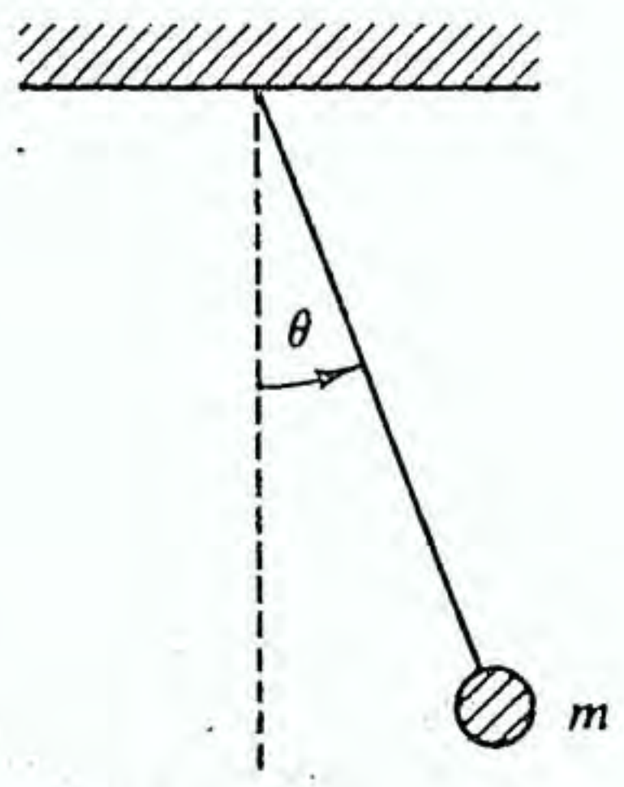


Fig. 5.7 Péndulo simple

Aun cuando no es una mejora obvia con respecto a la Ec. 5.126, la integral define ahora la integral elíptica completa de primera clase, $K(\operatorname{sen}\theta_M/2)$. A partir del desarrollo en serie, el período de nuestro péndulo puede desarrollarse como una serie de potencias, potencias del $\operatorname{sen}\theta_M/2$:

$$T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}\left\{1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{\theta_M}{2} + \frac{9}{64}\operatorname{sen}^4\frac{\theta_M}{2} + \cdots\right\}. \tag{5.129}$$

Definiciones. Generalizando el Ejemplo 5.8.1 para incluir el límite superior como una variable, *la integral elíptica de primera clase* está definida como

$$F(\varphi\backslash\alpha) = \int_0^{\varphi} (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \theta)^{-1/2}\, d\theta \tag{5.130a}$$

o

$$F(x \mid m) = \int_0^{x} [(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2}\, dt, \qquad 0 \leqslant m < 1. \tag{5.130b}$$

(Esta es la notación de *AMS*-55.) Para $\varphi = \pi/2$, $x = 1$, se tiene la *integral elíptica completa de primera clase*

$$\begin{aligned} K(m) &= \int_0^{\pi/2} (1 - m \operatorname{sen}^2 \theta)^{-1/2}\, d\theta \\ &= \int_0^{1} [(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2}\, dt \end{aligned} \tag{5.131}$$

con $m = \operatorname{sen}^2 \alpha$, $0 \leqslant m < 1$.

La *integral elíptica de segunda clase* está definida por

$$E(\varphi\backslash\alpha) = \int_0^{\varphi} (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}\, d\theta \tag{5.132a}$$

o

$$E(x \mid m) = \int_0^{x} \left(\frac{1 - mt^2}{1 - t^2}\right)^{1/2} dt, \qquad 0 \leqslant m \leqslant 1. \tag{5.132b}$$

Nuevamente, para el caso $\varphi = \pi/2$, $x = 1$, se tiene la *integral elíptica completa de segunda clase*

$$\begin{aligned} E(m) &= \int_0^{\pi/2} (1 - m \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}\, d\theta \\ &= \int_0^{1} \left(\frac{1 - mt^2}{1 - t^2}\right)^{1/2} dt, \qquad 0 \leqslant m \leqslant 1. \end{aligned} \tag{5.133}$$

El Ejercicio 5.8.1 es un ejemplo de su ocurrencia. La Fig. 5.8 muestra el comportamiento de $K(m)$ y $E(m)$. En *AMS*-55 se dispone de tablas amplias.

Desarrollo de Series. Para nuestro intervalo $0 \leqslant m < 1$, el denominador de $K(m)$ puede desarrollarse por medio de las series binomiales

$$\begin{aligned} (1 - m \operatorname{sen}^2 \theta)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2} m \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{3}{8} m^2 \operatorname{sen}^4 \theta + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \operatorname{sen}^{2n} \theta. \end{aligned} \tag{5.134}$$

Para cualquier intervalo cerrado $[0, m_{\text{máx}}]$, $m_{\text{máx}} < 1$, esta serie es uniformemente convergente y puede integrarse término por término. De acuerdo con el Ejercicio 10.4.9

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} \theta \, d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{5.135}$$

En consecuencia,

$$K(m) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 m^3 + \cdots\right\}. \tag{5.136}$$

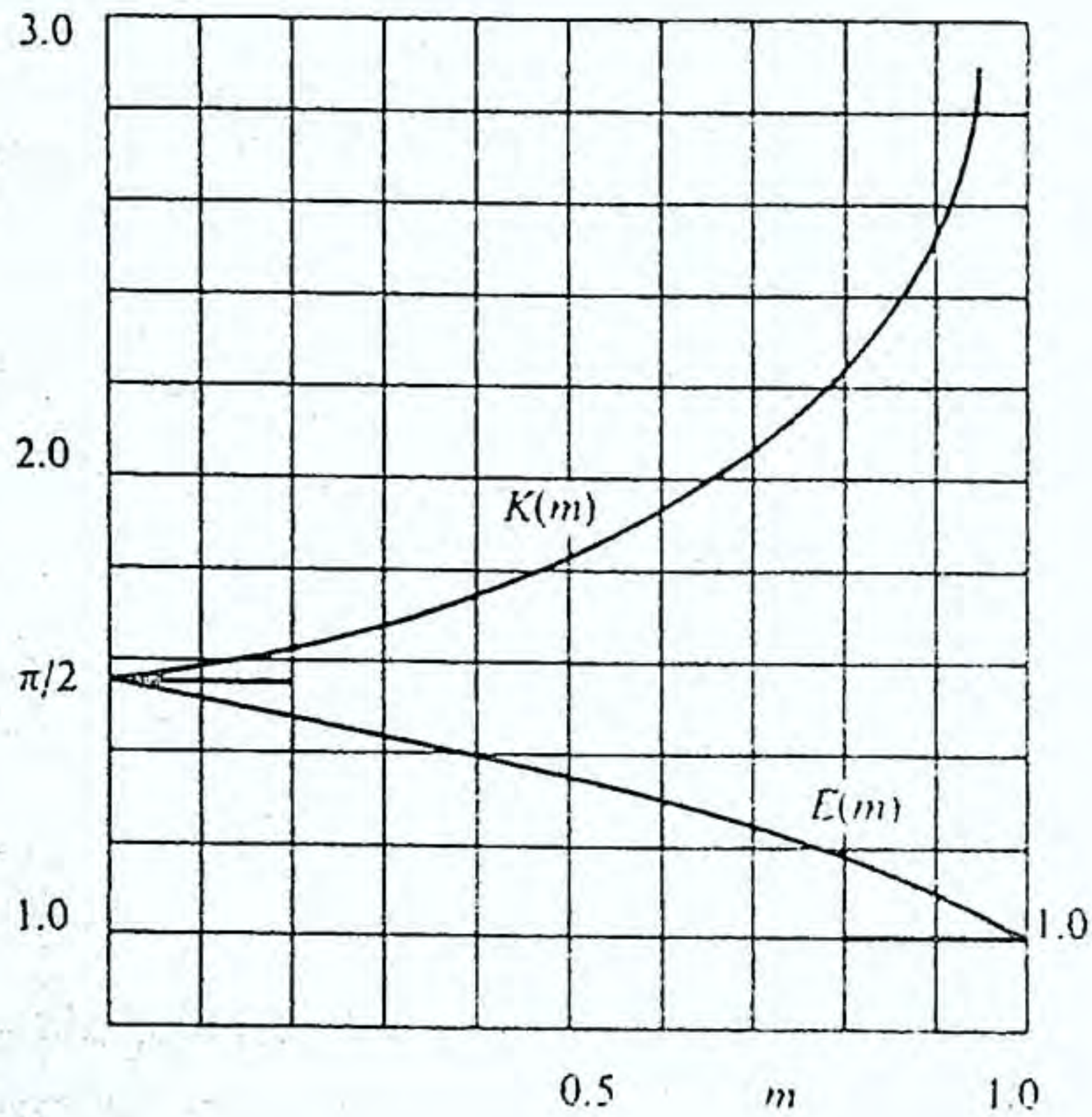


Fig. 5.8 Integrales elípticas completas, $K(m)$ y $E(m)$

De modo similar,

$$E(m) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{m^3}{5} - \cdots\right\}. \tag{5.137}$$

(Ejericicio 5.8.2). En la Sección 13.4, estas series se identifican como funciones hipergeométricas, y se tiene

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \, {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; m\right) \tag{5.138}$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \, {}_2F_1\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1; m\right). \tag{5.139}$$

Valores Limitantes. A partir de las series, Ecs. 5.136 y 5.137 o de las integrales de definición,

$$\lim_{m\to 0} K(m) = \frac{\pi}{2}, \tag{5.140}$$

$$\lim_{m\to 0} E(m) = \frac{\pi}{2}. \tag{5.141}$$

Para $m \to 1$, los desarrollos en serie son de poco uso. Sin embargo, las integrales proporcionan

$$\lim_{m\to 1} K(m) = \infty, \tag{5.142}$$

en que la integral diverge logarítmicamente, y

$$\lim_{m\to 1} E(m) = 1. \tag{5.143}$$

Las integrales elípticas han sido utilizadas ampliamente en el pasado para la evaluación de integrales. Por ejemplo, las integrales de la forma

$$I = \int_0^x R(t, \sqrt{a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0})\, dt,$$

en donde R es una función rotacional de t y del radical, se pueden expresar en términos de integrales elípticas. Jahnke y Emde, Capítulo 5, proporcionan detalles acerca de tales transformaciones. Con las computadoras de alta velocidad que se encuentran disponibles para la evaluación numérica directa, el interés en estas técnicas de integral elíptica ha decrecido. Sin embargo, las integrales elípticas aún continúan siendo de interés debido a su aparición en los problemas de física. Ejercicios 5.8.4 y 5.8.5.

EJERCICIOS

5.8.1 La elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ se puede representar paramétricamente por medio de $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta$.

Demuestre que la longitud del arco dentro del primer cuadrante es

$$a \int_0^{\pi/2} (1 - m \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}\, d\theta = aE(m).$$

Aquí $$0 \leqslant m = (a^2 - b^2)/a^2 \leqslant 1.$$

5.8.2 Derive el desarrollo en serie

$$E(m) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \cdots\right\}$$

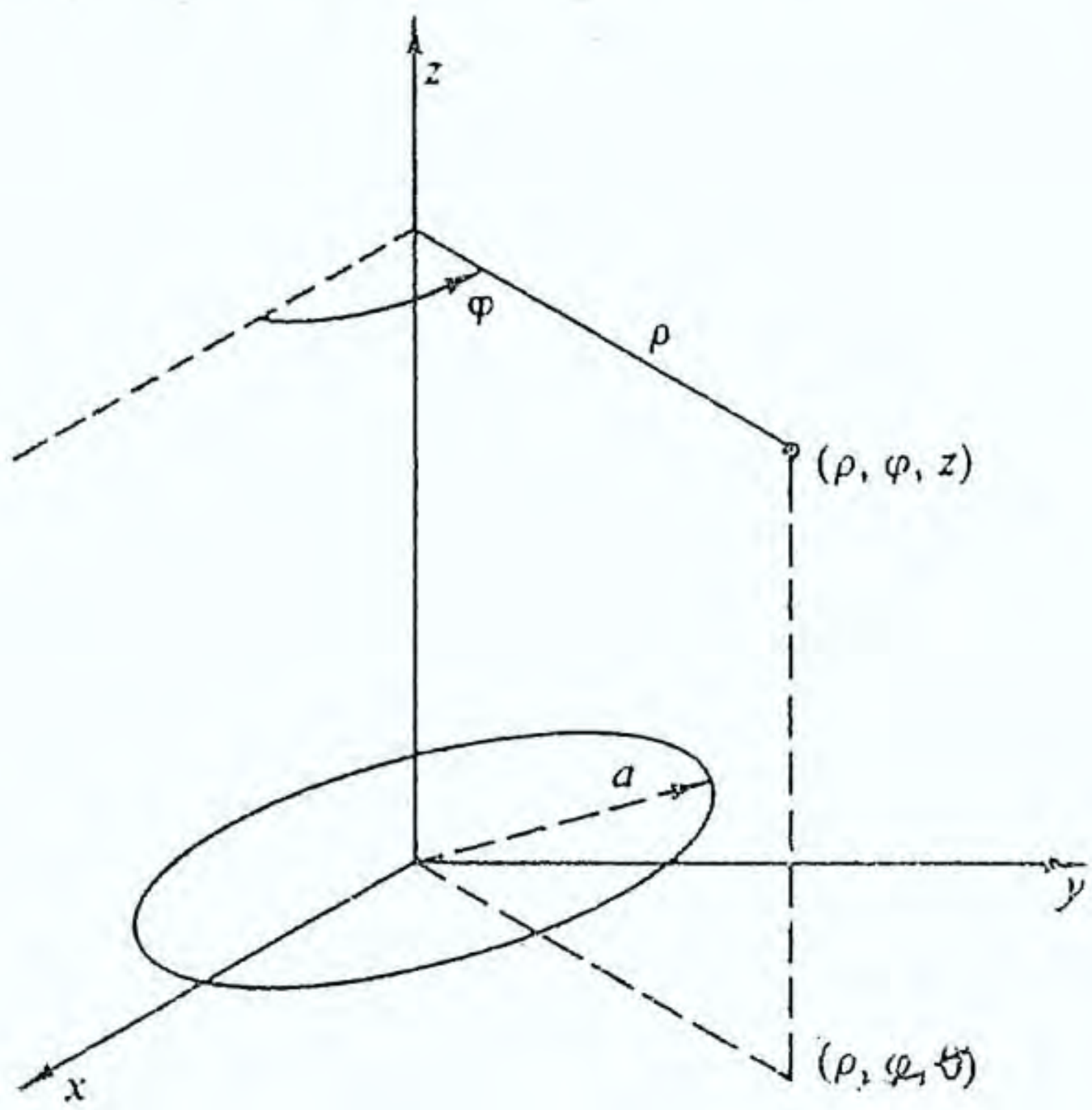
$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \frac{m^n}{(2n-1)}\right\}.$$

5.8.3 Demuestre que

$$\lim_{m \to 0} \frac{(K - E)}{m} = \frac{\pi}{4}.$$

5.8.4 Un circuito circular de alambre en el plano xy, como se muestra, lleva la corriente I. Habiendo establecido que el potencial de vector es

$$A_\varphi(\rho, \varphi, z) = \frac{a\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos\alpha \, d\alpha}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho\cos\alpha)^{1/2}}$$



demuestre que

$$A_\varphi(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E\right]$$

donde

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + z^2}.$$

5.8.5 El análisis de un potencial de vector magnético de un circuito circular de corriente establece la expresión

$$f(k^2) = k^{-2}[(2 - k^2)K(k^2) - 2E(k^2)]$$

en donde $K(k^2)$ y $E(k^2)$ son las integrales elípticas completas de primera y segunda clase. Demuestre que para $k^2 \ll 1$ ($r \gg$ radio del circuito)

$$f(k^2) \approx \frac{\pi k^2}{16}.$$

5.9 Números de Bernoulli

Los números de Bernoulli fueron introducidos por Jacques (James, Jacob) Bernoulli. Existen diferentes definiciones equivalentes, pero debe

tenerse un gran cuidado con las mismas ya que algunos autores introducen variaciones en la numeración o los signos algebraicos. Un procedimiento relativamente simple consiste en definir los números de Bernoulli mediante la serie

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}. \tag{5.144}$$

Mediante la diferenciación de esta serie de potencias en forma repetida y luego estableciendo $x = 0$, se obtiene

$$B_n = \left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)\right]_{x=0} \tag{5.145}$$

Específicamente,

$$B_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)\bigg|_{x=0} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}\bigg|_{x=0}$$

$$= -\frac{1}{2}, \tag{5.146}$$

tal como puede demostrarse mediante el desarrollo en serie de los denominadores.

Ya que estas derivadas son difíciles de evaluar, en su lugar se puede introducir un desarrollo en serie dentro de la expresión de definición (Ec. 5.144) para obtener

$$\frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) = 1. \tag{5.147}$$

Utilizando el teorema de la unidad de la serie de potencias (Sección 5.7) con el coeficiente de x^0 igual a la unidad y los coeficientes de $x^n (n \neq 0)$ iguales a cero, se obtiene

$$B_0 = 1$$

$$\frac{1}{2!} B_0 + B_1 = 0, \qquad B_1 = -\frac{1}{2} \tag{5.148}$$

$$\frac{1}{3!} B_0 + \frac{1}{2!} B_1 + \frac{B_2}{2!} = 0, \qquad B_2 = \frac{1}{6}.$$

Continuando

$$B_4 = -\frac{1}{30} \qquad B_{2n+1} = 0 \qquad n = 1, 2, 3 \cdots,$$

$$B_6 = \frac{1}{42} \tag{5.149}$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \text{ etc.}$$

Una definición alternativa (y equivalente) de B_{2n} está dada por la expresión

$$x \cot x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \qquad -\pi < x < \pi. \tag{5.150}$$

Utilizando el método de los residuos (Sección 7.3) o trabajando desde la representación del producto infinito de sen x (Sección 5.10), se encuentra

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}\, 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots \tag{5.151}$$

Esta representación de los números de Bernoulli fue descubierta por Euler. De la Ec. 5.151, se puede observar con facilidad que $|B_{2n}|$ aumenta sin límite a medida que $n \to \infty$. Los valores numéricos han sido calculados por Glaisher.[1] Ilustrando el comportamiento divergente de los números de Bernoulli, se tiene

$$\begin{aligned} B_{20} &= -5.291 \times 10^{2} \\ B_{200} &= -3.647 \times 10^{215}. \end{aligned} \tag{5.152}$$

Algunos autores prefieren definir los números de Bernoulli mediante una versión modificada de la Ec. 5.151 haciendo uso de

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n} \tag{5.153}$$

en donde el subíndice es justamente la mitad de nuestro subíndice y todos los signos son positivos. Nuevamente, cuando se utilicen otros textos de referencia, el lector deberá comprobar, con cuidado, para conocer con precisión la forma en que se definen los números de Bernoulli.

Los números de Bernoulli se presentan frecuentemente en la teoría de los números. El teorema de Von Standt-Clausen establece que

$$B_{2n} = A_n - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} - \cdots - \frac{1}{p_k}, \tag{5.154}$$

en que A_n es un integro y $p_1, p_2, \cdots, p_k$ son números primos que exceden en 1 a un divisor de $2n$. Se verifica con facilidad que esto es consistente para

$$\begin{aligned} &B_6(A_3 = 1,\ p = 2,\ 3,\ 7), \\ &B_8(A_4 = 1,\ p = 2,\ 3,\ 5), \\ &B_{10}(A_5 = 1,\ p = 2,\ 3,\ 11), \end{aligned} \tag{5.155}$$

y otros casos especiales.

[1] *Trans. Cambridge Phil. Soc.* XII, 390 (1871-1879).

Los números de Bernoulli aparecen en la suma de las potencias integrales de integros

$$\sum_{j=1}^{N} j^p, \qquad p \text{ integral},$$

y en numerosos desarrollos de serie de las funciones trascendentales, incluyendo

$$\tan x,$$
$$\cot x,$$
$$\csc x,$$
$$\ln|\operatorname{sen} x|,$$
$$\ln|\cos x|,$$
$$\ln|\tan x|,$$
$$\tanh x,$$
$$\coth x,$$

y

$$\operatorname{csch} x.$$

Por ejemplo,

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1} + \cdots \tag{5.156}$$

Los números de Bernoulli también tienen posibilidad de aparecer en tales desarrollos de serie debido a las ecuaciones de definición (5.144) y (5.150) y debido a su relación con la función zeta de Riemann

$$\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}. \tag{5.157}$$

Funciones de Bernoulli. Si la Ec. 5.144 se generaliza ligeramente,

$$\frac{xe^{xs}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)\frac{x^n}{n!} \tag{5.158}$$

con lo cual se definen las *funciones de Bernoulli*, $B_n(s)$. Evidentemente,

$$B_n(0) = B_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.159}$$

la función de Bernoulli evaluada a cero equivale al número de Bernoulli correspondiente. Son dos las propiedades particularmente importantes de las funciones de Bernoulli que se pueden derivar de la relación de definición: una relación de diferenciación

$$B_n'(s) = nB_{n-1}(s), \qquad n = 1, 2, 3 \ldots, \tag{5.160}$$

 y una relación de simetría

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.161}$$

Estas relaciones se utilizan en el desarrollo de la fórmula de integración de Euler-Maclaurin.

Fórmula de Integración de Euler-Maclaurin. Uno de los usos de las funciones de Bernoulli se encuentra en la derivación de la fórmula de integración de Euler-Maclaurin. Esta fórmula se utiliza en la Sección 10.3 para el establecimiento de una expresión asintótica de una función factorial, la serie de Stirling.

La técnica consiste en la integración repetida por partes utilizando la Ec. 5.160 para originar nuevas derivadas. Se inicia con

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)B_0(x)\,dx. \tag{5.162}$$

A partir de la Ec. 5.160 y el Ejercicio 5.9.2

$$B_1'(x) = B_0(x) = 1. \tag{5.163}$$

Sustituyendo $B_1'(x)$ en la Ec. 5.162 e integrando por partes

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= f(1)B_1(1) - f(0)B_1(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx.\end{aligned} \tag{5.164}$$

Nuevamente, utilizando la Ec. 5.160

$$B_1(x) = \tfrac{1}{2}B_2'(x) \tag{5.165}$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx = &\frac{1}{2}[f(1) + f(0)] \\ &- \frac{1}{2!}[f'(1)B_2(1) - f'(0)B_2(0)] \\ &+ \frac{1}{2!}\int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x)\,dx.\end{aligned} \tag{5.166}$$

Utilizando las relaciones

$$\begin{aligned}B_{2n}(1) &= B_{2n}(0) = B_{2n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ B_{2n+1}(1) &= B_{2n+1}(0) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\end{aligned} \tag{5.167}$$

y continuando este proceso

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(1) + f(0)]$$

$$- \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{(2p)!} B_{2p}[f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)] \qquad (5.168a)$$

$$+ \frac{1}{(2q)!} \int_0^1 f^{(2q)}(x) B_{2q}(x)\,dx.$$

Esta es la fórmula de integración de Euler-Maclaurin. Supone que la función $f(x)$ tiene las derivadas requeridas.

El intervalo de integración en la Ec. 5.168*a* puede desplazarse desde [0, 1] hasta [1, 2] mediante la sustitución de $f(x)$ por $f(x+1)$. Sumando tales resultados hasta $[n-1, n]$,

$$\int_0^n f(x)\,dx = \tfrac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \tfrac{1}{2} f(n)$$

$$- \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{(2p)!} B_{2p}[f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)] \qquad (5.168b)$$

$$+ \text{término remanente}$$

Esta es la forma utilizada en el Ejercicio 5.9.5 para sumar potencias positivas de enteros y en la Sección 10.3 para derivar la fórmula de Stirling.

Función Zeta de Riemann. Esta serie $\sum_{p=1}^{\infty} p^{-2n}$ ha sido utilizada como serie de comparación para comprobar la convergencia (Sección 5.2) y en la Ec. 5.151 como una definición de los números de Bernoulli, B_{2n}. También es de utilidad para definir la función zeta de Riemann mediante

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad s > 1. \qquad (5.169)$$

La Fig. 5.9 es una gráfica de $\zeta(s) - 1$. Una expresión integral de la función zeta de Riemann aparece en la Sección 10.2 como parte del desarrollo de la función gamma.

Otra expresión de la función zeta de Riemann se puede derivar:

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

$$- \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots\right), \qquad (5.170)$$

eliminando los términos n^{-s} donde n es múltiplo de 2. Siendo así

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots$$

$$- \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \cdots\right), \qquad (5.171)$$

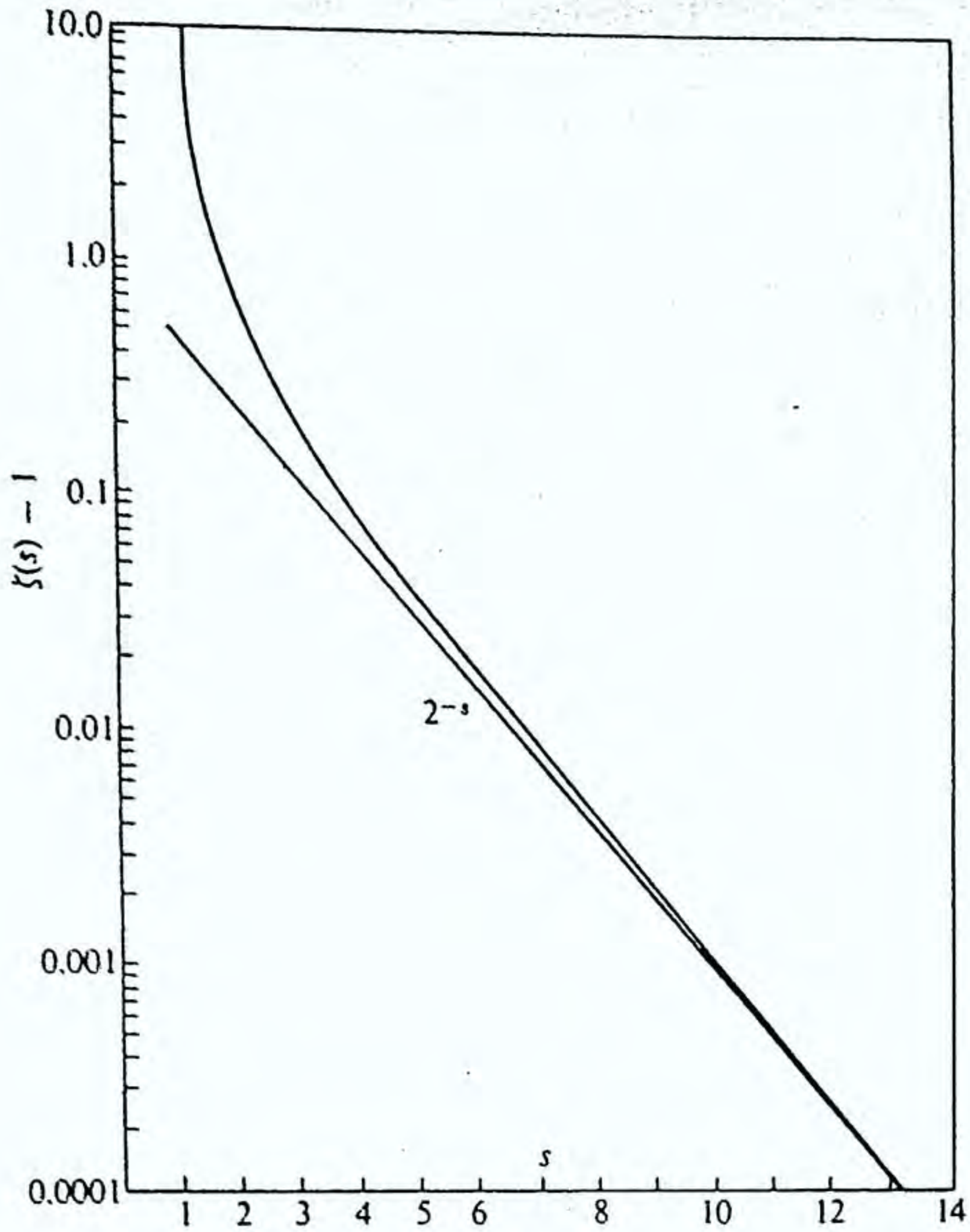


Fig. 5.9 Función zeta de Riemann, $\zeta(s) : 1$ en función de s

eliminando todos los términos remanentes en que n es un múltiplo de 3. Continuando, $\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s})(1 - 5^{-s})\cdots(1 - P^{-s})$, donde P es un número primo, y todos los términos n^{-s}, en que n es un múltiplo de cualquier número entero hasta P, se cancelan. Conforme $P \to \infty$,

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s})\cdots(1 - P^{-s}) = \zeta(s) \prod_{p\,(\text{primo})\,=\,2}^{\infty} (1 - P^{-s})$$

$$= 1. \tag{5.172}$$

En consecuencia,

$$\zeta(s) = \left[\prod_{p\,(\text{primo})\,=\,2}^{\infty} (1 - P^{-s}) \right]^{-1} \tag{5.173}$$

proporcionando $\zeta(s)$ como un producto infinito.

Este procedimiento de cancelación tiene la aplicación evidente en el cálculo numérico. La Ec. 5.170 dará lugar a $\zeta(s)(1 - 2^{-s})$ con la misma precisión que la Ec. 5.169 proporciona $\zeta(s)$, pero tan solo con la mitad de términos. (De cualquier modo, se tiene que aplicar una corrección por la cola desechada de la serie mediante la técnica de prueba de integral de Maclaurin, sustituyendo la serie por una integral, Sección 5.2).

En la Sección 10.2 se incluye una tabla de valores para la función zeta de Riemann.

EJERCICIOS

5.9.1 Demuestre que

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Sugerencia. $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$.

5.9.2 Los números de Bernoulli originados en la Ec. 5.144 han sido generalizados a los polinomios de Bernoulli

$$\frac{xe^{xs}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)\frac{x^n}{n!}.$$

Demuestre que

$$B_0(s) = 1$$
$$B_1(s) = s - 1/2$$
$$B_2(s) = s^2 - s + 1/6.$$

Observe que $B_n(0) = B_n$, el número de Bernoulli.

5.9.3 Demuestre que $B_n'(s) = n\,B_{n-1}(s), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$
Sugerencia. Diferencie la ecuación en el Ejercicio 5.9.2.

5.9.4 Demuestre que

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0).$$

Sugerencia. Regrese a la función generadora, Ec. 5.158 o el Ejercicio 5.9.2.

5.9.5 La fórmula de integración de Euler-Maclaurin puede utilizarse en la evaluación de series finitas:

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) = \int_1^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(n) + \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(1)] + \cdots$$

Demuestre que

(a) $\sum_{m=1}^{n} m = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(b) $\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(c) $\sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

(d) $\sum_{m=1}^{n} m^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

5.9.6 A partir de

$$B_{2n} = (-1)^{n-1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n).$$

Demuestre que

(a) $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$

(b) $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$

(c) $\zeta(6) = \dfrac{\pi^6}{945}$

(d) $\zeta(8) = \dfrac{\pi^8}{9450}$

(e) $\zeta(10) = \dfrac{\pi^{10}}{93{,}555}$

5.9.7 La ley de radiación de cuerpo negro de Planck involucra la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}.$$

Demuestre que esto equivale a $6\,\zeta(4)$. A partir del Ejercicio 5.9.6

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

5.9.8 Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{x^n e^x\,dx}{(e^x - 1)^2} = n!\,\zeta(n).$$

Suponiendo que n es real, demuestre que cada lado de la ecuación diverge si $n = 1$. En consecuencia, la ecuación anterior implica la condición $n > 1$.
Las integrales como esta aparecen en la teoría cuántica de los efectos de transporte (conductividad térmica y eléctrica).

5.9.9 La aproximación de Bloch-Gruneissen para la resistencia de un metal monovalente es

$$\rho = C\frac{T^5}{\Theta^6}\int_0^{\Theta/T} \frac{x^5\,dx}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})},$$

en donde Θ es la temperatura de Debye característica del metal.

(a) Para $T \to \infty$ demuestre que

$$\rho \approx \frac{C}{4}\cdot\frac{T}{\Theta^2}.$$

(b) Para $T \to 0$, demuestre que

$$\rho \approx 5!\,\zeta(5)C\frac{T^5}{\Theta^6}.$$

5.9.10 Demuestre que

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\zeta(2)$ (b) $\displaystyle\lim_{a\to 1}\int_0^a \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = \zeta(2).$

A partir del Ejercicio 5.9.6, $\zeta(2) = \pi^2/6$. Observe que el *integrando* en la parte (b) diverge para $a = 1$, pero que la serie *integrada* es convergente.

5.9.11 La integral

$$\int_0^1 [\ln(1-x)]^2\frac{dx}{x}$$

aparece en la corrección de cuarto orden del momento magnético del electrón. Demuestre que equivale a $2\,\zeta(3)$. *Sugerencia.* Sea $1 - x = e^{-t}$.

5.9.12 Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\,dz = 4\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots\right).$$

Mediante la integración de contorno (Ejercicio 7.2.13), se puede demostrar que esto equivale a $\pi^3/8$.

5.9.13 Para valores "pequeños" de x

$$\ln(x!) = -\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n}x^n,$$

en donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y $\zeta(n)$ es la función zeta de Riemann.

¿Para qué valores de x se tiene la convergencia de la serie? *Respuesta.* $-1 < x < 1$.
Observe que si $x = 1$, se obtiene

$$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n},$$

una serie para la constante de Euler-Mascheroni.

5.9.14 Demuestre que el desarrollo en serie de $\ln(x!)$ (Ejercicio 5.9.13) se puede indicar en la forma

$$\text{(a)}\ \ln(x!) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi x}{\operatorname{sen}\pi x}\right) - \gamma x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\text{(b)}\ \ln(x!) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi x}{\operatorname{sen}\pi x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + (1-\gamma)x - \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta(2n+1) - 1]\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Determine el intervalo de convergencia de cada una de estas expresiones.

5.10 Productos Infinitos

Considere sucesión de factores positivos $f_1\ f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdots f_n$, $(f_i > 0)$. Utilizando pi mayúscula para indicar el producto, del mismo modo que sigma mayúscula indica suma, se tiene

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_n = \prod_{i=1}^{n} f_i. \tag{5.174}$$

Definimos p_n, un producto parcial, en analogía con s_n la suma parcial,

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} f_i \tag{5.175}$$

y luego se procede a investigar el límite

$$\lim_{n\to\infty} p_n = P. \tag{5.176}$$

Si P es finito (pero diferente de cero), se dice que el producto infinito es convergente. Si P es infinito *o igual a cero,* el producto infinito se denomina divergente.

Ya que el producto diverge hasta infinito si

$$\lim_{n=\infty} f_n > 1 \tag{5.177}$$

o hasta cero para

$$\lim_{n=\infty} f_n < 1, \quad (y > 0), \tag{5.178}$$

es conveniente establecer nuestro producto infinito en la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n).$$

La condición $a_n \to 0$ es consecuentemente necesaria (pero no suficiente) para la convergencia.

El producto infinito se puede relacionar con una serie infinita mediante el método evidente de considerar el logaritmo

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 + a_n). \tag{5.179}$$

En el siguiente teorema se establece una relación de mayor utilidad.

Convergencia de un Producto Infinito. Si $0 \leqslant a_n < 1$, los productos infinitos $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ y $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ convergen cuando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y diverge si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Considerando el término $1 + a_n$, se observa de la Ec. 5.90

$$1 + a_n \leqslant e^{a_n}. \tag{5.180}$$

En consecuencia, el producto parcial p_n

$$p_n \leqslant e^{s_n} \tag{5.181}$$

y permitiendo que $n \to \infty$,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \leqslant \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{5.182}$$

estableciendo así un límite superior para el producto infinito.

Para desarrollar un límite inferior, observamos que

$$p_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j + \cdots, \qquad > s_n, \tag{5.183}$$

ya que $a_i \geqslant 0$. Siendo así,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5.184}$$

Si la suma infinita permanece finita, el producto infinito también lo hará. Si la suma infinita diverge, así lo hará el producto infinito.

El caso de $\prod(1 - a_n)$ se complica con los signos negativos, pero la demostración que depende de la demostración anterior se puede desarrollar al notar que para $a_n < \frac{1}{2}$ (recuerde $a_n \to 0$ para la convergencia)

$$(1 - a_n) \leqslant (1 + a_n)^{-1}$$

y

$$(1 - a_n) \geqslant (1 + 2a_n)^{-1}. \tag{5.185}$$

Función Gamma, Sen x y Cos x. El lector podrá reconocer que un polinomio de orden n $P_n(x)$ con n raíces reales se puede indicar como el producto de n factores

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i). \tag{5.186}$$

Casi del mismo modo podría esperarse que una función con un número infinito de raíces se pueda establecer como un producto infinito, un factor

para cada raíz. Esto de hecho es el caso para las funciones trigonométricas. Se dispone de dos representaciones de producto infinito bastante útiles

$$\operatorname{sen} x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{5.187}$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]. \tag{5.188}$$

La derivación más conveniente y posiblemente más elegante de estas dos expresiones consiste en el uso de las variables complejas. La derivación se proporciona en la Sección 7.3. Mediante el teorema de la convergencia, las Ecs. 5.187 y 5.188 son convergentes para todos los valores finitos de x. Específicamente, para el producto infinito de sen x, $a_n = x^2/n^2\pi^2$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{x^2}{\pi^2}\zeta(2) \\ &= \frac{x^2}{6} \end{aligned} \tag{5.189}$$

mediante el Ejercicio 5.9.6. La serie correspondiente a la Ec. 5.188 se comporta de manera similar.

La Ec. 5.187 origina dos resultados interesantes. Primeramente, si establecemos $x = \pi/2$, se obtiene

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2n)^2}\right] = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2}\right]. \tag{5.190}$$

Resolviendo para $\pi/2$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right] \\ &= \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots, \end{aligned} \tag{5.191}$$

lo cual es la famosa fórmula de Wallis para $\pi/2$.

El segundo resultado involucra la función gamma o factorial (Sección 10.1). Una definición de la función gamma es

$$\Gamma(x) = \left[xe^{\gamma x} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{r}\right) e^{-x/r}\right]^{-1}, \tag{5.192}$$

en donde γ es la constante usual de Euler-Mascheroni (cf. Sección 5.2). Si se considera el producto de $\Gamma(x)$ y $\Gamma(-x)$, la Ec. 5.192 origina

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(-x) &= -\left[xe^{\gamma x} \prod \left(1 + \frac{x}{r}\right) e^{-x/r} xe^{-\gamma x} \prod \left(1 - \frac{x}{r}\right) e^{x/r}\right]^{-1} \\ &= -\left[x^2 \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \tag{5.193}$$

Utilizando la Ec. 5.187 con x sustituida por πx, esto se transforma en

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \operatorname{sen} \pi x}. \tag{5.194}$$

Anticipando una relación de recurrencia desarrollada en la Sección 10.1, $-x\Gamma(-x) = \Gamma(1-x)$. La Ec. 5.194 puede indicarse en la forma

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}. \tag{5.195}$$

Esto será de utilidad en el tratamiento de la función gamma (Capítulo 10).

Desde un punto de vista estricto, debemos comprobar el intervalo de x para el cual la Ec. 5.192 es convergente. Evidentemente, los factores individuales desaparecen para $x = 0, -1, -2, \ldots$ La demostración de que el producto infinito converge para todos los otros valores (finitos) de x se deja para el Ejercicio 5.10.7.

EJERCICIOS

5.10.1 Utilizando

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 \pm a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 \pm a_n)$$

y el desarrollo de Maclaurin del $\ln (1 \pm a_n)$, demuestre que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 \pm a_n)$ converge o diverge con la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

5.10.2 Demuestre que las representaciones de producto infinito de sen x y cos x son consistentes con la identidad $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$.

5.10.3 Determine el límite para el cual

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

converge.

5.10.4 Demuestre que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}.$$

5.10.5 Utilizando las representaciones de producto infinito de sen x, demuestre que

$$x \cot x = 1 - 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2m},$$

y consecuentemente que el número de Bernoulli

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n),$$

5.10.6 Verifique la identidad de Euler

$$\prod_{p=1}^{\infty}(1+z^p)=\prod_{q=1}^{\infty}(1-z^{2q-1})^{-1}, \qquad |z|<1.$$

5.10.7 Demuestre que $\prod_{r=1}^{\infty}(1+x/r)e^{-x/r}$ converge para todas las x finitas (excepto para los ceros de $1+x/r$).
Sugerencia: Considere el factor n como $1+a_n$.

5.11 Series Asintóticas o Semiconvergentes

Función Gamma Incompleta. La naturaleza de la serie asintótica probablemente se puede ilustrar mejor mediante un ejemplo específico. Suponga que se tiene la función integral logarítmica [1]

$$Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^u}{u}\,du, \tag{5.196}$$

o

$$-Ei(-x)=\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du=E_1(x), \tag{5.197}$$

por evaluarse para valores grandes de x. Aún mejor, consideremos la generalización de la función factorial incompleta (función gamma incompleta), [2]

$$I(x,p)=\int_{x}^{\infty}e^{-u}u^{-p}\,du, \tag{5.198}$$

en donde x y p son positivas. Nuevamente se procede a evaluar la misma para valores grandes de x.

Integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} I(x,p)&=\frac{e^{-x}}{x^p}-p\int_x^{\infty}e^{-u}u^{-p-1}\,du\\ &=\frac{e^{-x}}{x^p}-\frac{pe^{-x}}{x^{p+1}}+p(p+1)\int_x^{\infty}e^{-u}u^{-p-2}\,du. \end{aligned} \tag{5.199}$$

Continuando con la integración por partes, se desarrolla la serie

$$\begin{aligned} I(x,p)=e^{-x}&\left(\frac{1}{x^p}-\frac{p}{x^{p+1}}+\frac{p(p+1)}{x^{p+2}}-\cdots\right)+\\ &(-1)^n\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!}\int_x^{\infty}e^{-u}u^{-p-n}\,du. \end{aligned} \tag{5.200}$$

[1] Esta función se presenta frecuentemente en los problemas de astrofísica que implican un gas con la distribución de energía de Maxwell-Boltzmann.

[2] Véase también la Sección 10.5.

Esta representa una serie notable. Comprobando en cuanto a convergencia mediante la prueba de la relación de D'Alembert, se encuentra que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+n)!}{(p+n-1)!}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p+n}{x}$$

$$=\infty \tag{5.201}$$

para todos los valores finitos de x. En consecuencia, nuestra serie como serie infinita diverge en casi cualquier aspecto. Antes de desechar la Ec. 5.200 como inútil, veamos que tan bien se aproxima una suma parcial a la función factorial incompleta, $I(x, p)$.

$$I(x,p)-s_n(x,p)=(-1)^{n+1}\frac{(p+n)!}{(p-1)!}\int_x^\infty e^{-u}u^{-p-n-1}\,du \tag{5.202}$$

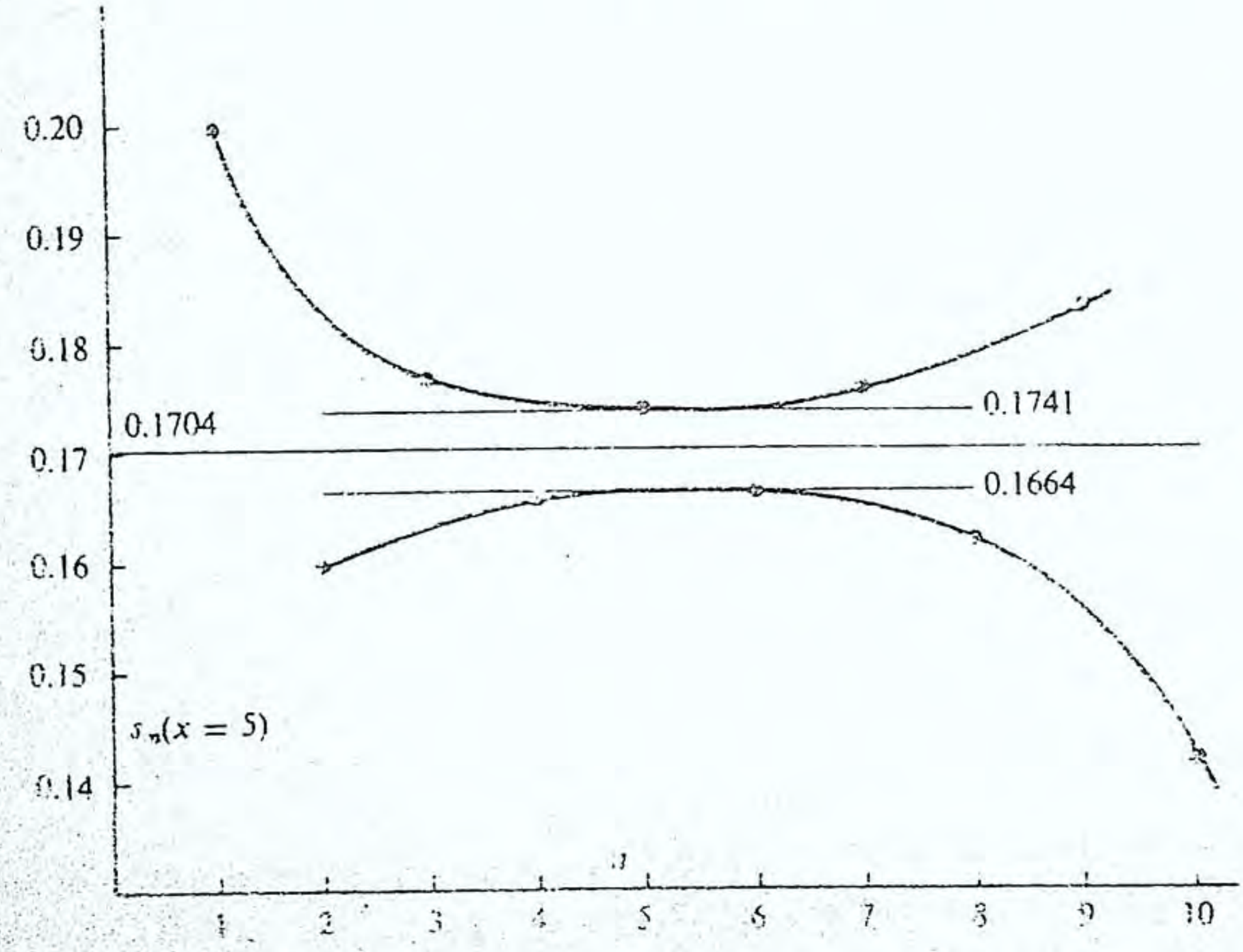


Fig. 5.10 Sumas parciales de $e^xE_1(x)|_{x=5}$

En valor absoluto

$$|I(x,p)-s_n(x,p)|\le\frac{(p+n)!}{(p-1)!}\int_x^\infty u^{-p-n-1}\,du.$$

$$\le\frac{(p+n-1)}{(p-1)!}\cdot\frac{1}{x^{p+n}} \tag{5.203}$$

Esto significa que al considerar x suficientemente grande, nuestra suma parcial s_n es una aproximación arbitraria, pero adecuada a la función que se requiere, $I(x, p)$. Nuestra serie divergente (Ec. 5.200) por consecuencia es idónea para los cómputos. Debido a esto, en ocasiones, se denomina serie semiconvergente.

Ya que el remanente $R_n(x, p)$ alterna en signo, las sumas parciales sucesivas proporcionan límites alternados superior e inferior para $I(x, p)$. El comportamiento de la serie (con $p = 1$) como función del número de términos incluidos se muestra en la Fig. 5.10. Se tiene

$$e^x E_1(x) = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots, \tag{5.204}$$

la cual se evalúa a $x = 5$. Para cierto valor de x, los límites superior e inferior establecidos por las sumas parciales convergen y luego divergen. La determinación óptima de $e^x E_1(x)$ se establece luego mediante el acceso más próximo a los límites superior e inferior, o sea entre $s_4 = s_6 = 0.1664$ y $s_5 = 0.1741$ para $x = 5$. En consecuencia,

$$0.1664 \leqslant e^x E_1(x)|_{x=5} \leqslant 0.1741. \tag{5.205}$$

De hecho, según las tablas

$$e^x E_1(x)|_{x=5} = 0.1704, \tag{5.206}$$

dentro de los límites establecidos por el desarrollo asintótico. La incorporación de términos adicionales en el desarrollo de serie fuera del límite óptimo reduce literalmente la precisión de la representación.

A medida que se incrementa x, la dispersión entre el límite superior más bajo y el límite inferior más alto, disminuye. Considerando x lo suficientemente grande, $e^x E_1(x)$ puede calcularse con cualquier grado de precisión deseado. Otras propiedades de $E_1(x)$ se derivan y describen en la Sección 10.5.

Integrales de Coseno y Seno. La serie asintótica también se puede desarrollar a partir de las integrales definidas, cuando el *integrando* tiene el comportamiento requerido. Como ejemplo, las integrales de coseno y seno (Sección 10.5) pueden definirse mediante

$$Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt, \tag{5.207}$$

$$si(x) = -\int_x^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt. \tag{5.208}$$

Combinando esto con las funciones trigonométricas regulares, se puede definir

$$f(x) = Ci(x)\,\mathrm{sen}\,x - si(x)\cos x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\,y}{y+x}\,dy,$$
$$g(x) = -Ci(x)\cos x - si(x)\,\mathrm{sen}\,x = \int_0^\infty \frac{\cos y}{y+x}\,dy, \tag{5.209}$$

con la nueva variable $y = t - x$. Pasando a las variables complejas, Sección 6.1,

$$\begin{aligned} g(x) + if(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{iy}}{y+x}\,dy \\ &= \int_0^\infty \frac{ie^{-xu}}{1+iu}\,du, \end{aligned} \tag{5.210}$$

en donde $u = -iy/x$. Los límites de la integración, 0 a ∞, más bien que 0 hasta $-i\infty$, se pueden justificar por medio del teorema de Cauchy, Sección 6.3. Racionalizando el denominador e igualando la parte real con la parte real y la parte imaginaria con la parte imaginaria,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^\infty \frac{ue^{-xu}}{1+u^2}\,du, \\ f(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{1+u^2}\,du. \end{aligned} \tag{5.211}$$

Para la convergencia de las integrales, se debe requerir que $\mathscr{R}(x) > 0$.[1]

Ahora, para establecer los desarrollos asintóticos se permite que $v = xu$ y se desarrolla el factor $[1 + (v/x)^2]^{-1}$ mediante el teorema binomial.[2] Se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-v}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{v^{2n}}{x^{2n}}\,dv = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} \\ g(x) &\approx \frac{1}{x^2}\int_0^\infty e^{-v}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{v^{2n+1}}{x^{2n}}\,dv = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}}. \end{aligned} \tag{5.212}$$

A partir de las Ecs. 5.209 y 5.212,

$$\begin{aligned} Ci(x) &\approx \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\cos x}{x^2}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}} \\ si(x) &\approx -\frac{\cos x}{x}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\mathrm{sen}\,x}{x^2}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n}} \end{aligned} \tag{5.213}$$

es decir los desarrollos asintóticos deseados.

Esta técnica de desarrollar el *integrando* de una integral definida e integrar término por término se aplica en la Sección 11.6 para establecer un

[1] $\mathscr{R}(x)$ = parte real de x (compleja) (cf. Sección 6.1).

[2] Este paso es válido para $v < x$. Las contribuciones de $v > x$ serán despreciables (para x grande) debido al exponencial negativo.

desarrollo asintótico de la función de Bessel modificada K_ν y en la Sección 13.5 para el desarrollo de dos funciones hipergeométricas confluentes $M(a, c; x)$ y $U(a, c; x)$.

Definición de Serie Asintótica. El comportamiento de esta serie (Ecs. 5.200 y 5.213) es consistente con las propiedades de definición de la serie asintótica. De acuerdo con Poincaré, se tiene

$$x^n R_n(x) = x^n[f(x) - s_n(x)], \tag{5.214}$$

en donde

$$s_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}. \tag{5.215}$$

El desarrollo asintótico de $f(x)$ tiene las propiedades de que

$$\lim_{x \to \infty} x^n R_n(x) = 0, \qquad \text{para } n \text{ fija} \tag{5.216}$$

y

$$\lim_{n \to \infty} x^n R_n(x) = \infty, \qquad \text{para } x \text{ fija}.\ ^1 \tag{5.217}$$

Con las condiciones (5.216) y (5.217) satisfechas, se establece

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}. \tag{5.218}$$

Observe el uso de $\approx$ en lugar de $=$. La función $f(x)$ es igual a la serie solamente en el limite conforme $x \to \infty$.

Los desarrollos asintóticos de dos funciones pueden multiplicarse entre si y el resultado será el desarrollo asintótico del producto de dos funciones.

El desarrollo asintótico de una función dada $f(t)$ puede integrarse término por término (del mismo modo que en la serie uniformemente convergente de funciones continuas) a partir de $x \leqslant t < \infty$ y el resultado será un desarrollo asintótico de $\int_x^\infty f(t)\, dt$. Sin embargo, la diferenciación término por término solamente es válida bajo condiciones bastante especiales.

Algunas funciones no tienen un desarrollo asintótico; e^x es un ejemplo de tal función. Sin embargo, cuando una función tiene desarrollo asintótico, solamente tiene uno. La correspondencia no es de uno a uno; muchas funciones pueden tener el mismo desarrollo asintótico.

Uno de los métodos de mayor utilidad y poderío para la generación de los desarrollos asintóticos, es decir el método de los descensos de pendiente pronunciada, se establece en la Sección 7.4. Las aplicaciones incluyen la derivación de la fórmula de Stirling para la función factorial (completa) (Sección 10.3) y las formas asintóticas de las diversas funciones de Bessel (Sección 11.6). La serie asintótica se presenta con relativa frecuencia en la física matemática. Uno de los primeros tratamientos de aproximación pero

[1] Esto excluye a las series convergentes de potencias inversas de x. Algunos escritores piensan que esta distinción, esta exclusión, es artificial e innecesaria.

que aún es de importancia de la mecánica cuántica, el desarrollo *WKB*, es una serie asintótica.

Aplicaciones a la Computación. La serie asintótica se utiliza frecuentemente en los cómputos de las funciones por medio de las computadoras electrónicas, de alta velocidad, modernas. Este es el caso de las funciones de Neumann $N_0(x)$ y $N_1(x)$, y las funciones de Bessel modificadas $I_n(x)$ y $K_n(x)$. Las series asintóticas de importancia están definidas por las Ecs. 11.137. 11.145 y 11.147. Una descripción adicional de estas funciones se incluye en la Sección 11.6. Las series asintóticas para la integral exponencial, Ec. 5.204; para las integrales de Fresnel, Ejercicio 5.11.2, y para la función de error de Gauss, Ejercicio 5.11.4, se utilizan en la evaluación de las integrales para valores grandes del argumento. Lo grande que debe ser el argumento dependerá de la precisión requerida. En la práctica, una porción finita de la serie asintótica se telescopia utilizando las técnicas de Chebyshev para optimizar la precisión tal como se describe en la Sección 13.3.

EJERCICIOS

5.11.1 La fórmula de Stirling para el logaritmo de la función factorial es

$$\ln(x!) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x - \sum_{n=1} \frac{B_{2n}}{(2n)(2n-1)} x^{1-2n}.$$

En que B_{2n} son los números de Bernoulli (Sección 5.8). Demuestre que la fórmula de Stirling es un desarrollo *asintótico.*

5.11.2 Integrando por partes, establezca los desarrollos asintóticos de las integrales de Fresnel.

$$\text{(a)}\quad C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi u^2}{2}\,du, \qquad \text{(b)}\quad S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\frac{\pi u^2}{2}\,du.$$

Estas integrales aparecen en el análisis del modelo de difracción de borde afilado.

5.11.3 Vuelva a derivar los desarrollos asintóticos de $Ci(x)$ y $si(x)$ mediante la integración repetida por partes.

Sugerencia. $\quad Ci(x) + i\,si(x) = -\int_x^\infty \frac{e^{it}}{t}\,dt.$

5.11.4 Derive el desarrollo asintótico de la función de error de Gauss

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$= 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^6} + \cdots\right)$$

Sugerencia. $\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erfc}(x) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$

Normalizada de modo que $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, esta función tiene una intervención importante en la teoría de la probabilidad. Se puede expresar en términos de las integrales de Fresnel (Ejercicio 5.11.2), las funciones gamma incómpletas (Sección 10.5) y las funciones hipergeométricas confluentes (Sección 13.5).

5.11.5 Las expresiones asintóticas para las diversas funciones de Bessel, Sección 11.6, contienen la serie

$$P_\nu(z) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\prod_{s=1}^{2n} [4\nu^2 - (2s-1)^2]}{(2n)!(8z)^{2n}},$$

$$Q_\nu(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\prod_{2n-1}^{s=1} [\nu^2 - (2s-1)^2]}{(2n-1)!(8z)^{2n-1}}.$$

Demuestre que estas dos series son realmente asintóticas.

REFERENCIAS

DAVIS, H. T., *Tables for Higher Mathematical Functions.* Bloomington, Indiana: Principia Press (1935). El Volumen II contiene amplia información acerca de los números y polinomios de Bernoulli.

HARDY, G. H., *Divergent Series.* Oxford: Clarendon Press (1956). Un trabajo estándar y resumido de los métodos para el tratamiento de las series divergentes. Hardy incluye un instructivo sobre el desarrollo gradual de los conceptos de la convergencia y la divergencia.

HYSLOP, J. M., *Infinite Series.* 5a. ed. Nueva York: Interscience Publishers (1959). Una excelente presentación de las series infinitas y los productos infinitos.

KNOPP, Konrad. *Theory and Application of Infinite Series.* Londres: Blackie and Son (reimpresión de 1946). Este es un trabajo completo, resumido y autorizado que cubre las series infinitas y los productos infinitos. Las demostraciones de casi todos los enunciados no demostrados en el Capítulo 5 se pueden encontrar en este libro.

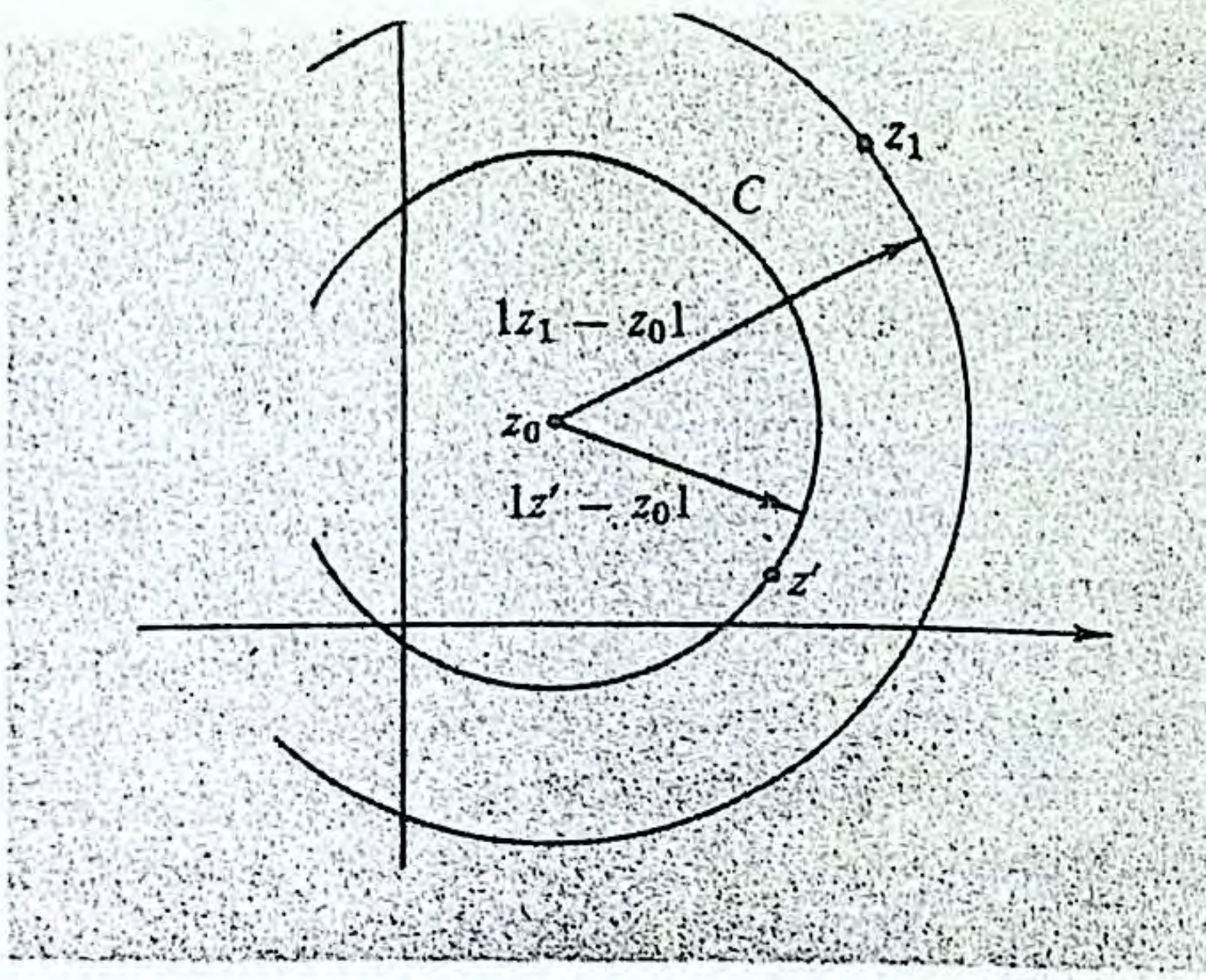
MANGULIS, V., *Handbook of Series for Scientists and Engineers.* Nueva York y Londres: Academic Press (1965). Una colección de series muy apropiada y útil. Incluye las funciones algebraicas, las series de Fourier y las de funciones especiales: Bessel, Legendre, etc.

SMAIL, L. L., *Elements of the Theory of Infinite Processes.* Nueva York: McGraw-Hill (1923). Una referencia antigua pero todavía una de las mejores para el estudio independiente de las series y productos infinitos.

SOKOLNIKOFF, I. S. y R. M. REDHEFFER, *Mathematics of Physics and Modern Engineering.* New York: McGraw-Hill (1958). El amplio Capítulo 2 (101 páginas) presenta las series infinitas en una forma completa y de fácil lectura. Las extensiones a las soluciones de las ecuaciones diferenciales, a las series complejas y a las series de Fourier, también se incluyen.

El tema de las series infinitas se trata en la mayoría de los textos de cálculo avanzado. Una de las mejores referencias es

WIDDER, David V., *Advanced Calculus,* 2a. ed. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall (1961).



CAPITULO 6

FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA I. PROPIEDADES ANALÍTICAS; REPRESENTACIÓN CONFORMAL

Los números imaginarios son una maravillosa exaltación del espíritu de Dios; casi representan un anfibio entre el ser y el no ser.

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNITZ, 1702

Ahora nos dedicaremos al estudio de las funciones de una variable compleja. En esta área desarrollaremos algunas de las herramientas de mayor poderío y utilidad del análisis matemático. Para indicar, al menos parcialmente, por qué es importante la variable compleja, a continuación se mencionan brevemente tres áreas de aplicación.

1. Para muchos pares de funciones u y v, tanto u como v satisfacen la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

En consecuencia, u o v pueden utilizarse para describir un potencial electrostático bidimensional. La otra función que proporciona una familia de curvas ortogonal a las de la primera función, puede utilizarse entonces, para describir el campo eléctrico **E**. Existe una situación similar en la hidrodinámica de un fluido ideal en movimiento irrotacional. La función u puede describir el potencial de velocidad, mientras que la función v describiría entonces la función de corriente.

En muchos casos donde las funciónes u y v son desconocidas, la representación o la transformación en un plano complejo nos permite originar un sistema coordenado conformado al problema particular.

2. De acuerdo con el Capítulo 8, se podrá observar que las ecuaciones diferenciales de segundo orden que son de interés para la física se pueden resolver por medio de las series de potencias. Las mismas series de potencias se pueden emplear en el plano complejo para sustituir x por la variable compleja z. La dependencia de la solución $f(z)$ en cierta z_0 con respecto al comportamiento de $f(z)$ en cualquier lugar nos proporciona un mayor discernimiento acerca del comportamiento de nuestra solución y una herramienta poderosa (continuación analítica) para extendernos a la región en donde nuestra solución es válida.

3. Las integrales en el plano complejo tienen una amplia variedad de aplicaciones útiles.

a. Evaluación de integrales definidas.
b. Inversión de las series de potencias
c. Formación de productos infinitos
d. Obtención de soluciones para ecuaciones diferenciales que tienen valores grandes de la variable (soluciones asintóticas).
e. Investigación de la estabilidad de los sistemas potencialmente oscilatorios.

6.1 Algebra Compleja

Un número complejo no es otra cosa que un par ordenado de dos números ordinarios (a, b) o $a + ib$, en donde i es $(-1)^{1/2}$. De modo similar, una variable compleja es un par ordenado de dos variables reales

$$z = (x, y) = x + iy. \tag{6.1}$$

El lector podrá observar que la ordenación es importante, que en general $a + ib$ no es igual a $b + ia$ y que $x + iy$ no es igual a $y + ix$.[1]

Con frecuencia es conveniente utilizar la representación gráfica de la variable compleja. Al tener x, la parte real de z, como abscisa e y, la parte imaginaria de z, como ordenada, se logra el plano complejo o el plano de Argando mostrado en la Fig. 6.1. Si se asignan valores específicos a x e y, entonces z corresponde a un punto (x, y) en el plano. En términos de la ordenación mencionada antes, es evidente que el punto (x, y) no coincide con el punto (y, x) excepto para el caso especial $x = y$.

En el Capítulo 1, los puntos en el plano xy fueron identificados con el vector de desplazamiento bidimensional $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$. Como resultado de esto, se pueden desarrollar los análogos del vector bidimensional para gran parte de nuestro análisis complejo. El Ejercicio 6.1.1 es un ejemplo simple; el teorema de Cauchy, Sección 6.3, constituye otro ejemplo.

[1] El álgebra de los números complejos, $a + ib$, es isomórfica con respecto a las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{(cf. Ej. 4.2.4)}$$

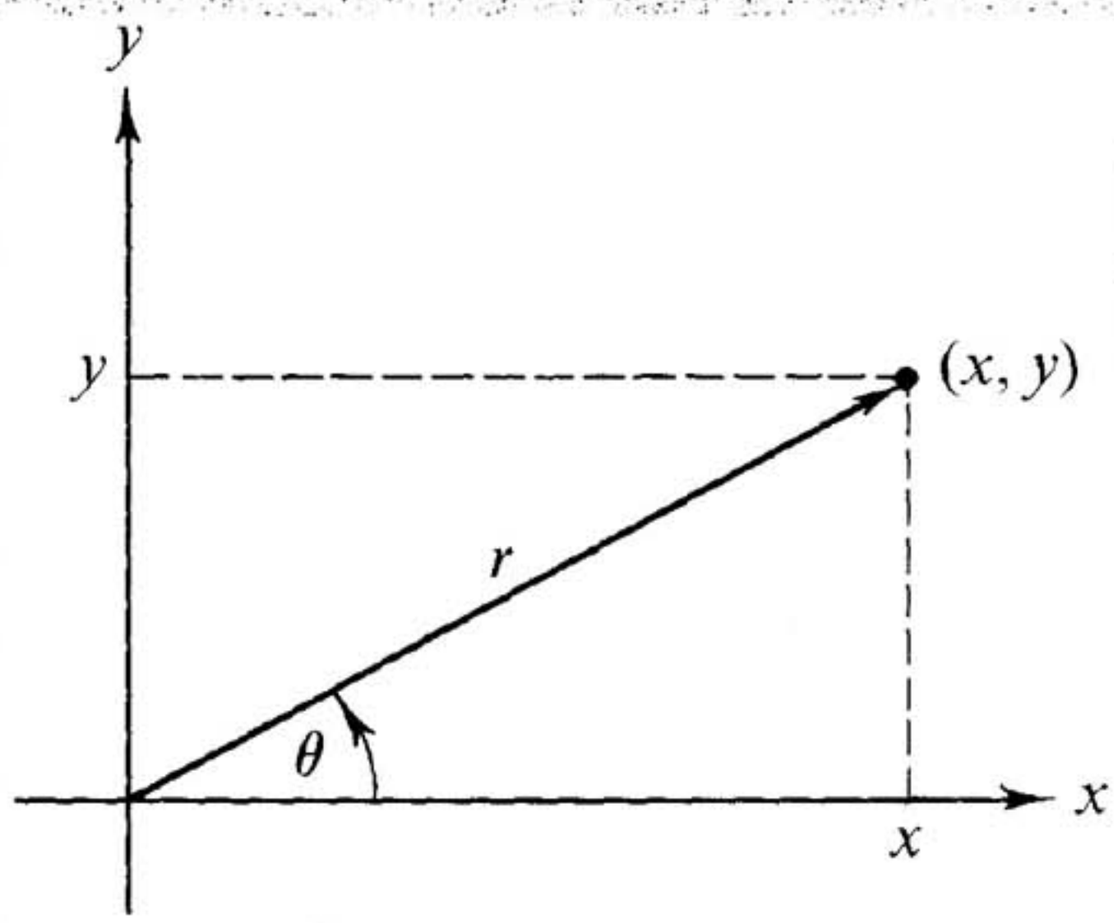


Fig. 6.1 Plano complejo: diagrama de Argando

Asimismo, de la Fig. 6.1, se puede indicar

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \tag{6.2}$$

y

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{6.3}$$

Utilizando el resultado sugerido (pero no demostrado en forma rigurosa)[1] por la Sección 5.6, se tiene la representación polar de bastante utilidad

$$z = re^{i\theta}. \tag{6.4}$$

En esta representación, r se denomina módulo o magnitud de z ($r = |z|$) y el ángulo θ se denomina argumento o fase de z.

Analítica o gráficamente, mediante el uso de 1 vector de analogia, se puede demostrar que el módulo de la suma de dos números complejos no es mayor que la suma de los módulos y no menor que la diferencia, Ejercicio 6.1.2,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{6.5}$$

Debido a la analogía vectorial, se denominan desigualdades triangulares.

Utilizando la forma polar, Ec. 6.4, la magnitud del producto es el producto de las magnitudes,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \tag{6.6}$$

Asimismo,

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{6.7}$$

De acuerdo con nuestra variable compleja z, las funciones complejas $f(z)$ o $w(z)$ se pueden construir. Estas funciones complejas se pueden resol-

[1] Hablando estrictamente el Capítulo 5 se ha limitado a las variables reales. Sin embargo, podemos definir e^z como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ para la z compleja. El desarrollo de las expansiones de serie de potencias para las funciones complejas se considera en la Sección 6.5 (desarrollo de Laurent).

ver luego en las partes real e imaginaria

$$w(z) = u(x, y) + i\,v(x, y), \tag{6.8}$$

en donde las funciones separadas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son realmente puras. Por ejemplo, si $f(z) = z^2$, se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 \\ &= (x^2 - y^2) + i\,2\,xy. \end{aligned}$$

La parte real de una función $f(z)$ se denomina $\mathscr{R}f(z)$, mientras que la parte imaginaria se denomina $\mathscr{I}f(z)$. En la Ec. 6.8 anterior,

$$\mathscr{R}w(z) = u(x, y),$$

$$\mathscr{I}w(z) = v(x, y).$$

En todos estos pasos, el número complejo, la variable compleja y la función compleja, la operación de sustituir i por $-i$ se denomina "considerar el conjugado complejo". El conjugado complejo de z se designa como z^* en que[1]

$$z^* = x - iy. \tag{6.9}$$

La variable compleja de z y su conjugado complejo z^* son imágenes de es-

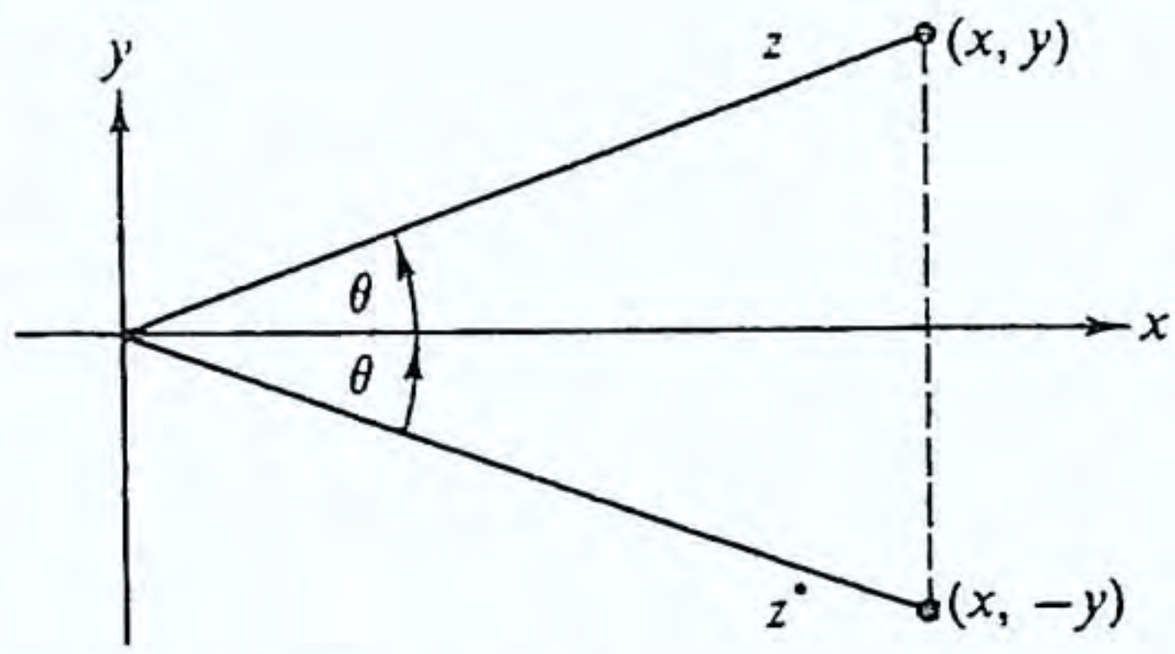


Fig. 6.2 Puntos conjugados complejos

pejo entre sí reflejadas en el eje x, es decir la inversión del eje y (cf. Fig. 6.2). El producto zz^* origina

$$\begin{aligned} zz^* = (x + iy)(x - iy) &= x^2 + y^2 \\ &= r^2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

En consecuencia

$$(zz^*)^{1/2} = |z|,$$

es decir, la magnitud de z.

[1] El conjugado complejo frecuentemente se denomina por $\bar{z}$.

Funciones de una Variable Compleja. Todas las funciones elementales de variables reales se pueden ampliar al plano complejo —sustituyendo la variable real x por la variable compleja z. Esto es un ejemplo de la combinación analítica mencionada en la Sección 6.5. La relación extremadamente importante, Ec. 6.4, constituye una ilustración de esto. El pasar al plano complejo presenta nuevas oportunidades de análisis.

EJEMPLO 6.1. FORMULA DE DE MOIVRE

Si la Ec. 6.3 se eleva a la potencia n, se tiene

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n. \tag{6.11}$$

Desarrollando el exponencial ahora con el argumento $n\theta$,

$$\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n. \tag{6.12}$$

Esto representa la fórmula de De Moivre.

Ahora bien, si el lado derecho de la Ec. 6.12 se desarrolla mediante el teorema binomial se obtiene cos $n\theta$ como una serie de potencias de cos θ y sen θ Ejercicios 6.1.4.

En los ejercicios aparecen muchos otros ejemplos de las relaciones entre las funciones exponencial, hiperbólica y trigonométricas en el plano complejo.

Ocasionalmente se presentan complicaciones. El logaritmo de una variable compleja se puede desarrollar utilizando la representación polar

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln re^{i\theta} \\ &= \ln r + i\theta. \end{aligned} \tag{6.13a}$$

Esto no está completo. Al ángulo de fase θ se puede agregar cualquier múltiplo integral de 2π sin cambiar z. En consencuencia, la Ec. 6.13a debe indicarse en la forma

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln re^{i(\theta + 2n\pi)} \\ &= \ln r + i(\theta + 2n\pi). \end{aligned} \tag{6.13b}$$

El parámetro n puede ser cualquier número entero. Esto significa que ln z es una función multivaluada que tiene un número infinito de valores para un par simple de valores reales de r y θ. Para evitar las ambigüedades, normalmente se acepta considerar $n = 0$ y limitar la fase a un intervalo de longitud 2π tal como $(-\pi, \pi)$. La línea en el plano z que no queda atravesada, que en este caso es el eje real negativo, se denomina *línea de corte.*

En la Sección 6.6 aparece una descripción adicional de estas funciones, incluyendo el logaritmo.

EJERCICIOS

6.1.1 Las cantidades complejas $a = u + iv$ y $b = x + iy$ también se pueden representar como vectores bidimensionales $\mathbf{a} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$. Demuestre que

$$a^*b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

6.1.2 Demuestre algebraicamente que

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Interprete este resultado en términos de vectores.

6.1.3 Demuestre que los números complejos tienen raíces cuadradas y que las raíces cuadradas se encuentran contenidas en el plano complejo. ¿Cuáles son las raíces cuadradas de i?

6.1.4 Demuestre que

$$\text{(a)}\ \cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta \operatorname{sen}^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta \operatorname{sen}^4\theta - \cdots.$$

$$\text{(b)}\ \operatorname{sen} n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta \operatorname{sen}\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta \operatorname{sen}^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta \operatorname{sen}^5\theta - \cdots$$

Nota. Las cantidades $\binom{n}{m}$ son coeficientes binomiales: $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$

6.1.5 Demuestre que

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{N-1} \cos nx = \frac{\operatorname{sen} N(x/2)}{\operatorname{sen} x/2} \cos (N-1)\frac{x}{2},$$

$$\text{(b)}\ \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen} N(x/2)}{\operatorname{sen} x/2} \operatorname{sen} (N-1)\frac{x}{2}.$$

Estas series se presentan en el análisis del modelo de difracción de rendija múltiple. Otra aplicación se tiene en el análisis del fenómeno de Gibbs, Sección 14.5.
Sugerencia. Las partes (a) y (b) se pueden combinar para formar la serie *geométrica* (cf. Sección 5.1).

6.1.6 Para $-1 < p < 1$ demuestre que

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} p^n \cos nx = \frac{1 - p\cos x}{1 - 2p\cos x + p^2}, \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} p^n \operatorname{sen} nx = \frac{p \operatorname{sen} x}{1 - 2p\cos x + p^2}.$$

Esta serie se presenta en la teoría del interferómetro de Fabry-Perot.

6.1.7 Suponga que las funciones trigonométricas y las funciones hiperbólicas se definen para un argumento complejo mediante la serie de potencias adecuadas

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=1,\text{ non}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0,\text{ par}}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!},$$

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=1,\text{non}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!},$$

$$\cosh z = \sum_{n=0,\text{par}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{2s}}{(2s)!},$$

(a) Demuestre que $\quad i \operatorname{sen} z = \operatorname{senh} iz, \qquad \operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z,$

$\cos z = \cosh iz, \qquad \cos iz = \cosh z.$

(b) Verifique que las relaciones funcionales ya conocidas, tal como

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1,$$

aún son consistentes en el plano complejo.

6.1.8 Utilizando las identidades

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

Establecidas para la comparación de las series de potencias, demuestre que

(a) $\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y,$

$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$

(b) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y,$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$

Esto demuestra que podemos tener $\operatorname{sen} z$, $\cos z > 1$ en el plano complejo.

6.1.9 A partir de las identidades en el Ejercicio 6.1.7 y 6.1.8, demuestre que

(a) $\operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y,$

$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y,$

(b) $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y,$

$|\cosh z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y.$

6.1.10 Demuestre que

(a) $\tanh(z/2) = \dfrac{\operatorname{senh} x + i \operatorname{sen} y}{\cosh x + \cos y}$

(b) $\coth(z/2) = \dfrac{\operatorname{senh} x - i \operatorname{sen} y}{\cosh x - \cos y}.$

Estas relaciones serán de utilidad en los problemas de representación conformal que implican las coordenadas bipolares. Secciones 6.7 y 6.8.

6.1.11 Encuentre todos los ceros de

(a) $\operatorname{sen} z$, (c) $\operatorname{senh} z$,

(b) $\cos z$, (d) $\cosh z$.

6.1.12 Demuestre que

(a) $\operatorname{sen}^{-1} z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2}),$

(b) $\cos^{-1} z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}),$

(c) $\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2} \ln\left(\dfrac{i + z}{i - z}\right),$

(d) $\operatorname{senh}^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}),$

(e) $\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}),$

(f) $\tanh^{-1} z = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + z}{1 - z}\right).$

Sugerencia. 1. Exprese las funciones trigonométricas e hiperbólicas en términos de exponenciales. 2. Resuelva para el exponencial y luego para el exponente.

6.1.13 En la teoría cuántica de la fotoionización se encuentra la identidad

$$\left(\frac{ia-1}{ia+1}\right)^{ib} = e^{-2b\cot^{-1}a},$$

en donde a y b son reales. Verifique esta identidad.

6.1.14 Una onda de luz plana de frecuencia angular ω está representada por

$$e^{i\omega(t-nx/c)}$$

En cierta sustancia, el índice de refracción real simple n se sustituye por la cantidad compleja $n - ik$. ¿Cuál es el efecto de k en la onda? ¿A qué corresponde físicamente k? La generalización de una cantidad de la forma real a la compleja se presenta continuamente en la física. Los ejemplos varían desde el módulo de Young relacionado con los materiales viscoelásticos, hasta el potencial complejo del modelo de "bola de cristal nebuloso" del núcleo atómico.

6.1.15 De acuerdo con los componentes de momento angular definidos en el Ejercicio 2.4.12, se tiene que

$$(L_x - iL_y) \neq (L_x + iL_y)^*$$

Explique por qué ocurre esto.

6.1.16 Demuestre que la *fase* de $f(z) = u + iv$ es igual a la parte imaginaria del logaritmo de $f(z)$. El Ejercicio 10.2.8 depende de este resultado.

6.2 Condiciones de Cauchy-Riemann

Habiendo establecido las funciones complejas de una variable compleja, ahora procederemos a diferenciar las mismas. La derivada de $f(z)$, igual que la correspondiente a una función real, se define por

$$\begin{aligned}\lim_{\delta z\to 0}\frac{f(z+\delta z)-f(z)}{z+\delta z-z} &= \lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta f(z)}{\delta z}\\ &= \frac{df}{dz} \quad \text{o} \quad f'(z),\end{aligned} \tag{6.14}$$

considerando que el límite es *independiente* del procedimiento particular para establecer el punto z. Para las variables reales, se requiere que el límite derecho ($x \to x_0$ desde arriba) y el límite izquierdo ($x \to x_0$ desde abajo) sean iguales a la derivada $df(x)/dx$ para que exista en $x = x_0$. Ahora bien, siendo z (o z_0) un punto en el *plano,* nuestro requisito de que el límite sea independiente de la dirección de aproximación es bastante restrictivo.

Considere los incrementos δx y δy de las variables x e y, respectivamente. Siendo así,

$$\delta z = \delta x + i\,\delta y. \tag{6.15}$$

Asimismo

$$\delta f = \delta u + i\,\delta v, \tag{6.16}$$

de modo que

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u + i\,\delta v}{\delta x + i\,\delta y} \tag{6.17}$$

Consideremos el límite definido en la Ec. 6.14 mediante dos procedimientos de aproximación distintos, tal como se muestra en la Fig. 6.3. Primeramente, con $\delta y = 0$, permitimos que $\delta x \to 0$. La Ec. 6.14 proporciona

$$\begin{aligned} \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} &= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i\,\frac{\delta v}{\delta x} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \tag{6.18}$$

suponiendo la existencia de las derivadas parciales. Para una segunda aproximación, establecemos que $\delta x = 0$ y luego permitimos que $\delta y \to 0$. Esto origina

$$\begin{aligned} \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} &= \lim_{\delta y \to 0} \left(-i\,\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) \\ &= -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Si se pretende tener una derivada df/dz, las Ecs. 6.18 y 6.19 deben ser iguales. Igualando las partes reales y las partes imaginarias (del mismo modo que los componentes de los vectores), se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.20}$$

Estas son las famosas condiciones de Cauchy-Riemann. Fueron descubiertas por Cauchy y empleadas ampliamente por Riemann en su teoría de las funciones analíticas. Estas condiciones de Cauchy-Riemann son necesarias

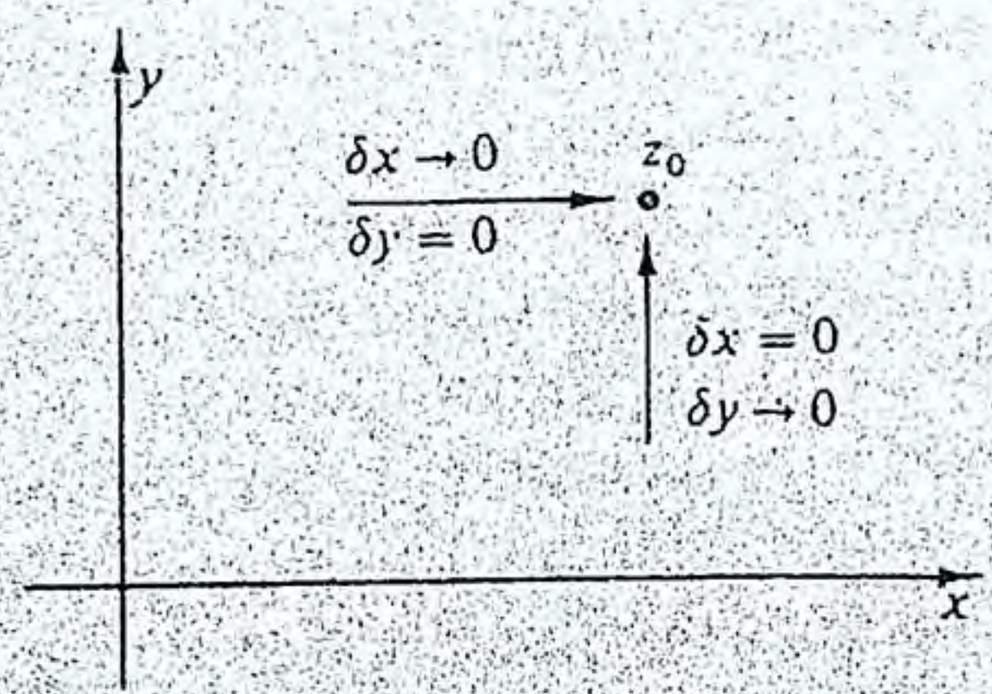


Fig. 6.3 Aproximaciones alternativas a z_0

para la existencia de una derivada de $f(x)$, es decir cuando existe df/dz, las condiciones de Cauchy-Riemann deben ser consistentes.

Alternativamente, cuando las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen y las derivadas parciales son continuas, la derivada existe. Esto puede indicarse en la forma

$$\delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y \tag{6.21}$$

y entonces

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x)}{1 + i(\delta y/\delta x)}\left[1 + i\,\frac{\delta y}{\delta x}\left(\frac{\partial v/\partial y - i(\partial u/\partial y)}{\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x)}\right)\right], \tag{6.22}$$

habiendo dividido el numerador y el denominador por la diferencial de x. Utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann (Ec. 6.20), se tiene

$$\frac{\partial v/\partial y - i(\partial u/\partial y)}{\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x)} = 1 \tag{6.23}$$

y

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{6.24}$$

lo cual demuestra que el límite $\delta f/\delta z$ es independiente de la dirección de aproximación en el plano complejo mientras las derivadas parciales sean continuas.

Es de hacerse notar que las condiciones de Cauchy-Riemann garantizan que las curvas $u = c_1$ sean ortogonales con respecto a las curvas $v = c_2$ (cf. Sección 2.1). Esto es fundamental en la aplicación a los problemas de potencial en una variedad de áreas de la física. Si $u = c_1$ es una línea de fuerza eléctrica, entonces $v = c_2$ es una línea equipotencial (superficie) y viceversa. En el Ejercicio 6.2.1 se desarrolla una implicación adicional de la teoría potencial.

Funciones analíticas. Finalmente, si $f(z)$ puede diferenciarse en $z = z$ y en una pequeña región alrededor de z_0, se dice que $f(z)$ es *analítica* en $z = z_0$. Si $f(z)$ es analítica en cualquier parte del plano complejo (finito), se dice que es función *completa*. Nuestra teoría de las variables complejas corresponde en este caso a una de las funciones analíticas de las variables complejas, la cual establece la importancia crucial de las condiciones de Cauchy-Riemann. El concepto de la capacidad de análisis que se considera en las teorías avanzadas de la física moderna tiene un papel importante en la teoría de la dispersión (de las partículas elementales). Si $f'(z)$ no existe en $z = z_0$, entonces z_0 se denomina punto singular y la consideración del mismo se pospone hasta la Sección 7.1.

Para ilustrar las condiciones de Cauchy-Riemann, considere dos ejemplos bastante simples.

EJEMPLO 6.2.1

Sea $f(z) = z^2$. Siendo así, la parte real $u(x, y) = x^2 - y^2$ y la parte imaginaria $v(x, y) = 2xy$. De acuerdo con la Ec. 6.20

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se observa que $f(z) = z^2$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en el plano complejo. Ya que las derivadas parciales son evidentemente continuas, se concluye que $f(z) = z^2$ es analítica.

EJEMPLO 6.2.2

Sea $f(z) = z^*$. Ahora $u = x$ y $v = -y$. Aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann *no* se satisfacen y $f(z) = z^*$ no corresponde a una función analítica de z. Es interesante hacer notar que $f(z) = z^*$ es continua, proporcionado, así, un ejemplo de una función que en toda parte resulta continua pero que en ninguna parte puede diferenciarse.

La derivada de una función real de una variable real es esencialmente una característica local en cuanto a que proporciona información acerca de la función solamente en una cercanía local; por ejemplo, a modo de un desarrollo de Taylor truncado. La existencia de la derivada de una función de variable compleja tiene implicaciones de mucho mayor alcance. Las partes real e imaginaria de nuestra función analítica deben satisfacer separadamente la ecuación de Laplace. Esto es lo que representa el Ejercicio 6.2.1. Por otra parte, nuestra función analítica está respaldada por derivadas de todos los órdenes, Sección 6.4. En este sentido, la derivada no solo gobierna el comportamiento local de la función compleja sino que controla también el comportamiento distante.

EJERCICIOS

6.2.1 Las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son las partes real e imaginaria respectivamente de una función analítica $w(z)$.

(a) Suponiendo que existen las derivadas requeridas, demuestre que

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

(b) Demuestre que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

y proporcione una interpretación geométrica.

6.2.2 Habiendo demostrado que la parte real $u(x, y)$ y la parte imaginaria $v(x, y)$ de una función analítica $w(z)$ satisfacen individualmente la ecuación de Laplace, demuestre que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ no pueden tener un máximo o mínimo en el interior de ninguna región en que $w(z)$ es analítica. (Pueden tener puntos singulares.)

6.2.3 Sea $A = \partial^2 w / \partial x^2$, $B = \partial^2 w / \partial x\, \partial y$, $C = \partial^2 w / \partial y^2$. A partir del cálculo de las funciones de *dos* variables, $w(x, y)$, se tiene un punto singular cuando

$$B^2 - AC > 0.$$

Con $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, aplique las condiciones de Cauchy-Riemann y demuestre que $u(x, y)$ o $v(x, y)$ no tienen máximo o mínimo en una región finita del plano complejo.

6.2.4 Establezca las funciones analíticas

$$w(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

si

(a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$,

(b) $v(x, y) = e^{-y} \operatorname{sen} x$.

6.2.5 Si existe una región donde $w_1 = u(x,y) + iv(x,y)$ y $w_2 = w_1^* = u(x,y) - iv(x,y)$ ambas son analíticas, demuestre que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son consonantes.

6.2.6 Utilizando $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Theta(r,\theta)}$, en que $R(r, \theta)$ y $\Theta(r, \theta)$ son funciones reales de r y θ, que pueden diferenciarse, demuestre que las condiciones de Cauchy-Riemann en las coordenadas polares se transforman en

(a) $\dfrac{\partial R}{\partial r} = \dfrac{R}{r}\dfrac{\partial \Theta}{\partial \theta}$,

(b) $\dfrac{\partial R}{r\,\partial \theta} = -R\dfrac{\partial \Theta}{\partial r}$.

6.2.7 Como extensión del Ejercicio 6.2.6, demuestre que $\Theta(r, \theta)$ satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares, Ec. 2.65 (sin el término final).

6.2.8 Un flujo de fluido irrotacional de dos dimensiones se describe convenientemente por medio de un potencial complejo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Denominaremos a la parte real $u(x, y)$ potencial de velocidad y a la parte imaginaria $v(x, y)$ la función de corriente. La velocidad de fluido $\mathbf{V}$ está determinada por $\mathbf{V} = \nabla u$. Si $f(z)$ es analítica

(a) Demuestre que $df/dz = V_x - iV_y$,

(b) Demuestre que $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ (sin fuentes o sumideros).

(c) Demuestre que $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ (flujo no turbulento irrotacional).

6.3 Teorema de la Integral de Cauchy

Integrales de Contorno. Con la diferenciación bajo control, regresaremos a la integración. La integral de una variable compleja sobre un contorno en el plano complejo se puede definir de manera muy parecida a la integral (Riemann) de una función real integrada a lo largo del eje x real.

Se divide el contorno $z_0 z_0'$ en n intervalos al seleccionar $n - 1$ puntos intermedios $z_1, z_2, \ldots$ en el contorno. Considere la suma

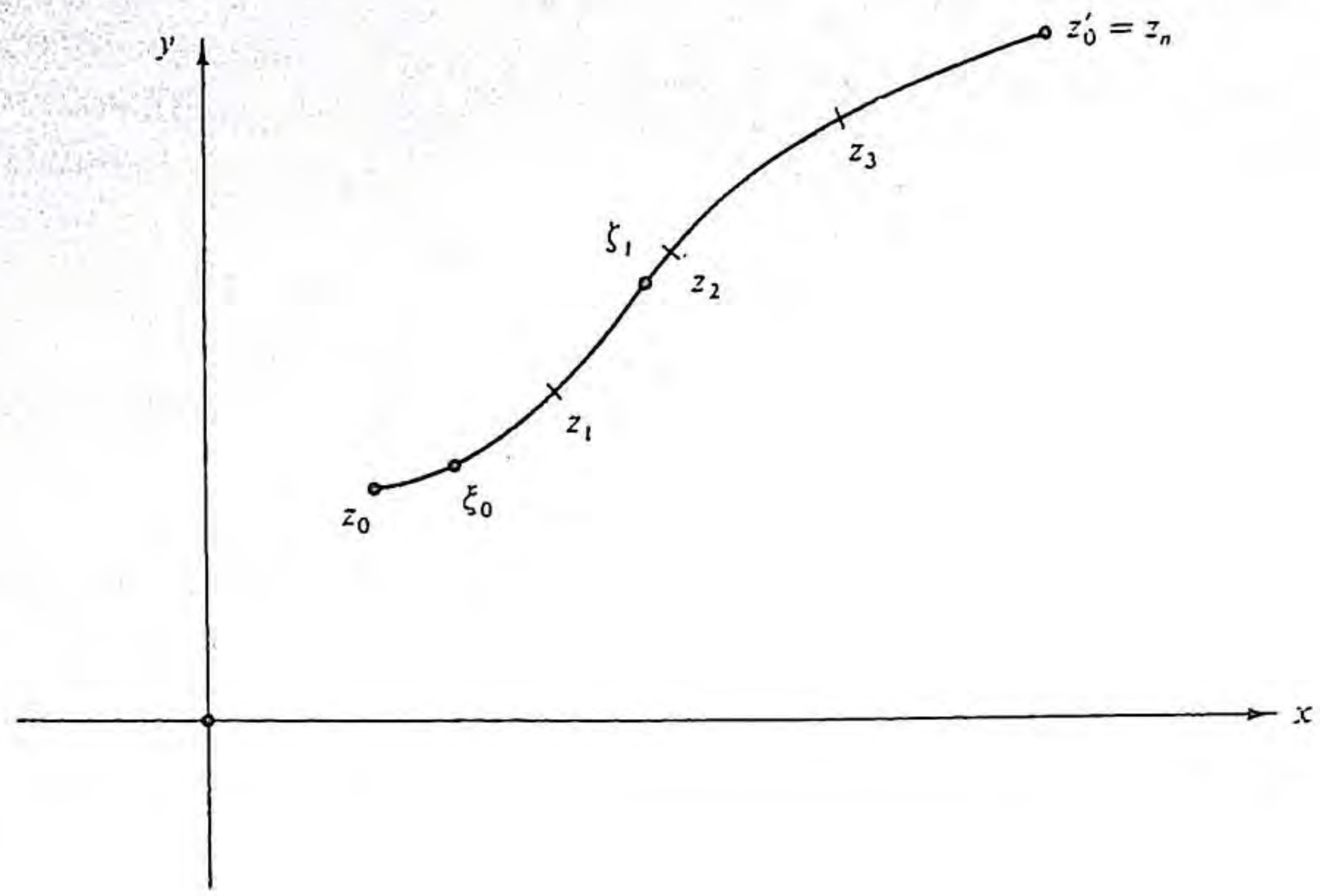


Fig. 6.4

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \tag{6.25}$$

en donde ζ_j es un punto en la curva entre z_j y z_{j-1}. Ahora, sea $n \to \infty$ con

$$|z_j - z_{j-1}| \to 0$$

para todas las j. Si el $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe y es independiente de los detalles en cuanto a la selección de los puntos z_j y ζ_j, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_0}^{z_0'} f(z)\, dz. \tag{6.26}$$

El lado derecho de la Ec. 6.26 se denomina integral de contorno de $f(z)$ (a lo largo del contorno C específico desde $z = z_0$ hasta $z = z_0'$).

Demostración del teorema de Stokes. El teorema de la integral de Cauchy es el primero de dos teoremas básicos relacionados con la teoría del comportamiento de las funciones de una variable compleja. Primeramente, una demostración bajo condiciones relativamente limitantes, condiciones que resultan intolerables para el matemático que pretende desarrollar una teoría abstracta maravillosa pero que normalmente se satisfacen en los problemas físicos.

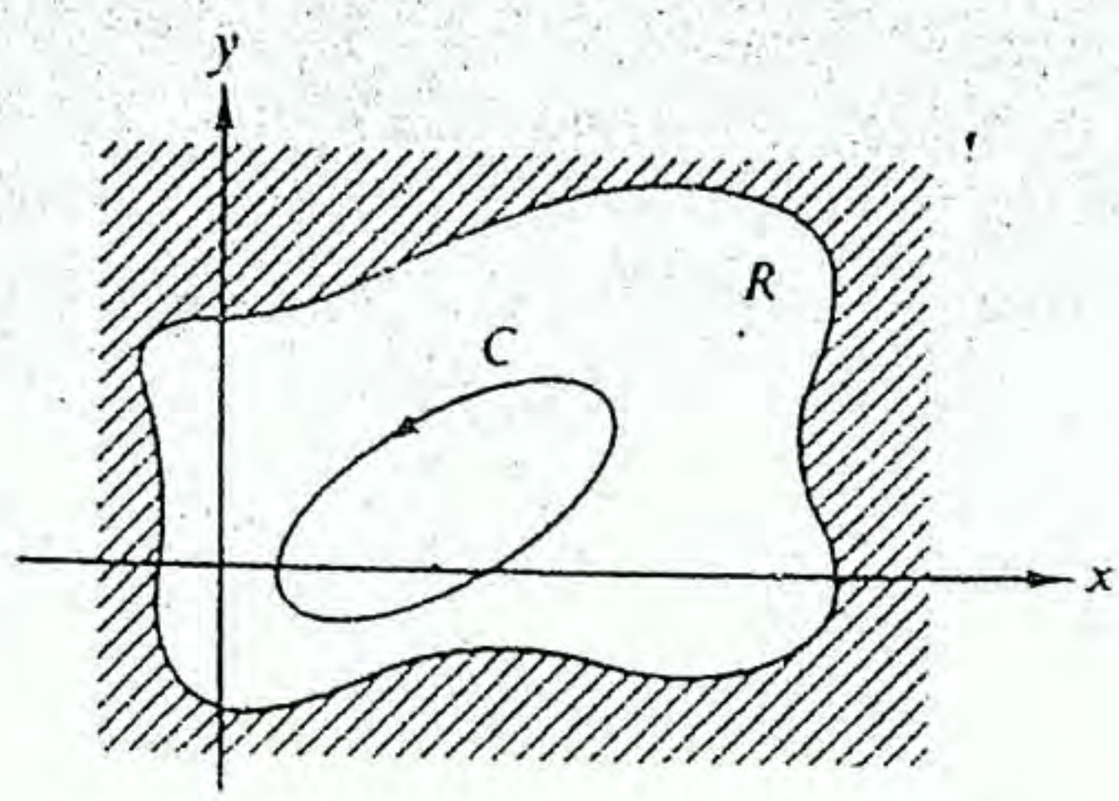


Fig. 6.5 Contorno cerrado C dentro de una región de conexión simple

Si la función $f(z)$ es analítica (y en consecuencia de valor simple) y sus derivadas parciales son continuas a través de una región R,[1] conectada simplemente para cada trayectoria cerrada C en R, la integral de línea de $f(z)$ alrededor de C es cero o

$$\int_C f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz = 0. \tag{6.27}$$

El símbolo $\oint$ se utiliza para poner de relieve que la trayectoria es cerrada. El lector recordará que en la Sección 1.13 tal función $f(z)$, identificada como una fuerza, se denominó conservativa.

En esta forma, el teorema de la integral de Cauchy se puede demostrar mediante la plicación directa del teorema de Stokes (Sección 1.12). Con $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ y $dz = dx + i\,dy$,

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \oint_C (u + iv)(dx + i\,dy)\\ &= \oint_C (u\,dx - v\,dy) + i\oint (v\,dx + u\,dy).\end{aligned} \tag{6.28}$$

Estas dos integrales de línea se pueden transformar en las integrales de superficie por medio del teorema de Stokes, procedimiento que se justifica en caso de que las derivadas parciales sean continuas dentro de C. Utilizando

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y,$$

se tiene

$$\oint_C (V_x\,dx + V_y\,dy) = \int \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{6.29}$$

[1] Una región o dominio conectado simplemente es aquel en donde cada contorno cerrado de dicha región encierra solamente los puntos contenidos en el mismo. Si una región no está conectada simplemente, se denomina conectada múltiplemente. Como ejemplo de una región de conexión múltiple, considere el plano z en que se *excluye* el interior del círculo unitario.

A partir de la primera integral en la última parte de la Ec. 6.28, sea $u = V_x$ y $v = -V_y$.[1] Siendo así

$$\oint_C (u\,dx - v\,dy) = \oint_C (V_x\,dx + V_y\,dy)$$

$$= \int \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{6.30}$$

$$= -\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Para la segunda integral en el lado derecho de la Ec. 6.28, sea $u = V_y$ y $v = V_x$. Utilizando nuevamente el teorema de Stokes, se obtiene

$$\oint (v\,dx + u\,dy) = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{6.31}$$

En la aplicación de las condiciones de Cauchy-Riemann que deben ser consistentes ya que $f(z)$ se supone que es analítica, cada *integrando* desaparece y

$$\oint f(z)\,dz = -\int \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= 0. \tag{6.32}$$

Demostración de Cauchy-Goursat. Esto completa la demostración del teorema de la integral de Cauchy. Sin embargo, la demostración queda estropeada tomando en cuenta el punto de vista de que hay necesidad de la continuidad de estas derivadas parciales. De hecho, tal como lo ha demostrado Goursat, esta condición no es esencial. La idea de la demostración de Goursat, es como sigue: Se subdivide la región dentro del contorno C en una red de pequeños cuadrados como se indica en la Fig. 6.6. Siendo así

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_j \oint_{C_j} f(z)\,dz \tag{6.33}$$

todas las integrales a lo largo de las líneas interiores se cancelan. Para la resolución de $\oint_{C_j} f(z)\,dz$ se construye la función

$$\delta_j(z, z_j) = \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - \left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_j} \tag{6.34}$$

siendo z_j punto interior de la subregión j. Vea que $[f(z) - f(z_j)]/(z - z_j)$ es una aproximación a la derivada de $z = z_j$. De modo equivalente, se

[1] En la demostración del teorema de Stokes, Sección 1.12, V_x y V_y son dos funciones cualesquiera (con derivadas parciales continuas).

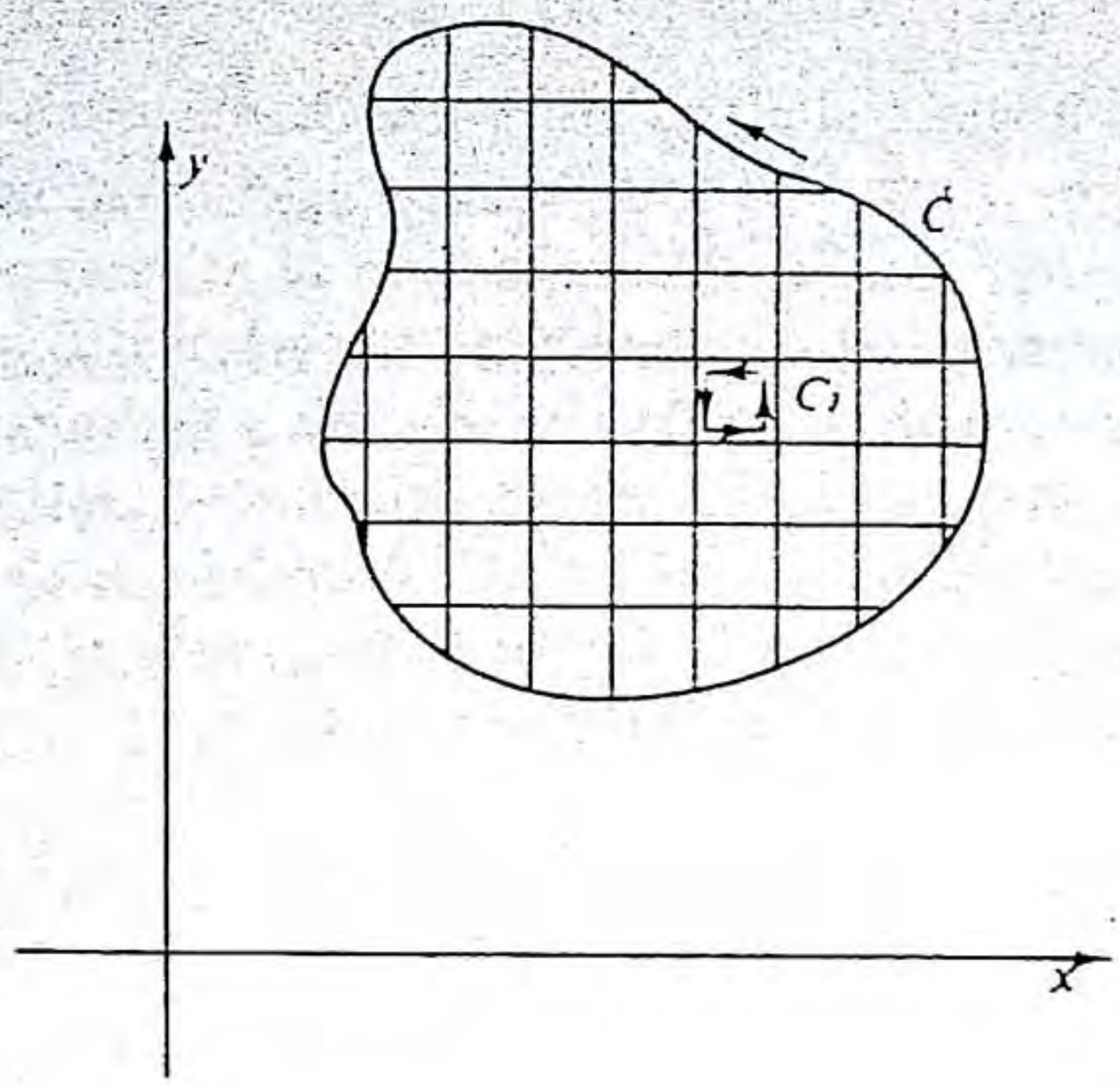


Fig. 6.6 Contornos de Cauchy-Goursat

puede observar que cuando $f(z)$ tenía el desarrollo de Taylor (que aún no hemos demostrado), entonces $\delta_j(z, z_j)$ sería del orden $z - z_j$, aproximándose a cero conforme la red se hace más fina. Podemos establecer que

$$|\delta_j(z, z_j)| < \varepsilon, \tag{6.35}$$

en donde ε es una cantidad positiva, pequeña, seleccionada arbitrariamente.

Resolviendo la Ec. 6.34 para $f(z)$ e integrando alrededor de C_j

$$\oint_{C_j} f(z)\, dz = \oint_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z, z_j)\, dz \tag{6.36}$$

las integrales de los otros términos desaparecen. Cuando las Ecs. 6.35 y 6.36 se combinan, una de las mismas puede indicar que

$$\left| \sum_j \oint_{C_j} f(z)\, dz \right| < A\varepsilon \tag{6.37}$$

en donde A es un término del orden del área de la región encerrada. Ya que ε es arbitraria, se permite que $\varepsilon \to 0$ y se concluye que:

Si una función $f(z)$ es una función analítica en y dentro de una trayectoria cerrada C,

$$\oint_C f(z)\, dz = 0. \tag{6.38}$$

Los detalles de la demostración de esta forma significativa, más generales y poderosos, se pueden encontrar en el texto de Churchill y en otras referencias mencionadas. De hecho, aún podemos demostrar el teorema en

cuanto a que $f(z)$ sea analítica dentro del interior de C y solamente continua en C.

La consecuencia del teorema de la integral de Cauchy es que para las funciones analíticas, la integral de línea solamente es una función en los puntos terminales o extremos;

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)\,dz, \tag{6.39}$$

de nuevo, exactamente como en el caso de la fuerza conservativa; Sección 1.1.3.

Regiones de conexión múltiple. El establecimiento original de nuestro teorema requería de una región conectada simplemente. Esta restricción puede relajarse mediante la creación de una barrera, una línea de corte. Considere la región de conexión múltiple mostrada en la Fig. 6.7, en donde $f(z)$ no está definida para el interior R'. El teorema de la integral de Cauchy no es válido para el contorno C, tal como se muestra, pero se puede construir un contorno C' para el cual el teorema sea consistente. Se corta desde el interior de la región vedada R', al exterior de la región vedada a R y luego se traza un nuevo contorno C' como se muestra en la Fig. 6.8.

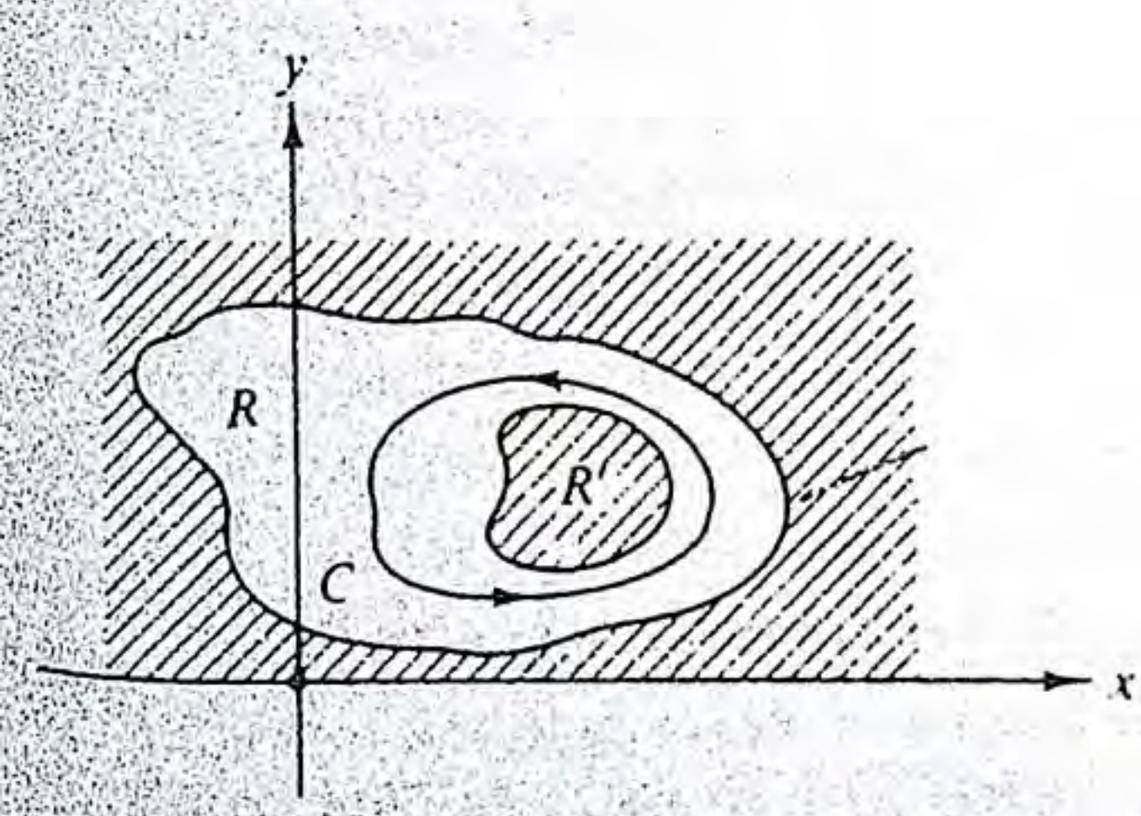


Fig. 6.7 Contorno cerrado C en una región conectada de manera múltiple

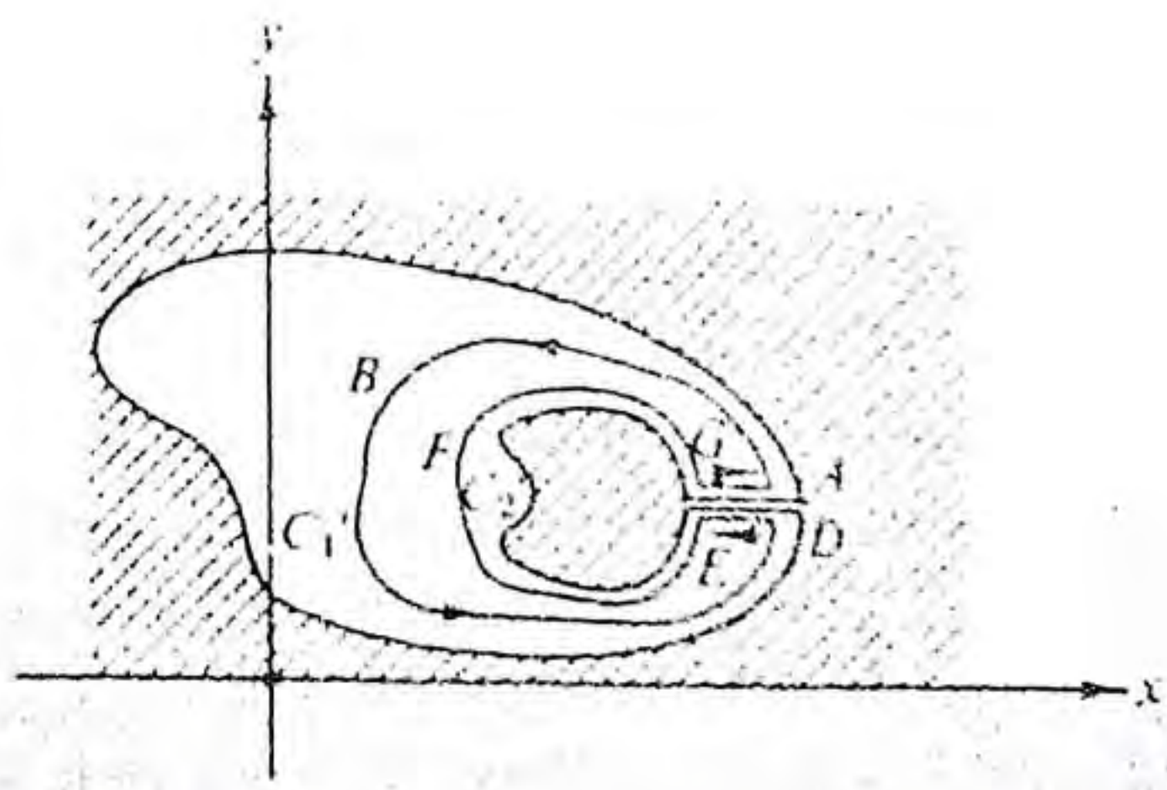


Fig. 6.8 Conversión de una región de conexión múltiple en una región de conexión simple.

El nuevo contorno C' a través de $ABDEFGA$ nunca atraviesa la línea de corte que literalmente transforma a R en una región de conexión simple. El análogo tridimensional de esta técnica ha sido utilizado en la Sección 1.14 para demostrar la ley de Gauss. Mediante la Ec. 6.39

$$\int_G^A f(z)\,dz = -\int_E^D f(z)\,dz, \tag{6.40}$$

en donde $f(z)$ es continua a través de la línea de corte y los segmentos de línea DE y GA cerrados arbitrariamente entre sí. Siendo así

$$\oint_{C'} f(z)\,dz = \int_{ABD} f(z)\,dz + \int_{EFG} f(z)\,dz$$
$$= 0 \tag{6.41}$$

mediante el teorema de la integral de Cauchy, de modo que la región R se encuentra ahora conectada de manera simple. Aplicando la Ec. 6.39 nuevamente con $ABD \to C_1'$ y $EFG \to -C_2'$ se obtiene

$$\oint_{C'_1} f(z)\,dz = \oint_{C'_2} f(z)\,dz, \tag{6.42}$$

en donde C_1' y C_2' se han girado en la misma dirección (contraria a las manecillas del reloj).

EJERCICIOS

6.3.1 Demuestre que

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq |f|_{\text{máx}} \cdot L$$

en donde $|f|_{\text{máx}}$ es el valor máximo de $|f(z)|$ a lo largo del contorno C, y L es la longitud del contorno.

6.3.2 Verifique que

$$\int_{0,0}^{1,1} z^*\,dz$$

depende de la trayectoria para la evaluación de la integral en el caso de las dos trayectorias que se muestran en la Fig. 6.9. Recuerde que $f(z) = z^*$ no es una función analítica simple de z y que el teorema de la integral de Cauchy consecuentemente no puede aplicarse.

6.3.3 Demuestre que

$$\oint \frac{dz}{z^2 + z} = 0,$$

en donde el contorno C es un círculo definido por $|z| = R > 1$. En la Sección 7.2 se demuestra que la integral proporciona $2\pi i$ para $R < 1$.

6.4 Fórmula de la Integral de Cauchy

Del mismo modo que en la sección anterior, se considera una función $f(z)$ que es analítica en un contorno cerrado C y en el interior de la región circundada por C. Se pretende demostrar que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0), \tag{6.43}$$

en que z_0 es algún punto en la región interior limitada por C. Este es el segundo de los dos teoremas básicos mencionados en la Sección 6.2.

Aun suponiendo que $f(z)$ es analítica, el *integrando* es $f(z)/(z - z_0)$ y esto no es analítico a $z = z_0$. Si el contorno se deforma como se muestra en la Fig. 6.10 (o la Fig. 6.8, Sección 6.3), el teorema de la integral de Cauchy es aplicable. Mediante la Ec. 6.42

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \tag{6.44}$$

en donde C es el contorno exterior original y C_2 es el círculo que rodea el punto z_0 girado en la dirección *contraria a las manecillas del reloj*. Sea $z = z_0 + re^{i\theta}$ usando la representación polar debido a la forma circular de la trayectoria alrededor de z_0. En este caso, r es pequeña y eventualmente tendrá que aproximarse a cero. Se tiene

$$\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{C_2} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, rie^{i\theta}\, d\theta.$$

Considerando el límite como $r \to 0$,

$$\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = i\, f(z_0) \oint_{C_2} d\theta$$

$$= 2\pi i\, f(z_0), \tag{6.45}$$

ya que $f(z)$ es analítica y consecuentemente continua en $z = z_0$. Esto demuestra la fórmula de la integral de Cauchy.

Lo que sigue es un resultado notable. El valor de una función analítica $f(z)$ está determinado en el punto interior $z = z_0$ una vez que los valores de la frontera C se especifican. Esto es bastante análogo a la forma bidimensional de la ley de Gauss (Sección 1.14), en que la magnitud de una carga

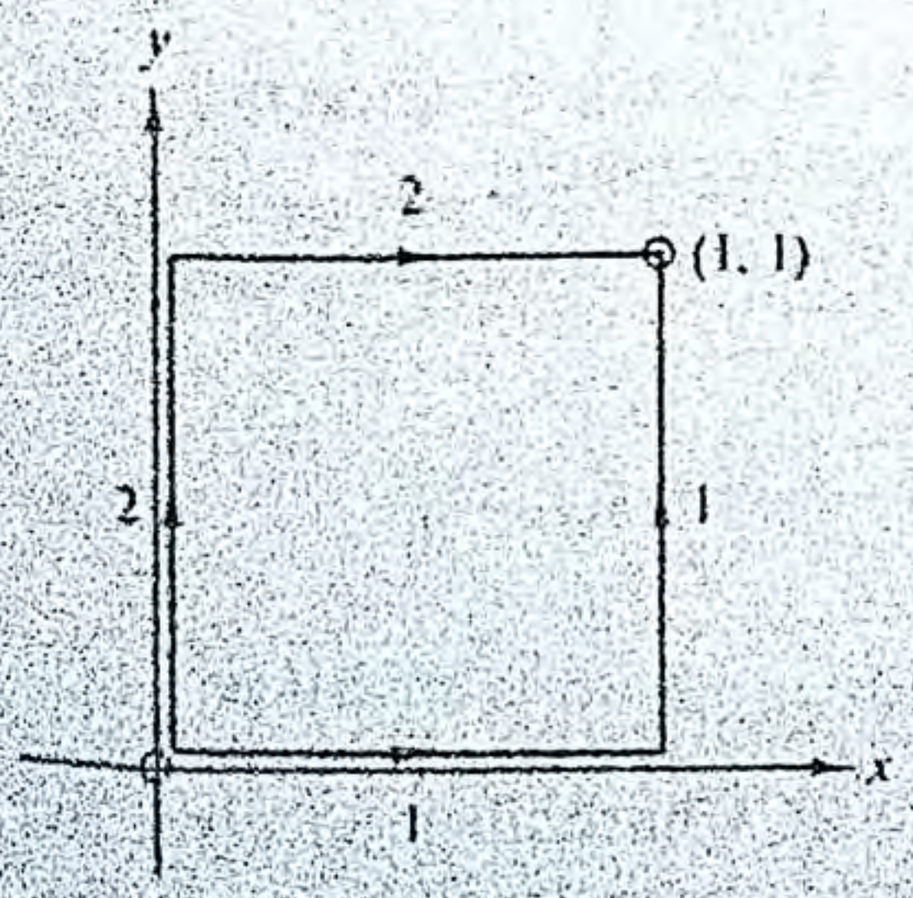


Fig. 6.9

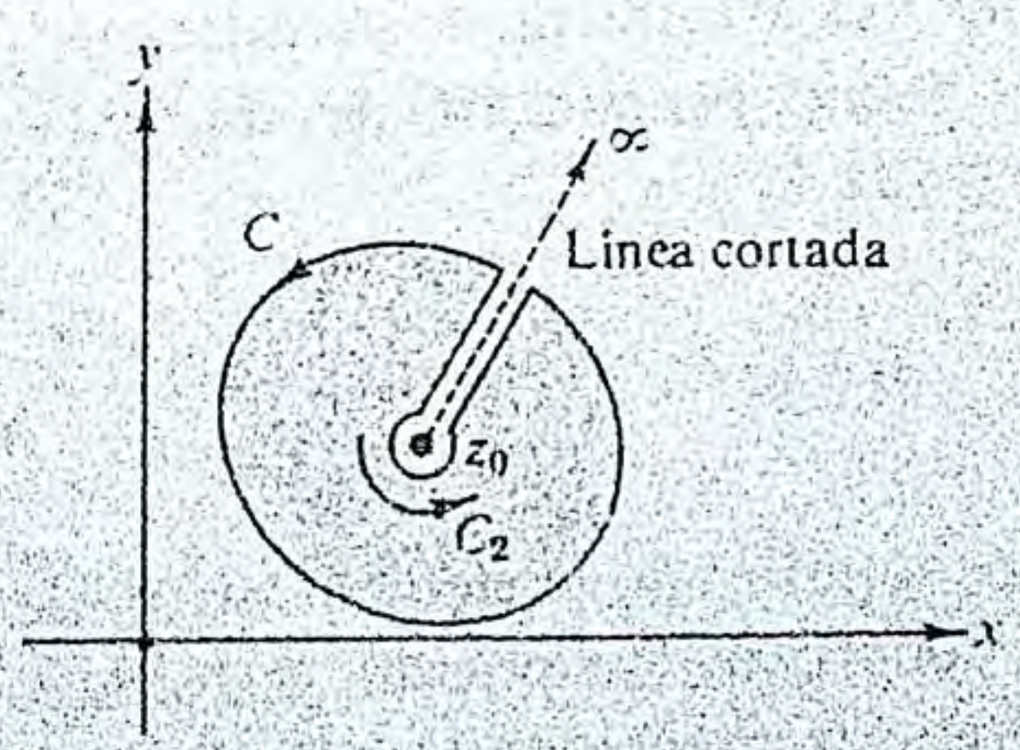


Fig. 6.10 Exclusión de un punto singular

de línea interior está determinada en términos de la integral de superficie cilíndrica del campo eléctrico **E**.

Una analogía adicional es la determinación de una función en el espacio real mediante la integral de la función y la función de Green correspondiente (y sus derivadas) sobre la superficie limitante. La teoría de difracción de Kirchhoff es un ejemplo de esto.

La fórmula de la integral de Cauchy se puede utilizar para obtener una expresión de la derivada para $f(z)$. A partir de la Ec. 6.43, con $f(z)$ analítica

$$\frac{f(z_0+\delta z)-f(z_0)}{\delta z}=\frac{1}{2\pi i\,\delta z}\left(\oint\frac{f(z)}{z-z_0-\delta z}\,dz-\oint\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right).$$

Luego, por definición de la derivada (Ec. 6.14),

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\,\delta z}\oint\frac{\delta z\,f(z)}{(z-z_0-\delta z)(z-z_0)}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz. \end{aligned} \tag{6.46}$$

El lector cuidadoso podrá observar que este resultado podría haberse obtenido mediante la diferenciación de la Ec. 6.43 bajo el signo de integral con respecto a z_0. Este procedimiento formal es válido, aunque la justificación del mismo se encuentra en el análisis presentado antes.

Este proceso de diferenciación puede repetirse para obtener

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}\,; \tag{6.47}$$

es decir, ¡el requisito de que $f(z)$ sea analítica no solamente garantiza la primera derivada sino las derivadas de *todos* los órdenes también! Las derivadas de $f(z)$ son analíticas automáticamente. El lector podrá observar que este enunciado asume la versión de Goursat del teorema de la integral de Cauchy. A esto se debe el que la contribución de Goursat sea tan significativa en el desarrollo de la teoría de las variables complejas.

Teorema de Morera. Una ampliación adicional de la fórmula de la integral de Cauchy se tiene en la demostración del teorema de Morera, el cual constituye lo inverso del teorema de la integral de Cauchy. El teorema establece lo siguiente:

Si una función $f(z)$ es continua en una región de conexión simple R y $\oint_C f(z)\,dz=0$ para cada contorno cerrado C dentro de R, entonces $f(z)$ es analítica en R.

Procedamos a integrar $f(z)$ desde z_1 hasta z_2. Ya que cada integral de trayectoria cerrada de $f(z)$ desaparece, la integral es independiente de la trayectoria y solamente depende de sus puntos extremos. El resultado de la integración se denomina $F(z)$, con

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz. \tag{6.48}$$

Como identidad,

$$\frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} - f(z_1) = \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f(t) - f(z_1)]\, dt}{z_2 - z_1}, \tag{6.49}$$

utilizando t como otra variable compleja. Ahora se considera el límite como $z_2 \to z_1$.

$$\lim_{z_2 \to z_1} \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f(t) - f(z_1)]\, dt}{z_2 - z_1} = 0, \tag{6.50}$$

ya que $f(z)$ es continua.[1] En consecuencia,

$$\lim_{z_2 \to z_1} \frac{F(z_2) - F(z_1)}{z_2 - z_1} = F'(z)\Big|_{z=z_1} = f(z_1) \tag{6.51}$$

por definición de la derivada (Ec. 6.14). Hemos demostrado que $F'(z)$ en $z = z_1$ existe y que equivale a $f(z_1)$. Ya que z_1 es cualquier punto en R, se tiene que $F(z)$ es analítica. Luego, mediante la fórmula de la integral de Cauchy (cf. Ec. 6.47), $F'(z) = f(z)$ también es analítica, demostrando así el teorema de Morera.

Delineando una vez más en nuestro análogo electrostático, $f(z)$ pudiera utilizarse para representar el campo electrostático $\mathbf{E}$. Si la carga neta dentro de cada región cerrada R es cero (ley de Gauss), la densidad de carga es cero en cualquier parte de R. Alternativamente, en términos del análisis de la Sección 1.13, $f(z)$ representa una fuerza conservativa (por definición de conservativa) y así se encuentra que siempre existe la posibilidad de expresarla como una derivada de la función de potencial $F(z)$.

Verificación de la Transformada Inversa de Fourier. Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones analíticas de z en la región de interés. Las dos funciones están relacionadas por

$$f_a(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{izw} g(w)\, dw. \tag{6.52}$$

En el Capítulo 15, $f(z)$ se denomina transformada de Fourier[2] de $g(w)$.

Ahora procederemos a demostrar, utilizando la fórmula de la integral de Cauchy, que

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} f_a(z)\, dz. \tag{6.53}$$

[1] En este caso podemos aplicar el teorema de cálculo correspondiente al valor medio.
[2] Se tomará el lim $a \to \infty$.

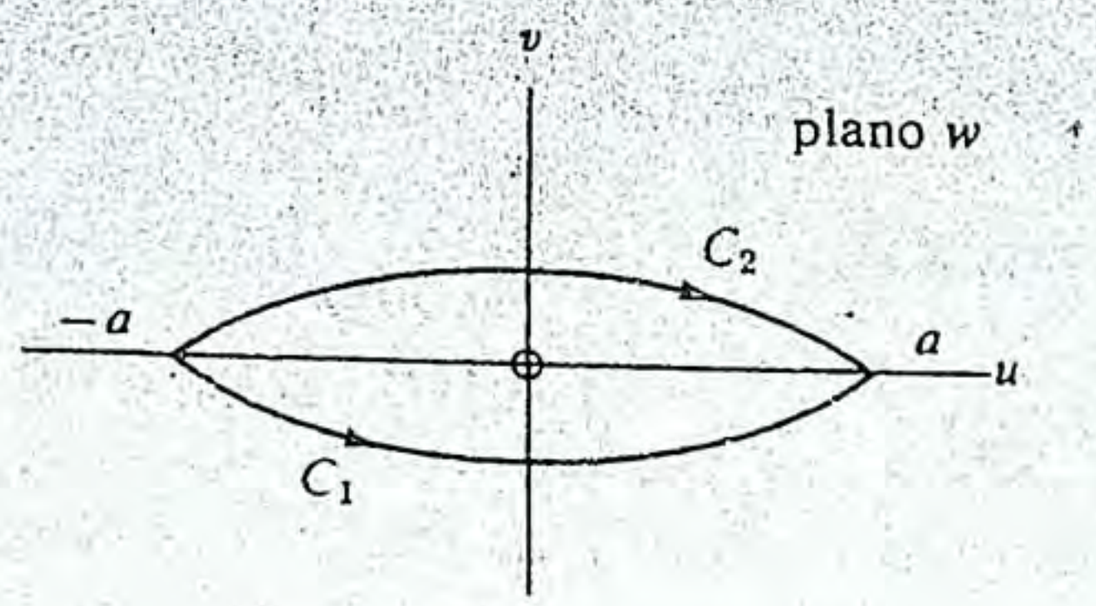


Fig. 6.11

Primeramente, debe observarse que $g(w)$ es analítica. Esto permite una deformación del contorno de la Ec. 6.52 fuera del eje real. Las dos posibilidades mostradas en la Fig. 6.11 se utilizan más adelante para proporcionar la convergencia y para originar una integral de contorno. A continuación, se evalúa $g(t)$ al sustituir $f_a(z)$ de la Ec. 6.52 en la Ec. 6.53, obteniendo

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt}\,dz \int_{-a}^{a} e^{izw}\,g(w)\,dw.$$

La integración de z se divide en dos partes y el orden de la integración se intercambia de modo que

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-a\,C_1}^{a} g(w)\,dw \int_{-\infty}^{0} e^{iz(w-t)}\,dz + \frac{1}{2\pi}\int_{a\,C_2}^{a} g(w)\,dw \int_{0}^{\infty} e^{iz(w-t)}\,dz. \quad (6.54)$$

En el primer término del lado derecho, la integración de w se realiza sobre el contorno C_1, mientras que C_2 se selecciona para la integración de w en el segundo término. Integrando, por medio de examen, con respecto a z primeramente (debido a que existe la posibilidad de esto), se obtiene

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} g(w)\,dw \left|\frac{e^{iz(w-t)}}{w-t}\right|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} g(w)\,dw \left|\frac{e^{iz(w-t)}}{w-t}\right|_{0}^{\infty}. \quad (6.55)$$

El exponencial puede indicarse como $e^{-zv}\,e^{iz(u-t)}$, en que w se sustituye por $u + iv$. Ahora bien, debido a la selección del contorno en el plano w, se tiene $\mathscr{I}(w) = v$, negativo para C_1, positivo para C_2. Nuestra selección del contorno garantiza que $e^{iz(w-t)}$ desaparece conforme $e^{-\infty}$ para $z \to \pm\infty$. La Ec. 6.55 se transforma en

$$I = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_1} \frac{g(w)}{w-t}\,dw - \int_{C_2} \frac{g(w)}{w-t}\,dw\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{g(w)}{w-t}\,dw.$$

Para $-a < t < a$, t se encuentra dentro del contorno cerrado, y mediante la fórmula de la integral de Cauchy

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} f_a(z)\, dz = g(t). \tag{6.56}$$

Este resultado (Ec. 6.56) (con $a \to \infty$) es la transformada inversa de Fourier.

Observe que hemos supuesto que $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas. Esta restricción de hecho es más severa de lo necesario para la validez de las ecuaciones de la transformada de Fourier.

EJERCICIOS

6.4.1 Demuestre que

$$\oint_C (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1, \end{cases}$$

en donde el contorno C rodea el punto $z = z_0$ en el sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). El exponente n es un número entero.

6.4.2 Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-n-1}\, dz, \qquad m \text{ y } n \text{ son números enteros}$$

(en donde el contorno rodea el origen una vez que se ha girado en el sentido contrario a las manecillas del reloj), es una representación de la delta de Kronecker $\delta_{m,n}$.

6.4.3 Resuelva el Ejercicio 6.3.3 separando el *integrando* en fracciones parciales y aplicando luego el teorema de la integral de Cauchy para las regiones de conexión múltiple.
Nota. Las fracciones parciales se describen en la Sección 15.7 en cuanto a su relación con las transformadas de Laplace.

6.4.4 Suponiendo que $f(z)$ es analítica en y dentro del contorno cerrado C y que el punto z_0 se encuentra dentro de C, demuestre que

$$\oint_C \frac{f'(z)}{(z - z_0)}\, dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz.$$

6.4.5 Demuestre que

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n},$$

en donde R es el radio del círculo centrado en $z = z_0$ y M es el valor máximo de $|f(z)|$ en el círculo. Suponga que $f(z)$ es analítica en y dentro del círculo.

6.4.6 Si $f(x)$ es analítica y limitada [$|f(z)| \leq M$, una constante] para todas las z, demuestre que $f(z)$ debe ser una constante. Este es el teorema de Liouville.

6.4.7 Teorema fundamental del álgebra. Como corolario del teorema de liouville, Ejercicio 6.4.6, demuestre que cada ecuación polinomial,

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$$

tiene al menos una raíz. Aquí $n > 0$ y $a_n \neq 0$.
Sugerencia. Considere $f(z) = 1/P(z)$.
Nota. Una vez que el resultado anterior sea establecido, se puede dividir la raíz y repetir el proceso para el polinomio resultante de grado $n - 1$. Esto origina la conclusión de que $P(z)$ tiene exactamente n raíces.

6.4.8 (a) Una función $f(z)$ es analítica dentro del contorno cerrado C (y continua en C). Si $f(z) \neq 0$ dentro de C y $|f(z)| \geqslant M$ en C, demuestre que

$$|f(z)| \geqslant M$$

para todos los puntos dentro de C. *Sugerencia.* Considere $w(z) = 1/f(z)$.
(b) Si $f(z) = 0$ dentro del contorno C, demuestre que el resultado anterior no es consistente, es decir que existe la posibilidad de tener $|f(z)| = 0$ en uno o más puntos en el interior con $|f(z)| > 0$ sobre todo el contorno limitante. Especifique un ejemplo de función analítica que se comporte de esta manera.

6.5 Desarrollo de Laurent

Desarrollo de Taylor. La fórmula de la integral de Cauchy de la sección anterior abre el camino para otra derivación de la serie de Taylor (Sección 5.6), pero en esta ocasión para las funciones de una variable compleja. Suponga que se intenta desarrollar $f(z)$ alrededor de $z = z_0$ y que se tiene $z = z_1$ como el punto más cercano en el diagrama de Argando en donde $f(z)$ no es analítica. Se construye un círculo C centrado en $z = z_0$ con radio $|z' - z_0| < |z_1 - z_0|$. Ya que z_1 se ha supuesto que es el punto más cercano en que $f(z)$ no es analítica, $f(z)$ necesariamente es analítica en y dentro de C.

A partir de la Ec. 6.43, la fórmula de la integral de Cauchy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{z' - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z' - z_0)[1 - (z - z_0)/(z' - z_0)]} \end{aligned} \tag{6.57}$$

En este caso, z' es un punto en el contorno C, y z es cualquier punto interior a C. No es rigurosamente legal el desarrollar el denominador del *integrando* en la Ec. 6.57, mediante el teorema binomial, ya que aún no hemos demostrado el teorema binomial para las variables complejas. En lugar de esto, se puede considerar la identidad

$$\frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \tag{6.58}$$

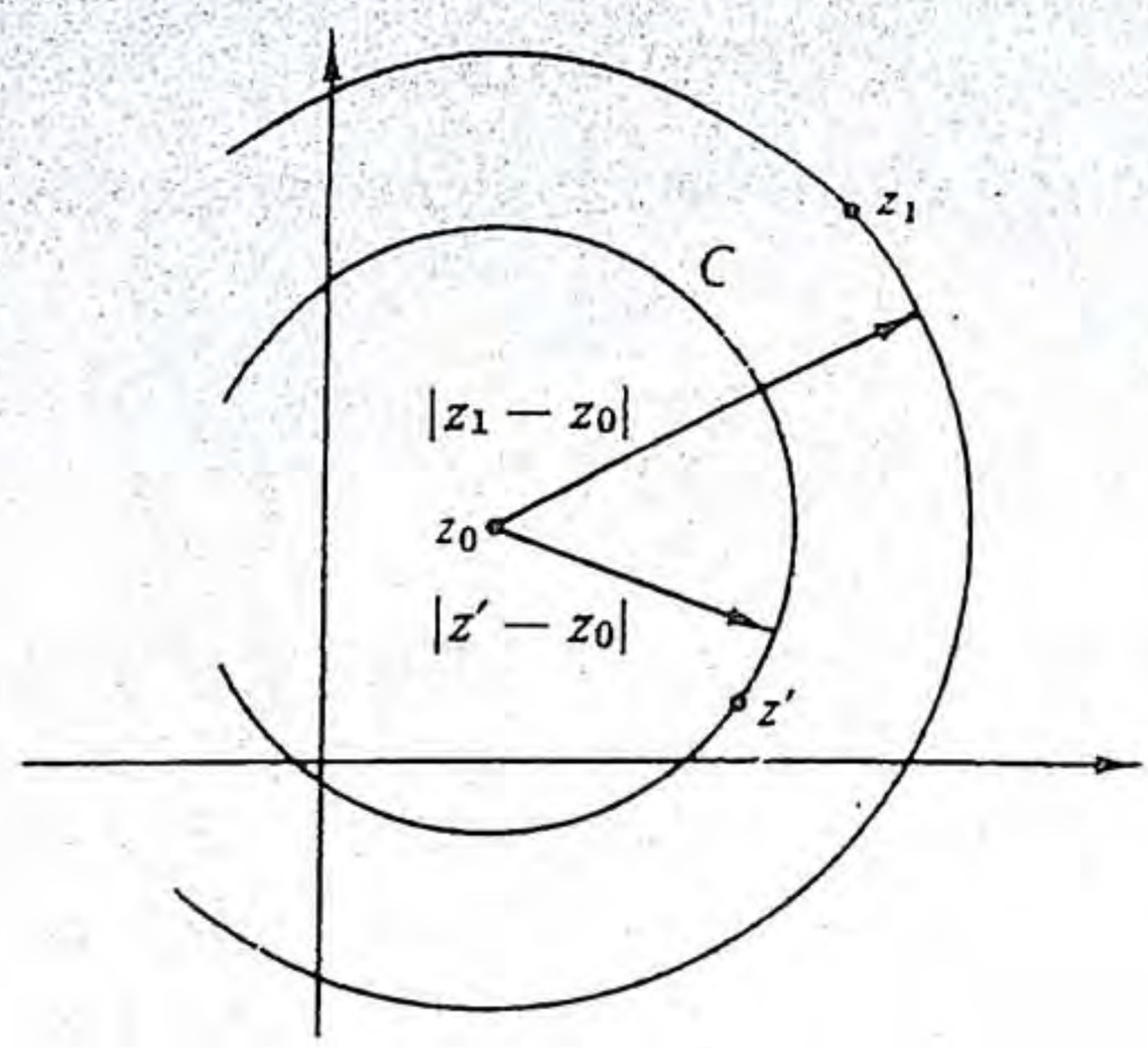


Fig. 6.12

que puede verificarse con facilidad mediante la multiplicación de ambos lados por $1 - t$. La serie infinita, aplicando los métodos de la Sección 5.2, es convergente para $|t| < 1$.

Ahora bien, para el punto z interior a C, $|z - z_0| < |z' - z_0|$ y, utilizando la Ec. 6.58, la Ec. 6.57 se transforma en

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(z')\, dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \tag{6.59}$$

Intercambiando el orden de la integración y la suma (válido ya que la Ec. 6.58 es uniformemente convergente para $|t| < 1$), se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(z')\, dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}. \tag{6.60}$$

Tomando como referencia la Ec. 6.47, se obtiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \tag{6.61}$$

lo cual constituye el desarrollo de Taylor deseado. Observe que solo está basado en la suposición de que $f(z)$ es analítica para $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Igual que para la serie de potencias de variable real (Sección 5.7), este desarrollo es único para una z_0 determinada.

Principio de la Reflexión de Schwarz. A partir del desarrollo binomial de $g(z) = (z - x_0)^n$ para la integral n, es fácil observar que el conjugado complejo de la función es la función del conjugado complejo,

$$g^*(z) = (z - x_0)^{n*} = (z^* - x_0)^n = g(z^*). \tag{6.62}$$

Esto origina el principio de la reflexión de Schwarz:

Si una función $f(z)$ es (1) *analítica sobre cierta región incluyendo el eje real, y* (2) *real cuando z es real, entonces*

$$f^*(z) = f(z^*). \tag{6.63}$$

Desarrollando $f(z)$ alrededor de algún punto (no singular) x_0 en el eje real,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{6.64}$$

mediante la Ec. 6.61. Ya que $f(z)$ es analítica en $z = x_0$, este desarrollo de Taylor existe. Ya que $f(z)$ es real cuando z es real, $f^{(n)}(x_0)$ debe ser real para todas las n. Siendo así, mediante el uso de la Ec. 6.62, la Ec. 6.63, es decir el principio de la reflexión de Schwarz, se deriva de inmediato. El Ejercicio 6.5.6 constituye otra forma de este principio.

Continuación analítica. En la descripción anterior hemos supuesto que $f(z)$ tiene un punto singular o no analítico aislado en $z = z_1$ (Fig. 6.12). Para un ejemplo específico de este comportamiento, considere

$$f(z) = \frac{1}{1 + z}, \tag{6.65}$$

que se vuelve infinita en $z = -1$. En consecuencia, $f(x)$ no es analítica en $z_1 = -1$ o $z_1 = -1$ es nuestro punto singular. Mediante la Ec. 6.61 o el teorema binomial para las funciones complejas que se derivan directamente del mismo,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \tag{6.66}$$

convergente para $|z| < 1$. Si se rotula este círculo de convergencia C_1, la Ec. 6.66 es consistente para $f(z)$ en el interior de C, la cual designamos región S_1.

La situación es que $f(z)$ desarrollada alrededor del origen es consistente en S_1 (y en C_1 excluyendo $z_1 = -1$), pero se conoce a partir de la forma de $f(z)$ que está bien definida y es analítica en cualquier parte en el plano complejo fuera de S_1. La continuación analítica es un proceso de extender la región en que una función tal como una serie en la Ec. 6.66 queda definida. Por ejemplo, suponga que desarrollamos $f(z)$ alrededor del punto $z = i$. Se tiene

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{1 + z} &= \frac{1}{1 + i + (z - i)} \\ &= \frac{1}{1 + i}\left(1 + \frac{z - i}{1 + i}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{6.67}$$

Mediante la Ec. 6.61 nuevamente o la Ec. 6.66

$$f(z) = \frac{1}{1 + i}\left[1 - \frac{z - i}{1 + i} + \left(\frac{z - i}{1 + i}\right)^2 - \cdots\right], \tag{6.68}$$

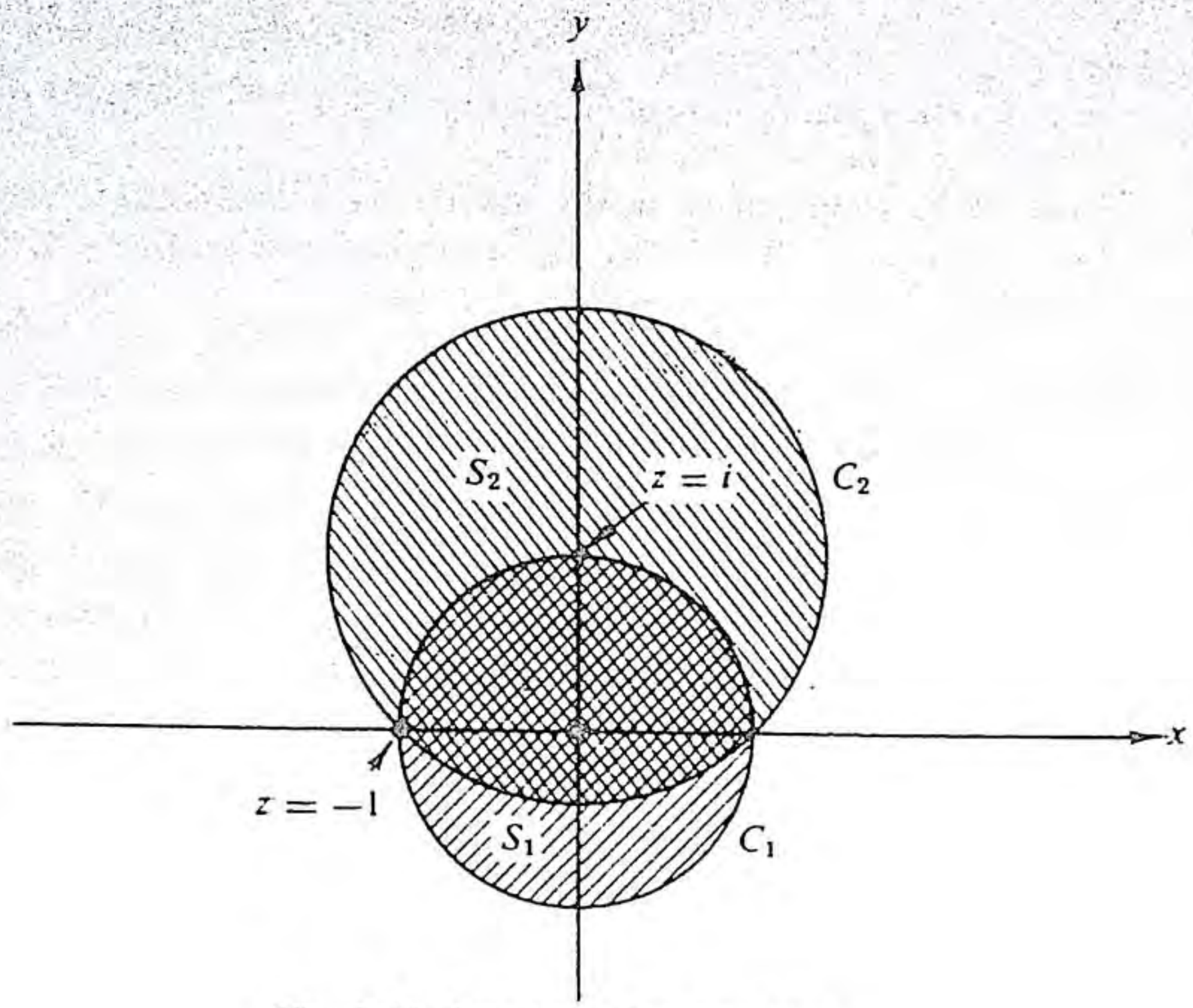


Fig. 6.13 Continuación analítica

convergente para $|z - i| < |1 + i| = \sqrt{2}$. Nuestro círculo de convergencia es C_2 y la región afectada por C_2 se denomina S_2 Ahora $f(z)$ está definida por la expansión (Ec. 6.68) para S_2, la cual traslapa S_1 y se extiende más afuera en el plano complejo.[1] Esta extensión es una continuación analítica y cuando solamente se dispone de puntos singulares aislados para trabajar con la función, puede extenderse indefinidamente. Como ejemplo, utilizaremos una relación de recurrencia que aparece en la Sección 10.1 para desarrollar la función factorial alrededor de puntos singulares aislados, $z = -n$, $n = 1$, 2, 3... Como otro ejemplo, la ecuación hipergeométrica se satisface mediante la función hipergeométrica definida por la serie, Ec. 13.99, para $|z| < 1$. La representación integral proporcionada en el Ejercicio 13.4.8 permite la continuación sobre todo el plano complejo.

Todas las funciones elementales e^z, sen z, etc. se pueden extender al plano complejo (cf. Ejercicio 6.1.7). Por ejemplo, pueden *definirse* mediante desarrollos de series de potencias, tal como

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{6.69}$$

[1] Uno de los resultados más poderosos y bellos de la teoría más abstracta de las funciones de una variable compleja es que dos funciones analíticas coinciden en cualquier región, tal como el traslape de S_1 y S_2, o cuando coinciden en cualquier segmento de línea son la misma función en el sentido de que coincidirán en cualquier parte, siempre y cuando, estén bien definidas. En este caso, la concordancia de las expansiones (Ecs. 6.66 y 6. 68) sobre la región común a S_1 y S_2 establecería la identidad de las funciones que representan estas funciones. Siendo así, la Ec. 6.68 representaría una continuación analítica o extensión de $f(z)$ en las regiones no consideradas por la Ec. 6.66. Igualmente se podría decir que $f(z) = 1/(1 + z)$ es por sí misma una continuación analítica de cualquiera de las series establecidas por las Ecs 6.66 y 6.68.

para el exponencial. Tales definiciones concuerdan con las definiciones de variable real a lo largo del eje x real y constituyen literalmente una continuación analítica de las funciones reales correspondientes en el plano complejo.

Serie de Laurent. Frecuentemente se encuentran funciones que son analíticas en una región anular, por ejemplo, el radio interior r y el radio exterior R, tal como se muestra en la Fig. 6.14. Trazando una línea de corte imaginaria para convertir nuestra región en una región de conexión simple, se aplica la fórmula de la integral de Cauchy, y para dos círculos C_2 y C_1, centrados en $z = z_0$ y con los radios r_2 y r_1 respectivamente, en donde $r < r_2 < r_1 < R$, se tiene[1]

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z')\,dz'}{z' - z}. \tag{6.70}$$

Observe cuidadosamente que en la Ec. 6.70 se ha introducido un signo menos explícito de modo que el contorno C_2 (igual que C_1) será girado en sentido *positivo* (contrario a las manecillas del reloj). El tratamiento de la Ec. 6.70 se realiza ahora exactamente igual que el correspondiente a la Ec. 6.57 en el desarrollo de la serie de Taylor. Cada denominador se indica como $(z' - z_0) - (z - z_0)$ y se desarrolla por medio del teorema binomial, que se menciona a continuación, a partir de la serie de Taylor (Ec. 6.61).

Observando que para C_1, $|z' - z_0| > |z - z_0|$ mientras que para C_2, $|z' - z_0| < |z - z_0|$, se encuentra que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}(z - z_0)^{-n} \oint_{C_2} (z' - z_0)^{n-1} f(z')\,dz'. \tag{6.71}$$

El signo de menos de la Ec. 6.70 ha sido absorbido por el desarrollo binomial. Rotulando la primera serie como S_1 y la segunda como S_2,

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}, \tag{6.72}$$

lo cual constituye el desarrollo de Taylor regular, que es convergente para $|z - z_0| < |z' - z_0| = r_1$, es decir para todas las z *interiores* al círculo mayor, C_1. Para la segunda serie en la Ec. 6.71, se tiene

$$S_2 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}(z - z_0)^{-n} \oint_{C_2} (z' - z_0)^{n-1} f(z')\,dz' \tag{6.73}$$

convergente para $|z - z_0| > |z' - z_0| = r_2$, es decir para todas las z *exteriores* al círculo más pequeño C_2. Recuerde que ahora C_2 gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

[1] Podríamos considerar r_2 arbitrariamente cercano a r, y r_1 arbitrariamente cercano a R, aumentando al máximo el área encerrada entre C_1 s y C_2.

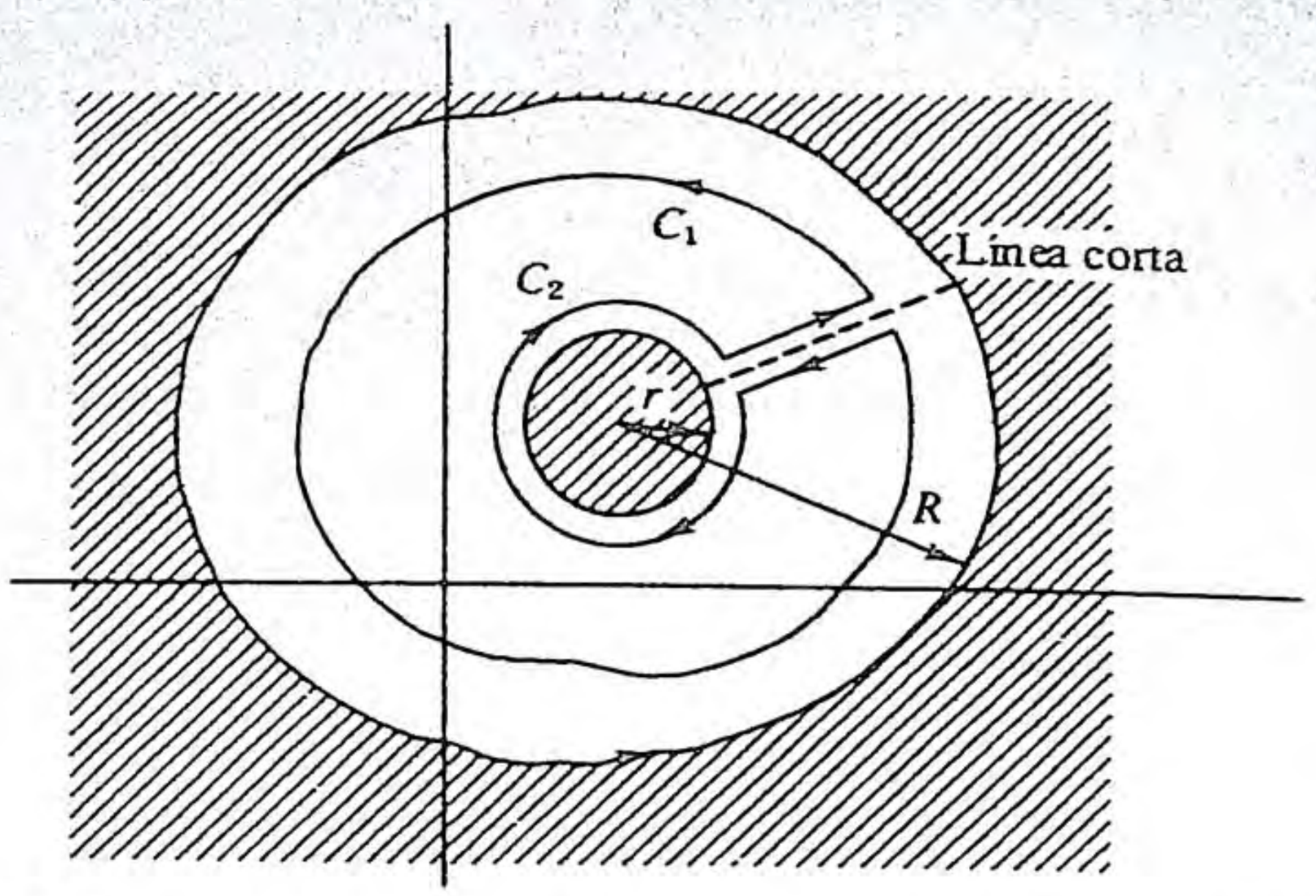


Fig. 6.14 Desarrollo de Lavient. $f(z)$ analítica para $r < |z - z_0| < R$

Las dos series pueden combinarse en una serie[1] (una serie de Laurent) mediante

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{6.74}$$

en donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\, dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}. \tag{6.75}$$

Aquí C es cualquier contorno dentro de la región anular $r < |z - z_0| < R$ que circunda a z_0 una vez en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Si se supone que tal región anular de convergencia existe, la Ec. 6.74 es la serie de Laurent o el desarrollo de Laurent de $f(z)$.

El uso de la línea de corte (Fig. 6.14) es conveniente para la conversión de la región anular en una región de conexión simple. Ya que nuestra función es analítica en esta región anular (y consecuentemente de valor simple), la línea de corte no es esencial y, de hecho, no aparece en el resultado final, Ec. 6.75. En contraste con esto, las funciones con puntos de ramificación deben tener líneas de corte. Sección 7.1.

En el Capítulo 7 aparecen numerosos ejemplos de la serie de Laurent. Nos limitaremos aquí a un ejemplo simple para ilustrar la aplicación de la Ec. 6.74.

EJEMPLO 6.5.1

Sea $f(z) = [z(z-1)]^{-1}$. Si seleccionamos $z_0 = 0$, entonces $r = 0$ y $R = 1$, de modo que $f(z)$ diverge a $z = 1$. A partir de las Ecs. 6.75 y 6.74

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz'}{(z')^{n+2}(z'-1)} = \frac{-1}{2\pi i} \oint \sum_{m=0}^{\infty} (z')^m \frac{dz'}{(z')^{n+2}}. \tag{6.76}$$

[1] Sustituya n por $-n$ en S_2 y sume.

Intercambiando nuevamente el orden de la suma y la integración (serie uniformemente convergente),

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\oint \frac{dz'}{(z')^{n+2-m}}. \tag{6.77}$$

Si se utiliza la forma polar (o cf. Ejercicio 6.4.2),

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\oint \frac{rie^{i\theta}\,d\theta}{r^{n+2-m}e^{i(n+2-m)\theta}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\sum_{m=0}^{\infty}\delta_{n+2-m,1}. \tag{6.78}$$

Es decir,

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{para } n \geqslant -1, \\ 0 & \text{para } n < -1. \end{cases} \tag{6.79}$$

El desarrollo de Laurent (Ec. 6.74) se transforma en

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \cdots$$

$$= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n. \tag{6.80}$$

Para esta función simple, la serie de Laurent evidentemente se puede obtener mediante el desarrollo binomial directo.

La serie de Laurent difiere de la serie de Taylor en la característica evidente de las potencias negativas de $(z - z_0)$. Debido a esto, la serie de Laurent siempre diverge al menos en $z = z_0$ y posiblemente tan lejos como alguna distancia r (Fig. 6.14).

EJERCICIOS

6.5.1 Establezca el desarrollo de Taylor para $\ln(1 + z)$.

Respuesta. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$.

6.5.2 Derive el desarrollo binomial

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}z^n$$

para cualquier número real. El desarrollo es convergente para $|z| < 1$.

6.5.3 Una función $f(z)$ es analítica en y dentro de un círculo unitario. Asimismo, $|f(z)| \leqslant 1$ para $|z| \leqslant 1$ y $f(0) = 0$. Demuestre que $|f(z)| \leqslant |z|$ para $|z| \leqslant 1$.
Sugerencia: Un procedimiento consiste en demostrar que $f(z)/z$ es analítica y luego expresar $[f(z_0)/z_0]^n$ mediante la fórmula de la integral de Cauchy. Finalmente, considere las magnitudes absolutas y obtenga la raíz enésima. Este ejercicio se denomina algunas veces teorema de Schwarz.

6.5.4 Si $f(z)$ es es una función real de la variable compleja z y el desarrollo de Laurent alrededor del origen, $f(z) = \sum a_n z^n$, tiene $a_n = 0$ para $n < -N$, demuestre que todos los coeficientes a_n son reales.

6.5.5 Una función $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ satisface las condiciones para el principio de la reflexión de Schwarz. Demuestre que
(a) u es una función par de y;
(b) v es una función non de y.

6.5.6 Una función $f(z)$ se puede desarrollar a modo de una serie de Laurent alrededor del origen con los coeficientes a_n reales. Demuestre que el conjugado complejo de esta función de z es la misma función del conjugado complejo de z; es decir

$$f^*(z) = f(z^*).$$

Verifique esto explícitamente para
(a) $f(z) = z^n$, en donde n es un número entero,
(b) $f(z) = \operatorname{sen} z$
Si $f(z) = iz$, $(a_1 = i)$, demuestre que lo establecido antes *no* es consistente.

6.5.7 Demuestre que el desarrollo de Laurent de una función dada alrededor de cierto punto es único; es decir, si

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-N}^{\infty} b_n(z - z_0)^n,$$

demuestre que $a_n = b_n$ para todas las n.
Sugerencia. Utilice la fórmula de la integral de Cauchy.

6.5.8 (a) Establezca un desarrollo de Laurent para $f(z) = [z(z-1)]^{-1}$ alrededor del punto $z = 1$ válido para valores pequeños de $|z - 1|$. Especifique el intervalo exacto sobre el cual es consistente el desarrollo. Esto es una continuación analítica de la Ec. 6.80.
(b) Determine el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z = 1$ para $|z - 1|$ grande.

6.6 Representación

En las secciones anteriores hemos definido las funciones analíticas y desarrollado algunas de sus principales características. A partir de estos desarrollos, lo que sigue directamente son las relaciones integrales del Capítulo 7. Aquí introducimos algunos de los aspectos más geométricos de las funciones correspondientes a las variables complejas, aspectos que serán de utilidad para visualizar las operaciones integrales en el Capítulo 7 y que son de valor por sí mismas en la resolución de la ecuación de Laplace en los sistemas bidimensionales.

En la geometría analítica ordinaria, podemos considerar $y = f(x)$ y luego construir la gráfica de y en función de x. Nuestro problema aquí es

más complicado, ya que z es una función de dos variables x e y. Utilizaremos la notación

$$w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y). \tag{6.81}$$

Luego para un punto en el plano z (valores específicos para x *además* de y) pueden corresponder valores específicos para $u(x, y)$ y $v(x, y)$ que posteriormente proporcionan un punto en el plano w. A medida que los puntos en el plano z se transforman o son representados en la forma de puntos en el plano w, así las líneas o áreas en el plano z serán representadas a modo de líneas o áreas en el plano w. Nuestro propósito inmediato consiste en conocer la forma en que las líneas y áreas representadas en el plano z se representan en el plano w para el caso de varias funciones simples.

Translación

$$w = z + z_0 \tag{6.82}$$

La función w es igual a la variable z más una constante, $z_0 = x_0 + iy_0$. Mediante las Ecs. 6.1 y 6.81

$$\begin{aligned} u &= x + x_0, \\ v &= y + y_0, \end{aligned} \tag{6.83}$$

representando una translación pura de los ejes coordenados como se muestra en la Fig. 6.15.

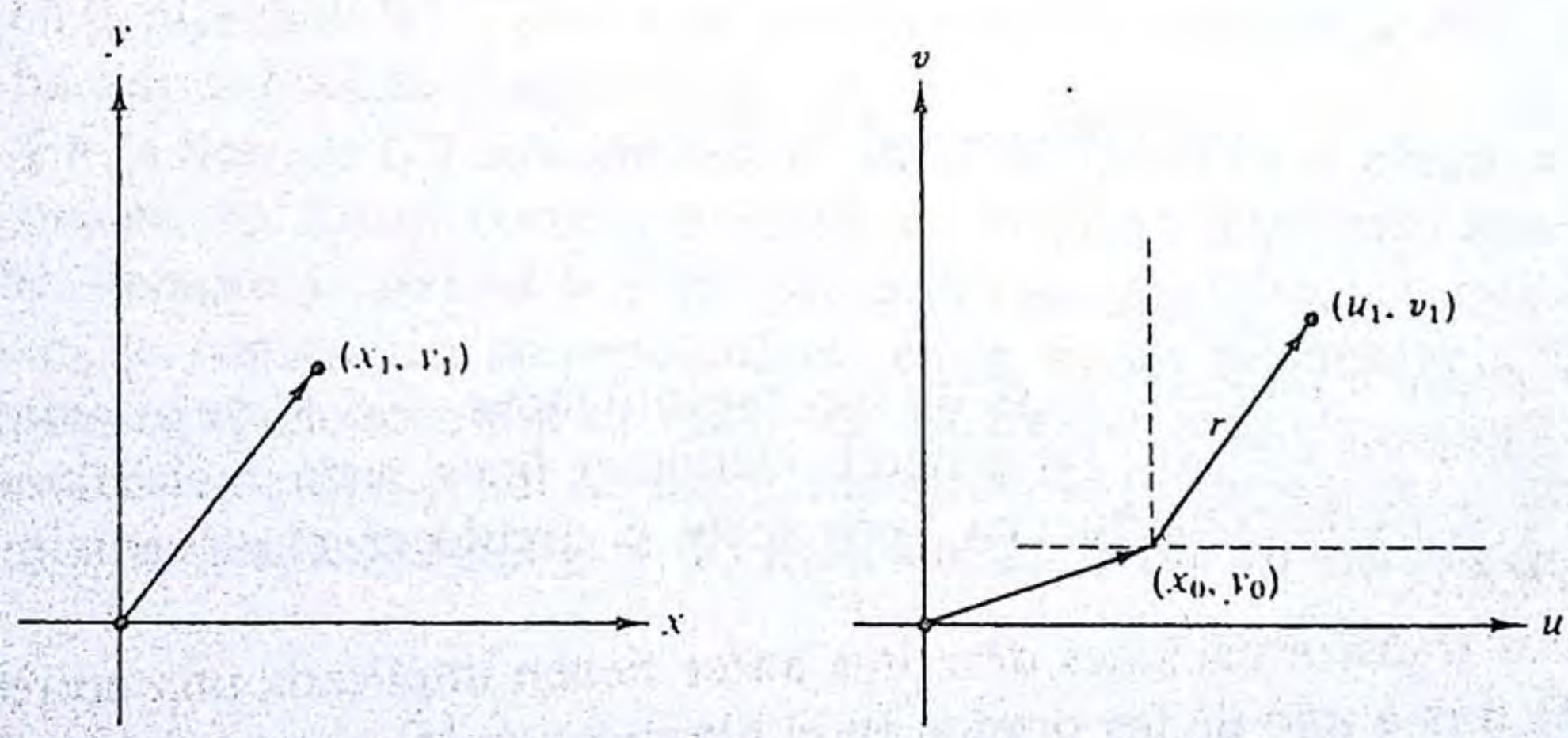


Fig. 6.15 Translación

Rotación

$$w = zz_0. \tag{6.84}$$

En este caso es conveniente regresar a la representación polar, para lo cual se hace uso de

$$w = \rho e^{i\varphi}, \qquad z = re^{i\theta}, \quad \text{y} \quad z_0 = r_0 e^{i\theta_0}, \tag{6.85}$$

de lo cual

$$\rho e^{i\varphi} = rr_0 e^{i(\theta + \theta_0)} \tag{6.86}$$

$$\rho = rr_0,$$
$$\varphi = \theta + \theta_0. \tag{6.87}$$

Han ocurrido dos cosas. En primer lugar, el módulo r ha sido modificado, ya sea por expansión o contracción, en el factor r_0. En segundo lugar, el argumento θ se ha incrementado con la constante aditiva θ_0. Esta representación constituye una *rotación* de la variable compleja a través del ángulo θ_0. Para el caso especial de $z_0 = i$, se tiene una rotación pura a través de $\pi/2$ radianes.

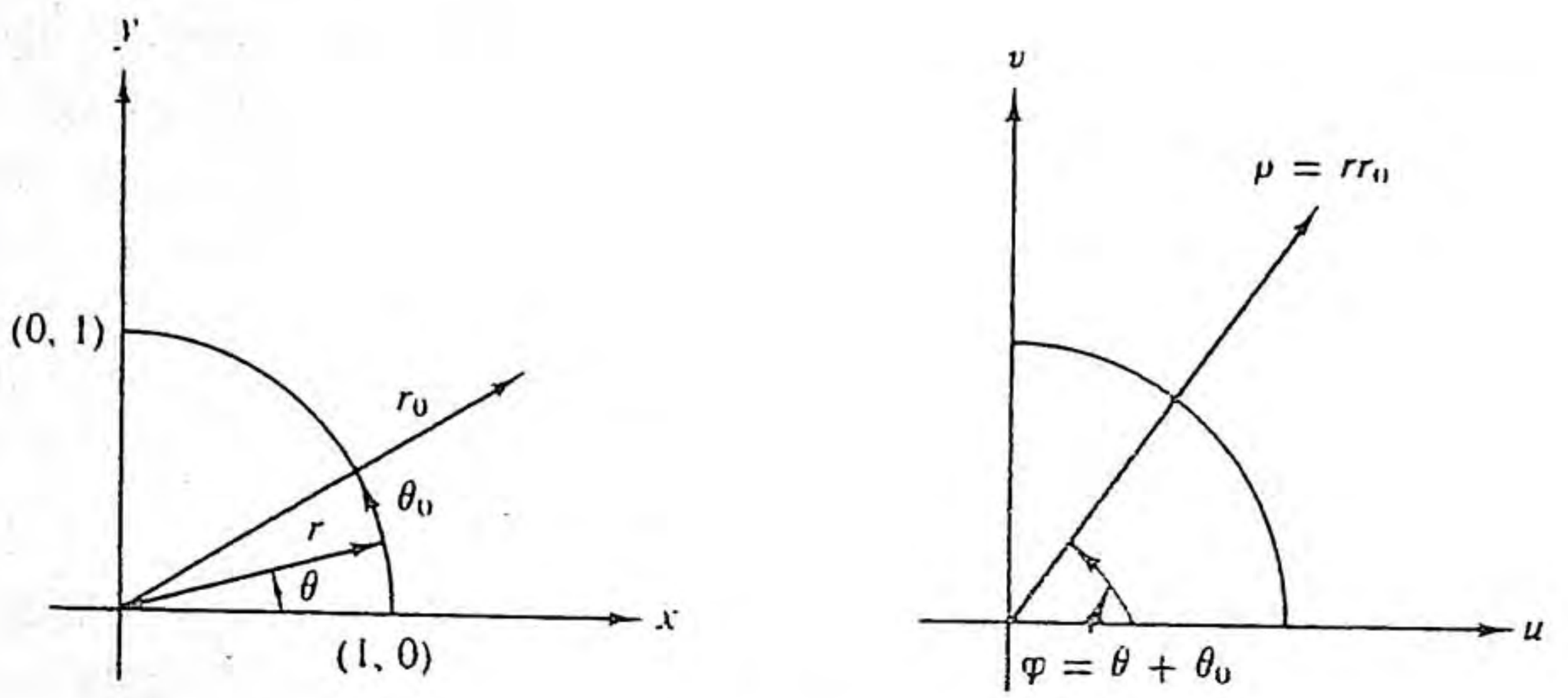


Fig. 6.16 Rotación

Inversión

$$w = \frac{1}{z}. \tag{6.88}$$

Nuevamente, utilizando la forma polar

$$\rho e^{i\varphi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \tag{6.89}$$

se demuestra que

$$\rho = \frac{1}{r}, \qquad \varphi = -\theta. \tag{6.90}$$

La primera parte de la Ec. 6.90 indica claramente la inversión. El interior del círculo unitario se representa en el exterior y viceversa. En suma, la segunda parte de la Ec. 6.90 demuestra que el ángulo polar se invierte en signo. En consecuencia la Ec. 6.88 también implica una reflexión del eje y exactamente igual que la ecuación conjugada compleja.

Para definir la forma en que las líneas en el plano z se transforman en el plano w, es conveniente regresar a la forma cartesiana:

$$u + iv = \frac{1}{x + iy}. \tag{6.91}$$

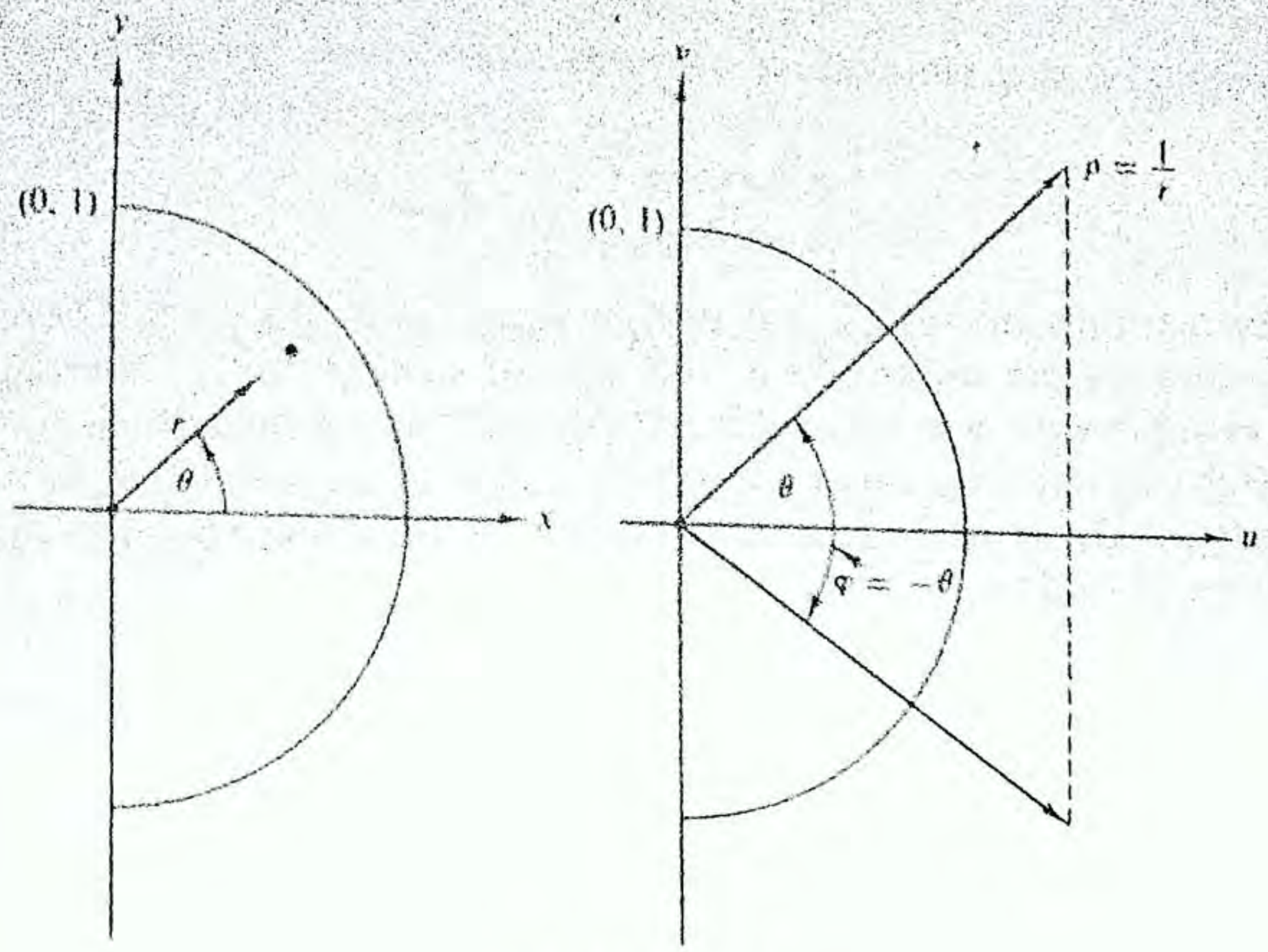


Fig. 6.17 Inversión

Racionalizando el lado derecho al multiplicar el numerador y denominador por z^* y luego igualando las partes reales y las partes imaginarias, se tiene

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad x = \frac{u}{u^2 + v^2}$$
$$v = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}. \tag{6.92}$$

Un círculo centrado en el origen del plano z tiene la forma

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{6.93}$$

y mediante la Ec. 6.92 se transforma en

$$\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} = r^2. \tag{6.94}$$

Simplificando la Ec. 6.94, se obtiene

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2} = \rho^2, \tag{6.95}$$

lo cual describe un círculo en el plano w centrado también en el origen.

La línea horizontal $y = c_1$ se transforma en

$$\frac{-v}{u^2 + v^2} = c_1 \tag{6.96}$$

o

$$u^2 + v^2 + \frac{v}{c_1} + \frac{1}{(2c_1)^2} = \frac{1}{(2c_1)^2}, \tag{6.97}$$

la cual describe un círculo en el plano w con radio $1/2c_1$ y centrado en $u = 0$, $v = -1/2c_1$ (Fig. 6.18).

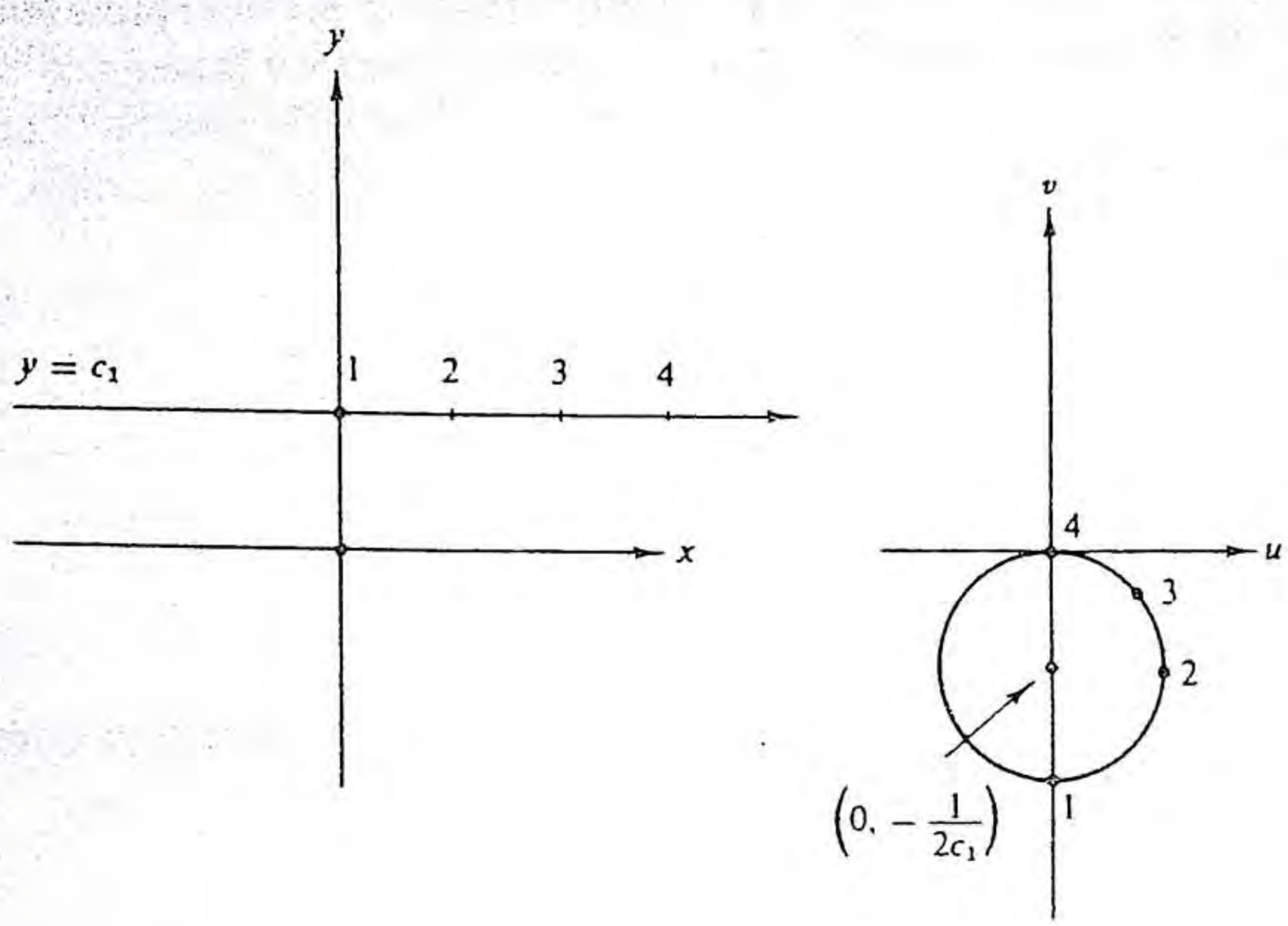


Fig. 6.18 Inversión, línea ↔ círculo

El lector podrá establecer las otras tres posibilidades, $x = \pm c_1$, $y = -c_1$, al hacer girar los ejes xy. En general, cualquier línea recta o círculo en el plano z se transforma en una línea recta o círculo en el plano w (cf. Ejercicio 6.6.1).

Las tres transformaciones descritas antes tienen implicada una correspondencia uno a uno de los puntos en el plano z con los puntos del plano w. Ahora, para ilustrar la variedad de transformaciones posibles y los problemas que se pueden presentar, introducimos primeramente una correspondencia dos a uno y luego una correspondencia muchos a uno. Finalmente, se obtienen las inversas de estas dos transformaciones.

Considere primeramente la transformación

$$w = z^2, \tag{6.98}$$

lo cual lleva a

$$\rho = r^2, \qquad \varphi = 2\theta. \tag{6.99}$$

Evidentemente nuestra transformación no es lineal, ya que el módulo se encuentra elevado al cuadrado, pero la característica significativa de la Ec.

6.99 es que el ángulo de fase o argumento se ha duplicado. Esto significa que el

primer cuadrante de z, $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2} \rightarrow$ plano medio superior de w, $0 \leqslant \varphi < \pi$,

plano medio superior de z, $0 \leqslant \theta < \pi \rightarrow$ plano completo de w, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

El plano medio inferior de z se representa en todo el plano ya cubierto de w, cubriendo así el plano w por *segunda* vez. Esta es nuestra correspondencia dos a uno, dos puntos distintos en el plano z, z_0 y $z_0 e^{i\pi} = -z_0$, correspondiente al punto simple $w = z_0^2$.

En representación cartesiana

$$\begin{aligned} u + iv &= (x + iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + i2xy, \end{aligned} \tag{6.100}$$

lo cual origina

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy. \end{aligned} \tag{6.101}$$

En consecuencia, las líneas $u = c_1$, $v = c_2$ en el plano w corresponden a $x^2 - y^2 = c_1$, $2xy = c_2$, hipérbolas rectangulares (y ortogonales) en plano z (Fig. 6.19). Para cada punto de la hipérbola $x^2 - y^2 = c_1$ en el plano medio derecho, $x > 0$, corresponde un punto en la línea $u = c_1$ y viceversa. Sin embargo, cada punto en la línea $u = c_1$ también corresponde a un punto en la hipérbola $x^2 - y^2 = c_1$ en el plano medio izquierdo, $x < 0$, tal como ya ha sido explicado anteriormente.

En la Sección 6.7 se demostrará que si las líneas en el plano w son ortogonales, las líneas correspondientes en el plano z también son ortogonales siempre y cuando la transformación sea analítica. Ya que $u = c_1$ y $v = c_2$ se construyen perpendiculares entre sí, las hipérbolas correspondientes en el plano z son ortogonales. Literalmente hemos construido un nuevo sistema ortogonal de líneas hiperbólicas (o superficies si se agrega un eje perpendicular a x y y). El Ejercicio 2.1.3 fue un análisis de este sis-

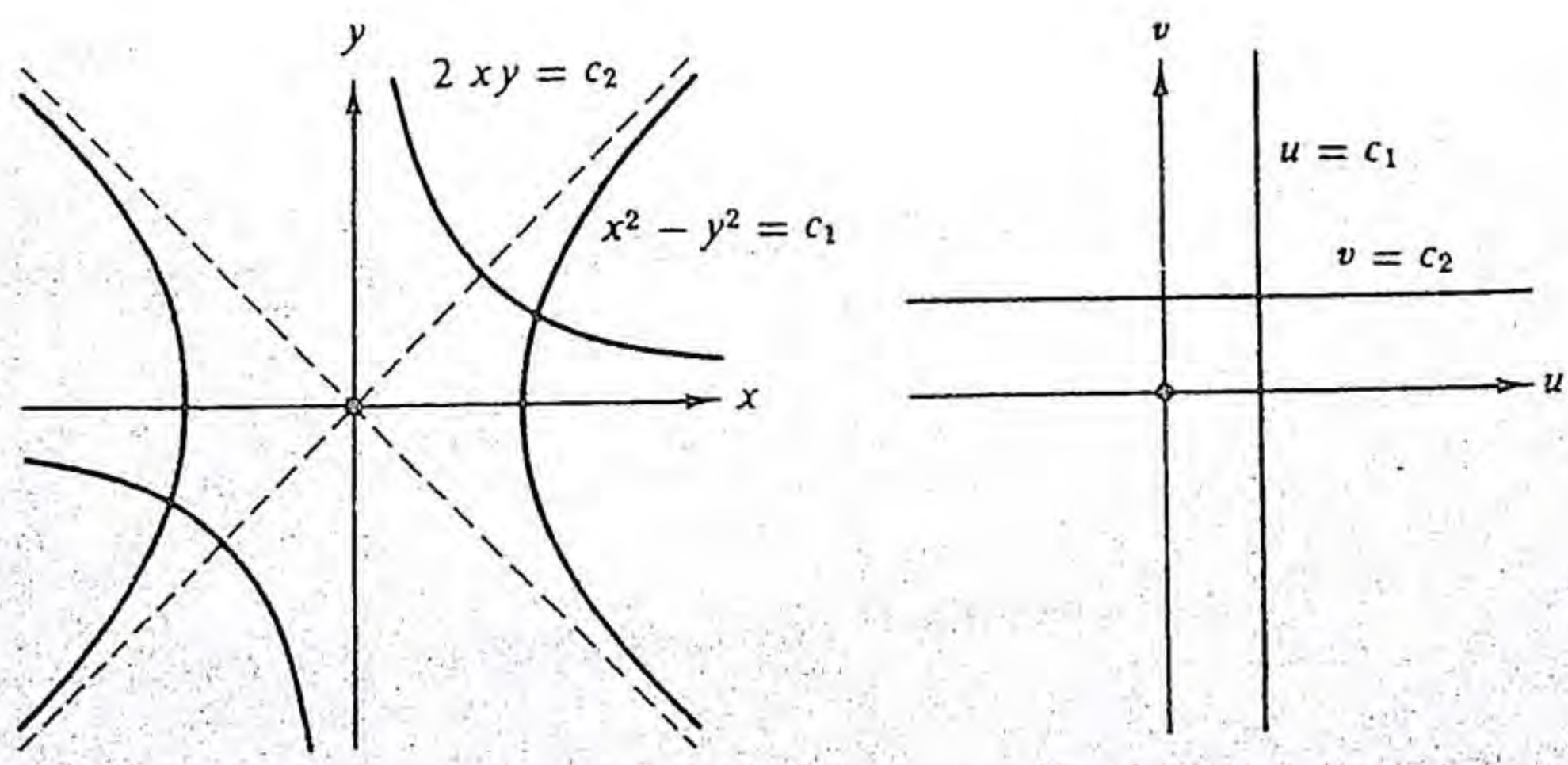


Fig. 6.19 Representación de coordenadas hiperbólicas

tema. Es de hacerse notar que si las líneas hiperbólicas son líneas eléctricas o magnéticas de fuerza, entonces se tiene una lente cuadripolar de utilidad para el afocamiento de los haces de partículas de alta energía.

La transformación

$$w = e^z \tag{6.102}$$

origina

$$\rho e^{i\varphi} = e^{x+iy} \tag{6.103}$$

o

$$\begin{aligned} \rho &= e^x, \\ \varphi &= y. \end{aligned} \tag{6.104}$$

Si y varía desde $0 \leqslant y < 2\pi$ (o $-\pi \leqslant y < \pi$), entonces φ cubre el mismo intervalo. Pero esto se encuentra en todo el plano w. Es decir, una cinta horizontal en el plano z con ancho de 2π representa todo el plano w. Asimismo, cualquier punto $x + i(y + 2n\pi)$, en donde n es un número entero, representa el mismo punto (mediante la Ec. 6.104) en el plano w. Se tiene una correspondencia de muchos (infinitamente muchos) a uno.

La inversa de la cuarta transformación (Ec. 6.98) es

$$w = z^{1/2}. \tag{6.105}$$

A partir de la relación

$$\rho e^{i\varphi} = r^{1/2}\, e^{i\theta/2}, \tag{6.106}$$

y

$$2\varphi = \theta, \tag{6.107}$$

ahora tenemos dos puntos en el plano w (argumentos φ y $\varphi + \pi$) correspondientes a un punto en el plano z (excepto para el punto $z = 0$). O dicho en otra forma, θ y $\theta + 2\pi$ corresponden a φ y $\varphi + \pi$, dos puntos distintos en el plano w. Esto representa un análogo de variable compleja de la ecuación de variable real simple $y^2 = x$, en donde dos valores de y, más y menos, corresponden a cada valor de x.

Lo importante aquí es que se puede lograr que la función w de la Ec. 6.105 sea una función de valor simple en lugar de una función de valor doble si aceptamos restringir θ a un intervalo tal que $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Esto puede realizarse al aceptar no cruzar nunca la línea $\theta = 0$ en el plano z (Fig. 6.20). Tal línea de demarcación se denomina línea de corte. El punto de terminación ($z = 0$, aquí) en una función de valor múltiple se conoce como punto de ramificación. Constituye una forma de un punto singular (cf. Sección 7.1), en que $f(z)$ no es analítica en $z = 0$.

Cualquier línea que se desplace de $z = 0$ hasta el infinito podría servir de igual manera. El propósito de la línea de corte consiste en restringir el argumento de z. Los puntos z_0 y $z_0 e^{2\pi i}$ coinciden en el plano z, pero proporcionan diferentes puntos w y $we^{i\pi} = -w$ en el plano w. Siendo así, en ausencia de una línea de corte, la función $w = z^{1/2}$ es ambigua.

En el Capítulo 7 se podrán encontrar frecuentemente los puntos de ramificación y las líneas de corte.

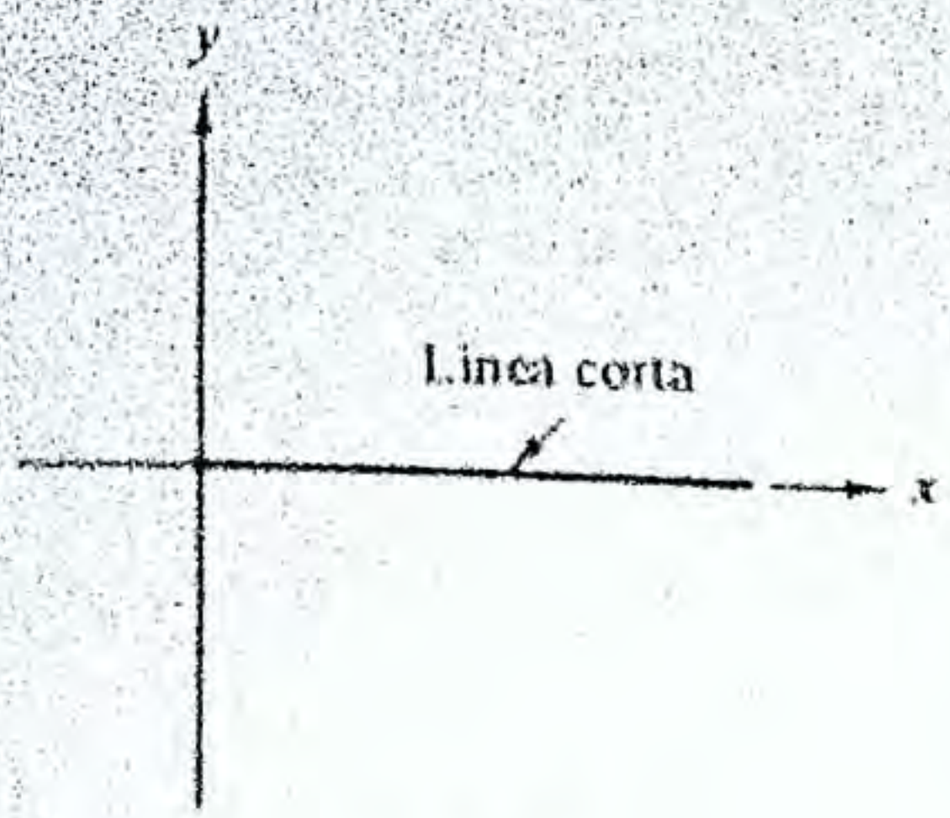


Fig. 6.20

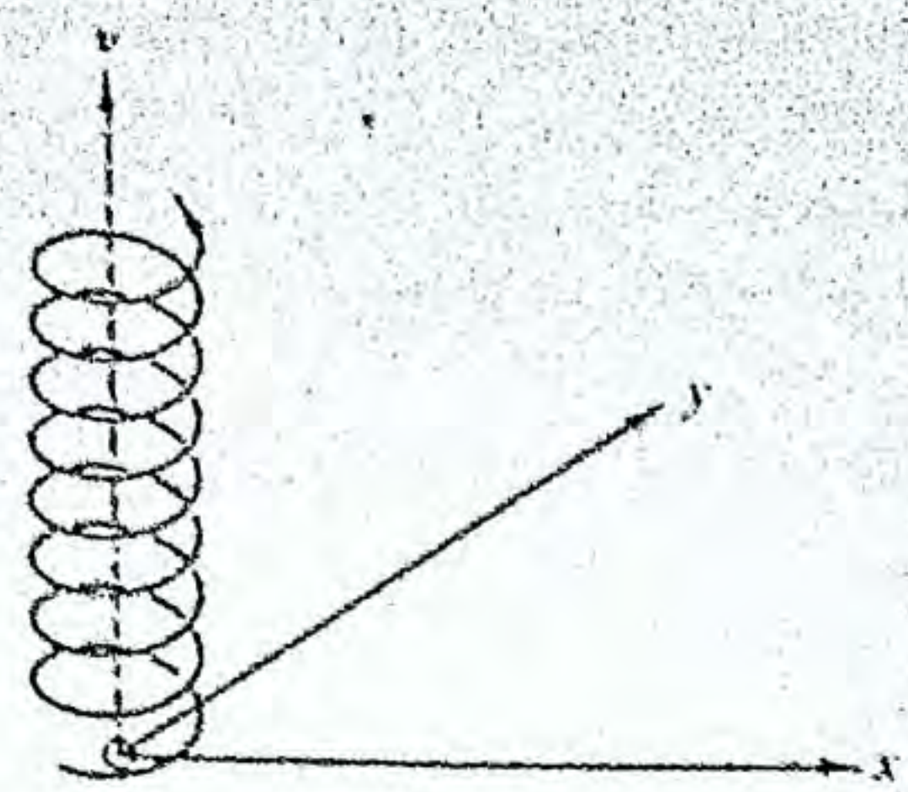


Fig. 6.21 Ln z, una función de valor múltiple.

Finalmente, como inversa de la quinta transformación (Ec. 6.102) se tiene

$$w = \ln z. \tag{6.108}$$

Mediante el desarrollo de la misma se obtiene

$$\begin{aligned} u + iv &= \ln re^{i\theta} \\ &= \ln r + i\theta. \end{aligned} \tag{6.109}$$

Para cierto punto z_0 en el plano z, el argumento θ no queda especificado dentro de una integral múltiple de 2π. Esto significa que

$$v = \theta + 2n\pi \tag{6.110}$$

y, del mismo modo que en la transformación exponencial, se tiene una correspondencia de muchos a uno.

La Ec. 6.108 tiene una representación física bastante adecuada. Si nos desplazamos alrededor del círculo unitario en el plano z, $r = 1$ y mediante la Ec. 6.109, $u = \ln r = 0$; pero $v = \theta$ y θ aumentan uniformemente y continúan aumentando con θ hasta después de 2π. El comportamiento en el plano w, conforme nos desplazamos alrededor y alrededor del círculo unitario en el plano z, es similar al avance de un tornillo a medida que se hace girar o al ascenso de una persona al subir por una escalera de caracol.

Como en el ejemplo anterior, hacemos que la correspondencia sea única (y la Ec. 6.108 sin ambigüedades) al restringir θ a un intervalo tal que $0 \leq \theta < 2\pi$ al considerar la línea $\theta = 0$ (eje real positivo) como línea de corte. Esto es equivalente a considerar una y solamente una vuelta de la escalera de caracol o espiral.

Es debido a la naturaleza de valor múltiple del $\ln z$ el que la integral de contorno

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i, \qquad \neq 0,$$

integrando alrededor del origen. Esta propiedad aparece en los Ejercicios 6.4.1 y 6.4.2 y constituye la base para todo el cálculo de los residuos (Capítulo 7).

EJERCICIOS

6.6.1 ¿En qué forma dos círculos centrados sobre el origen en el plano z se transforman para

(a) $w_1(z) = z + \dfrac{1}{z}$, (b) $w_2(z) = z - \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$?

¿Qué sucede cuando $|z| \to 1$?

6.6.2 ¿Qué parte del plano z corresponde al interior del círculo unitario en el plano w si

(a) $w = \dfrac{z-1}{z+1}$, (b) $w = \dfrac{z-i}{z+i}$?

6.6.3 Discuta las transformaciones

(a) $w(z) = \operatorname{sen} z$, (c) $w(z) = \operatorname{senh} z$,
(b) $w(z) = \cos z$, (d) $w(z) = \cosh z$.

Demuestre la forma en que las líneas $x = c_1$, $y = c_2$ se representan en el plano w. Observe que las tres últimas transformaciones se pueden obtener a partir de la primera mediante la translación y/o rotación adecuadas.

6.6.4 Demuestre que la función

$$w(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$$

es analítica si se considera

(a) $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$

o

(b) $-\infty < x \leqslant -1$ y $1 \leqslant x < \infty$, $y = 0$

como líneas de corte.

6.6.5 Demuestre que los números negativos tienen logaritmos en el plano complejo. En particular, encuentre (-1).

Respuesta. $\ln(-1) = i\pi$.

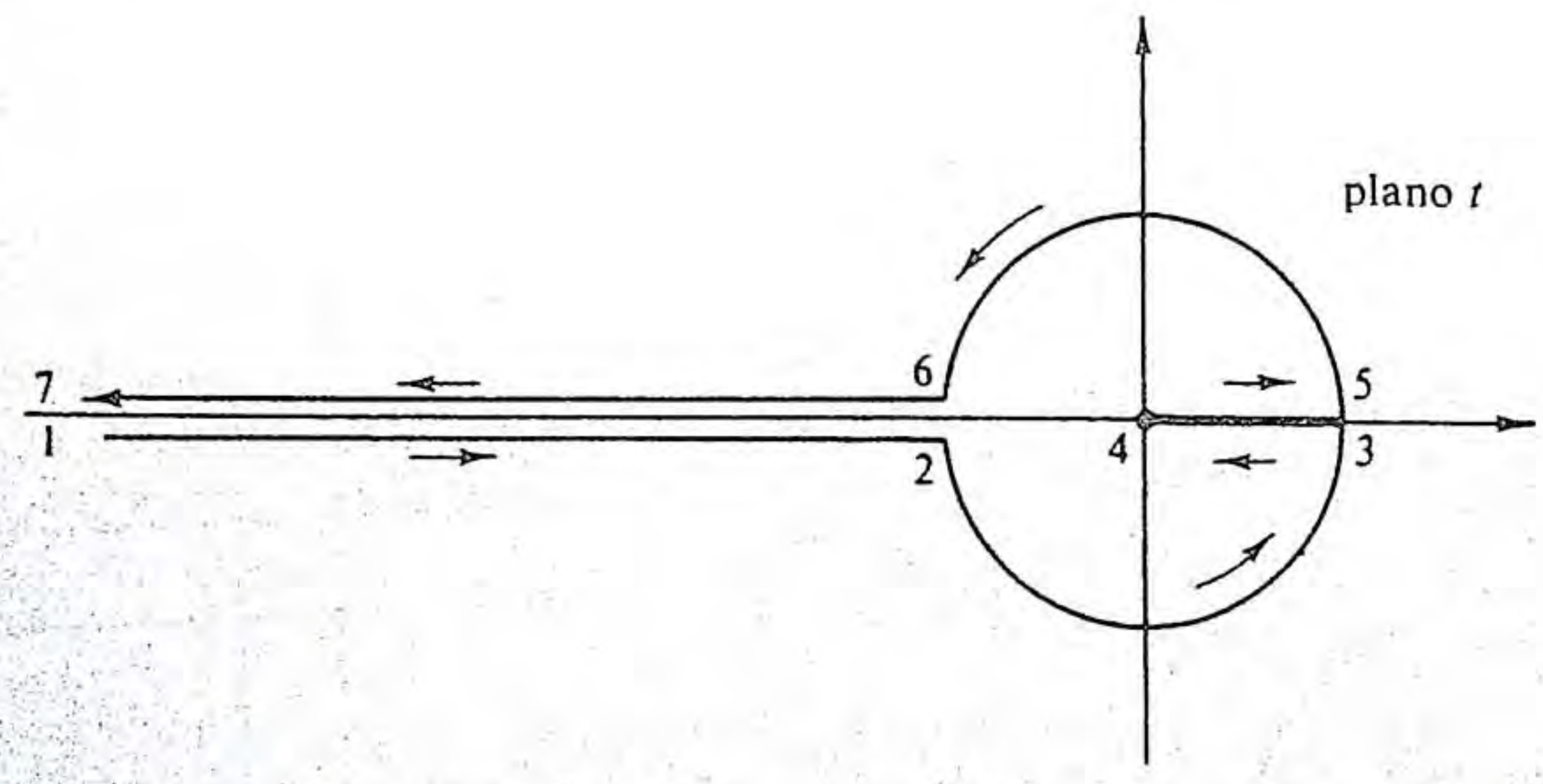


Fig. 6.22 Contorno de integración de la función de Bessel

6.6.6 Una representación integral de la función de Bessel sigue el contorno en el plano t que se muestra en la figura. Represente este contorno en el plano θ con $t = e^{\theta}$. En los Capítulos 11, 12 y 13 se proporcionan muchos ejemplos de representación adicionales.

6.7 Representación Conformal

En la Sección 6.6, las hipérbolas fueron representadas en la forma de líneas rectas y las líneas rectas se representaron en la forma de círculos. No obstante, en todas estas transformaciones permaneció constante una característica. Esta constancia fue el resultado de que todas las transformaciones de la Sección 6.6 fueron analíticas.

Mientras que $w = f(z)$ sea una función analítica, se tendrá

$$\frac{df}{dz} = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{6.111}$$

Suponiendo que esta ecuación se encuentra en la forma polar, se puede igualar el módulo con el módulo y el argumento con el argumento. Para este último (suponiendo que $df/dz \neq 0$)

$$\begin{aligned} \arg \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z \\ &= \arg \frac{df}{dz} = \alpha, \end{aligned} \tag{6.112}$$

en donde α, el argumento de la derivada, puede depender de z pero es constante para una z fija, independiente de la dirección de aproximación. Para establecer el significado de esto, considere dos curvas, C_z en el plano z y la curva correspondiente C_w en el plano w (Fig. 6.23). El incremento Δz se muestra a un ángulo θ con relación al eje real (x), mientras que el incremento correspondiente Δw forma el ángulo φ con el eje real (u). A partir de la Ec. 6.112

$$\varphi = \theta + \alpha, \tag{6.113}$$

o cualquier línea en el plano z se hace girar a través del ángulo α en el

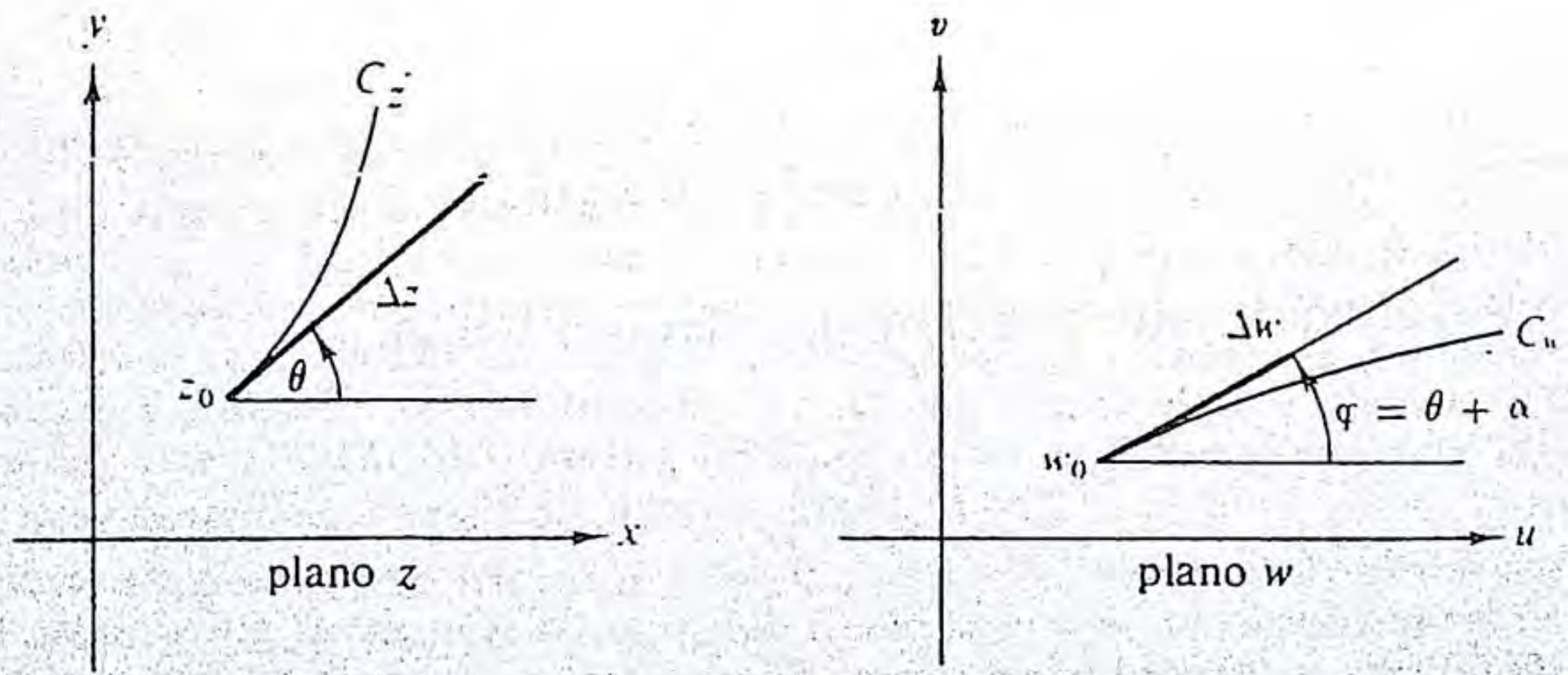


Fig. 6.23 Representación conformal. Preservación de los ángulos

plano w siempre y cuando w sea una transformación analítica y la derivada no sea cero.[1]

Ya que este resultado es consistente para cualquier línea a través de z_0, será consistente para un par de líneas. Para el ángulo entre dos líneas

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\theta_2 + \alpha) - (\theta_1 + \alpha) = \theta_2 - \theta_1, \tag{6.114}$$

lo cual indica que el ángulo incluido se preserva bajo una transformación analítica. Tales transformaciones preservadoras del ángulo se denominan *conformales*. El ángulo de rotación α depende, generalmente, de z. En suma, por lo general $|f'(z)|$ será una función de z. Siendo así, aun cuando los ángulos se preservan, las líneas coordenadas se pueden deformar. De hecho, esto constituye la base para crear nuevos sistemas coordenados tal como se describe posteriormente en esta sección.

La importancia de las transformaciones conformales para los científicos e ingenieros se encuentra en su aplicación a la solución de la ecuación de Laplace para los problemas de la electrostática, hidrodinámica, flujo de calor, y así sucesivamente.[2] Suponga que se tiene un problema absurdamente físico pero matemáticamente simple que consiste en determinar las líneas de campo eléctrico y las líneas equipotenciales (superficies) entre dos superficies hiperbólicas que atraviesan las secciones $x^2 - y^2 = c_1$ al potencial V_1 y $x^2 - y^2 = c_2$ al potencial V_2[3] (Fig. 6.24). Se conoce que existen líneas equipotenciales y campos eléctricos perpendiculares a las mismas, tal como se muestra aproximadamente en la Fig. 6.24, aunque

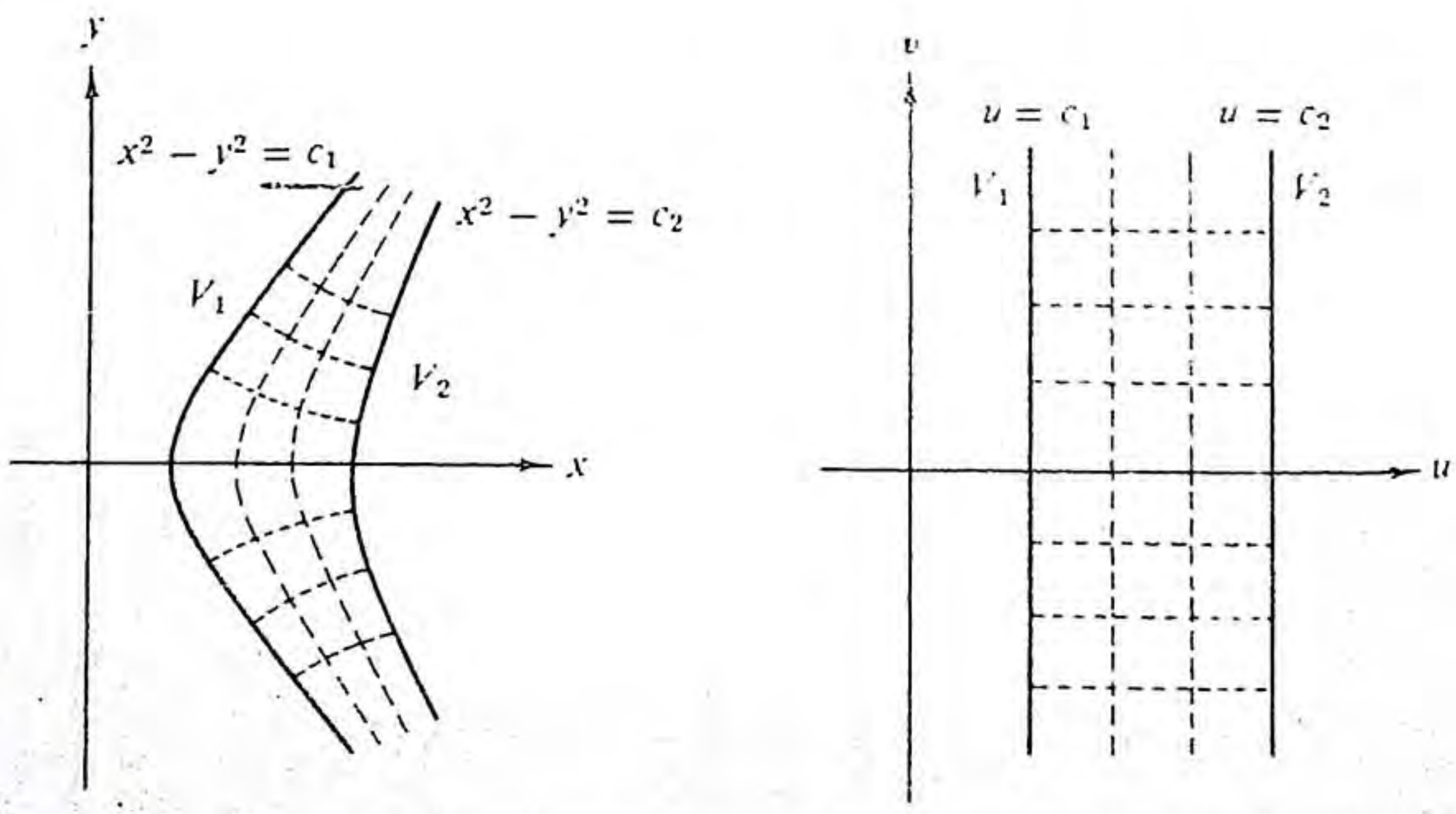


Fig. 6.24 Representación conformal. Coordenadas hiperbólicas

[1] Si $df/dz = 0$, su argumento o fase no es definido y la transformación (analítica) no necesariamente preserva los ángulos.

[2] Las aplicaciones de la representación conformal también incluyen la construcción de mapas geográficos en que los ángulos deben preservarse para su uso en la navegación.

[3] Nuestro análisis de variable compleja es bidimensional. La fuerza electrostática es tridimensional. Ambas se reconcilian al considerar un plano de sección transversal de un sistema cilíndrico; es decir, se supone una dimensión t perpendicular a x e y; además se supone que *nada* depende de t.

con estas condiciones limitantes poco usuales podemos pretender que las formas analíticas de los equipotenciales y las líneas de fuerza son desconocidas. Esto equivale a decir que no se conocen las soluciones de la ecuación de Laplace, $\nabla^2\psi = 0$, que satisfacen las condiciones limitantes.

Si se procede a la transformación al plano w por medio de $w = z^2$ (cf. Ec. 6.98 y subsecuentes), la línea equipotencial V_1 se transforma en la línea vertical $u = c_1$ y la línea equipotencial V_2 se transforma en la línea vertical $u = c_2$. En el plano w, la ecuación de Laplace se puede resolver mediante el análisis para lograr la característica rectangular neta $u = c_i$ para los equipotenciales y $v = c_j$ para las líneas de campo eléctrico. Mediante la transformación de nuevo al plano z, se encuentra que todos los ángulos rectos se preservan, ya que $z = w^{1/2}$ también es analítica (excepto cuando $w = 0$). En la forma analítica se tiene:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 = c_i && \text{equipotenciales} \\ v &= 2xy = c_j && \text{líneas de campo eléctrico} \end{aligned} \tag{6.115}$$

El resultado neto es que un problema, en que se había pretendido no poder uno solucionarlo en el plano z, se ha transformado en el plano w. Aquí, con un sistema coordenado hecho a la medida que literalmente se ha diseñado para simplificar este problema particular, se logra resolverlo mediante el simple análisis. Finalmente, la solución se transforma nuevamente al plano z original en la forma de la Ec. 6.115.

Con riesgo de exagerar lo evidente, demostremos que una solución de la ecuación de Laplace en el plano w $\Psi(u, v)$ aún representa una solución cuando se transforma nuevamente en el plano z, considerando tan solo que $w = f(z)$ es analítica. A modo de beneficio marginal, la demostración establece la utilidad de las condiciones de Cauchy-Riemann. Se tiene

$$\begin{aligned} &\text{plano } z, \text{ coordenadas } x, y, \psi = \psi(x, y), \\ &\text{plano } w, \text{ coordenadas } u, v, \Psi = \Psi(u, v), \end{aligned} \tag{6.116}$$

en donde la curva $\Psi(u, v) = a$ en el plano w, corresponde a nuestra curva $\psi(x, y) = a$ en el plano z; es decir

$$\Psi(u, v) = \Psi[u(x, y), v(x, y)] = \psi(x, y). \tag{6.117}$$

Diferenciando $\Psi(u, v)$ con respecto a x, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi(u, v)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial\Psi}{\partial u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} \\ &\quad + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial\Psi}{\partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}. \end{aligned} \tag{6.118}$$

Un resultado similar es consistente para $\partial^2\Psi/\partial y^2$. Siendo así,

$$\frac{\partial^2\psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Psi(u, v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi(u, v)}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial u}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial v} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial u\,\partial v} \tag{6.119}$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}$$

En el lado derecho de la Ec. 6.119 desaparecen los dos primeros paréntesis ya que u y y satisfacen la ecuación de Laplace cuando w es analítica (cf. Ejercicio 6.2.1). El tercer paréntesis es igual a cero de acuerdo con las condiciones de Cauchy-Riemann, y las mismas condiciones muestran que los dos paréntesis cuadrados son iguales. El resultado es que

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi(x, y) &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\nabla^2\Psi(u, v)\\ &= 0,\end{aligned} \tag{6.120}$$

ya que $\Psi(u, v)$ se sabe que satisface la ecuación de Laplace en el plano w. En consecuencia, cuando una solución de la ecuación de Laplace se somete a una transformación analítica queda una solución de la ecuación de Laplace. Finalmente, mediante el Ejercicio 1.15.2, la solución de la ecuación de Laplace que satisface un conjunto completo de condiciones limitantes es única. Nuestra solución transformada (que satisface nuestras condiciones limitantes) es la solución.

EJEMPLO 6.7.1

Un ejemplo posiblemente más real e interesante de esta técnica lo proporciona un cilindro circular conductor paralelo a un plano de metal infinito (Fig. 6.25).

La transformación que relaciona los planos z y w es

$$\begin{aligned}z &= ia \tan\frac{w}{2}\\ &= a \tanh\frac{iw}{2},\end{aligned} \tag{6.121}$$

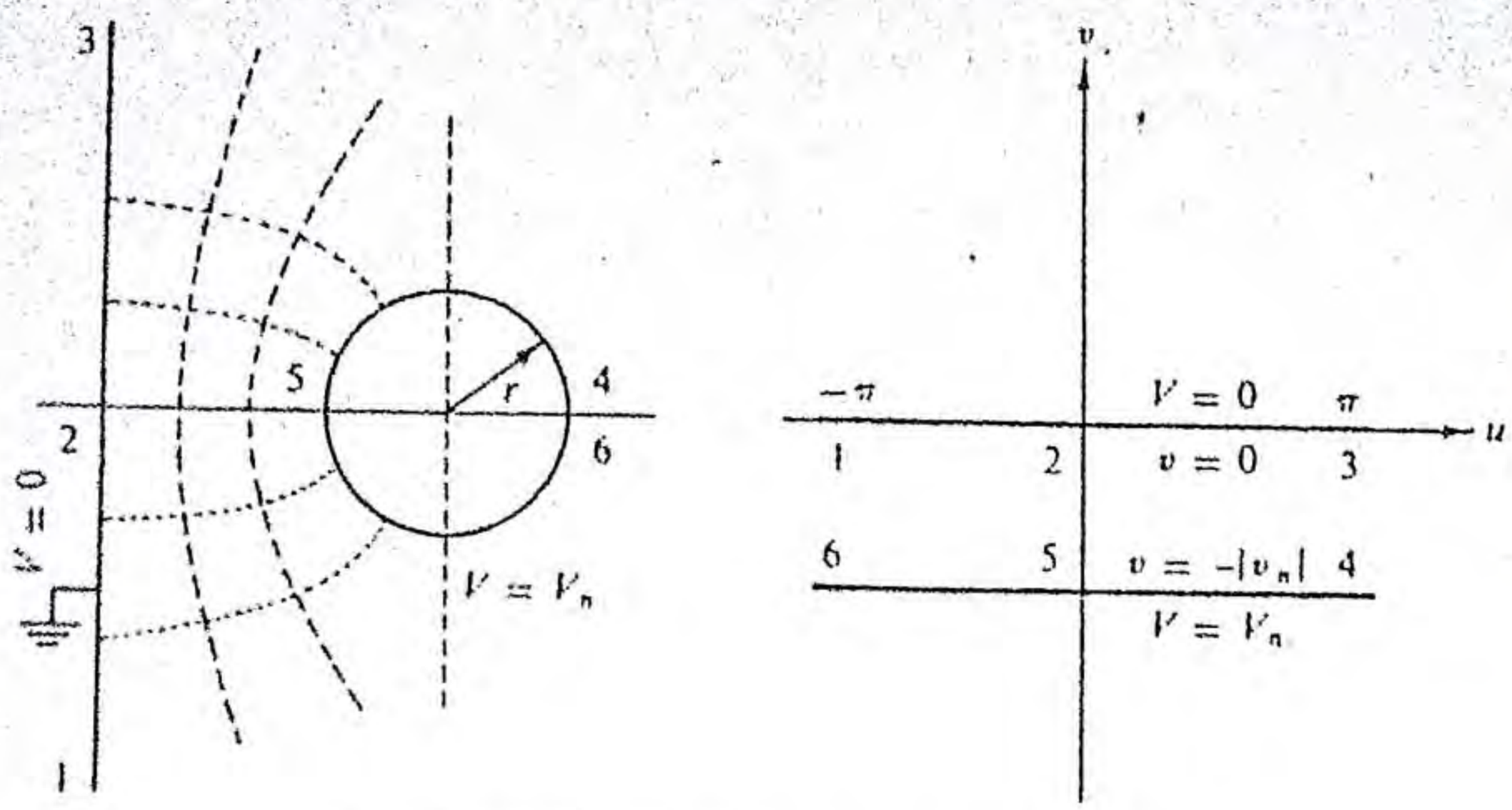


Fig. 6.25 Cilindro infinito paralelo al plano

tal como podrá verificar el lector.[1] Con la ayuda del Ejercicio 6.1.10 la Ec. 6.121 origina

$$x = -a \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v + \cos u},$$

$$y = a \frac{\operatorname{sen} u}{\cosh v + \cos u}.$$

Elimando u, se observa que el círculo se encuentra centrado en $x = d = -a \coth v_n$, $y = 0$ y que tiene un radio de $r = -a \operatorname{csch} v_n$. Esto significa que $v_n = -\cosh^{-1}(d/r)$, seleccionando el signo negativo, ya que v_n es negativa. En el plano w, mediante análisis,[2] el potencial electrostático V es

$$V = +V_n \frac{v}{v_n}, \qquad -|v_n| \leqslant v \leqslant 0$$

$$= \frac{-vV_n}{\cosh^{-1}(d/r)}. \tag{6.122}$$

[1] La verificación no es demasiado dificultosa, pero ¿qué puede decirse acerca de la derivación? Algunas de las transformaciones necesarias se pueden establecer mediante combinaciones de las funciones elementales. La Ec. 6.121 se puede establecer a partir de las funciones exponenciales y trigonométricas con cierta dificultad. La "derivación" usual de una transformada se obtiene de un diccionario de transformadas. Dentro de los mejores y más completos diccionarios de transformadas es de mencionarse el de Z. Nehari, *Conformal Mapping*. Nueva York: McGraw-Hill (1952), y el de H. Kober, *Dictionary of Conformal Representations*. Nueva York: Dover (1952).

[2] Esto requiere de algo más que una simple observación. Las líneas limitantes (superficies) en el plano w son *finitas*, $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$. Sin embargo, $u = \pi$, $v = v$ corresponde al mismo punto en el plano z, como $u = -\pi$, $v = v$, de modo que no se tienen efectos finales después de todo. La coordenada u está definida solamente para $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$.

Ahora, si invertimos la Ec. 6.121, se obtiene v en términos de z, y se sustituye en la Ec. 6.121, se tendrán los equipotenciales en el plano z. Resolviendo la Ec. 6.121 para w, se obtiene

$$w = 2\tan^{-1}\left(-\frac{iz}{a}\right),$$

$$v = -\mathscr{I}\left[2\tan^{-1}\left(\frac{iz}{a}\right)\right] \tag{6.123}$$

$$= -\mathscr{R}\left[2\tanh^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)\right].$$

En consecuencia, el potencial en el plano z derecho $(x \geqslant 0)$ es

$$V = +\mathscr{R}\,\frac{[2\tanh^{-1}(z/a)]V_n}{\cosh^{-1}(d/a)} \tag{6.124}$$

en que todos los signos negativos se cancelan. Esto puede indicarse en una forma más adecuada. La comparación con la Sección 2.9 demuestra que la Ec. 6.121 *genera* un sistema coordenado bipolar. Los equipotenciales son los círculos coordenados[1]

$$(x + a\coth v)^2 + y^2 = a^2\,\mathrm{csch}^2 v. \tag{6.125}$$

El problema electrostático aún no se encuentra completo. Aún se tiene la pregunta de la capacitancia entre dos superficies equipotenciales (por longitud unitaria normal al plano xy). Se tiene

$$w(z) = u(x, y) + i\,v(x, y), \tag{6.126}$$

donde $u(x, y)$ describe los equipotenciales y su función conjugada $v(x, y)$ que describe las líneas de campo o viceversa. La selección es arbitraria, pero para ser consistentes con la Ec. 6.123, la cual constituye una forma específica de la Ec. 6.126, consideremos que $v(x, y)$ describe los equipotenciales y su función conjugada $u(x, y)$ para describir las líneas de campo.

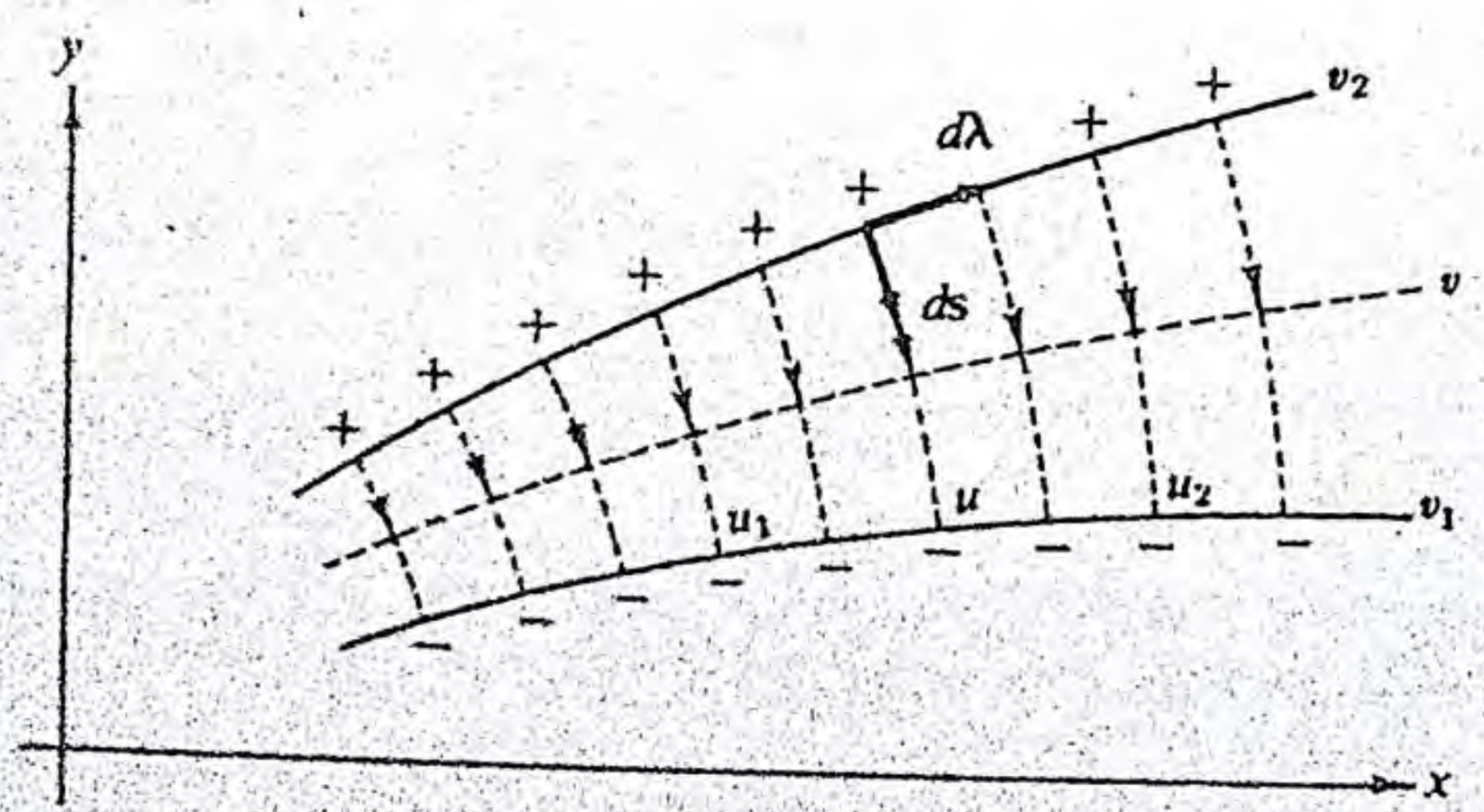


Fig. 6.26 Capacitancia electrostática

[1] Esto representa la etapa final en la identificación de r y d en términos de v_n

La capacitancia por longitud unitaria está definida por

$$C = \frac{\text{carga por longitud unitaria}}{\text{diferencia de potencial}} = \frac{q}{v_2 - v_1}. \tag{6.127}$$

La carga eléctrica por longitud unitaria (en un conductor) se puede calcular comenzando con la ley de Gauss (Sección 1.14).

$$q = \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\varepsilon_0 \int \nabla v \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{6.128}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \nabla v &= \mathbf{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= -\mathbf{i}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{j}\,\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \tag{6.129}$$

de acuerdo con las condiciones de Cauchy-Riemann. Si se sustituye el elemento de área $d\boldsymbol{\sigma}$ por

$$d\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{k} \times d\boldsymbol{\lambda}, \tag{6.130}$$

en donde $d\boldsymbol{\lambda}$ es la dirección de la u creciente (Fig. 6.26) y $\mathbf{k}$ está determinada por $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$,

$$\begin{aligned} q &= \varepsilon_0 \int_{u_1}^{u_2} \left(-\mathbf{i}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{j}\,\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{k} \times d\boldsymbol{\lambda} \\ &= \varepsilon_0 \int_{u_1}^{u_2} \left(\mathbf{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot d\boldsymbol{\lambda} \\ &= \varepsilon_0 (u_2 - u_1). \end{aligned} \tag{6.131}$$

Cuando la Ec. 6.131 para la carga por longitud unitaria (entre u_1 y u_2) se sustituye en la Ec. 6.127, se obtiene

$$C = \varepsilon_0 \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}. \tag{6.132}$$

Si aplicamos la Ec. 6.132 al plano anterior y al problema del cilindro, la capacitancia por longitud unitaria es encontrada al ser

$$C = \varepsilon_0 \frac{2\pi}{(-)v_n} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\cosh^{-1}(d/r)}. \tag{6.133}$$

lo cual concuerda con el Ejercicio 2.9.3.

A continuación se presenta un ejemplo final del uso de las transformaciones conformales.

EJEMPLO 6.7.2

Una diferencia de potencial $2V_0$ se establece entre dos superficies de secciones semicirculares como se muestra en la Fig. 6.27. Se desea definir el potencial en cualquier punto entre las superficies curvadas.

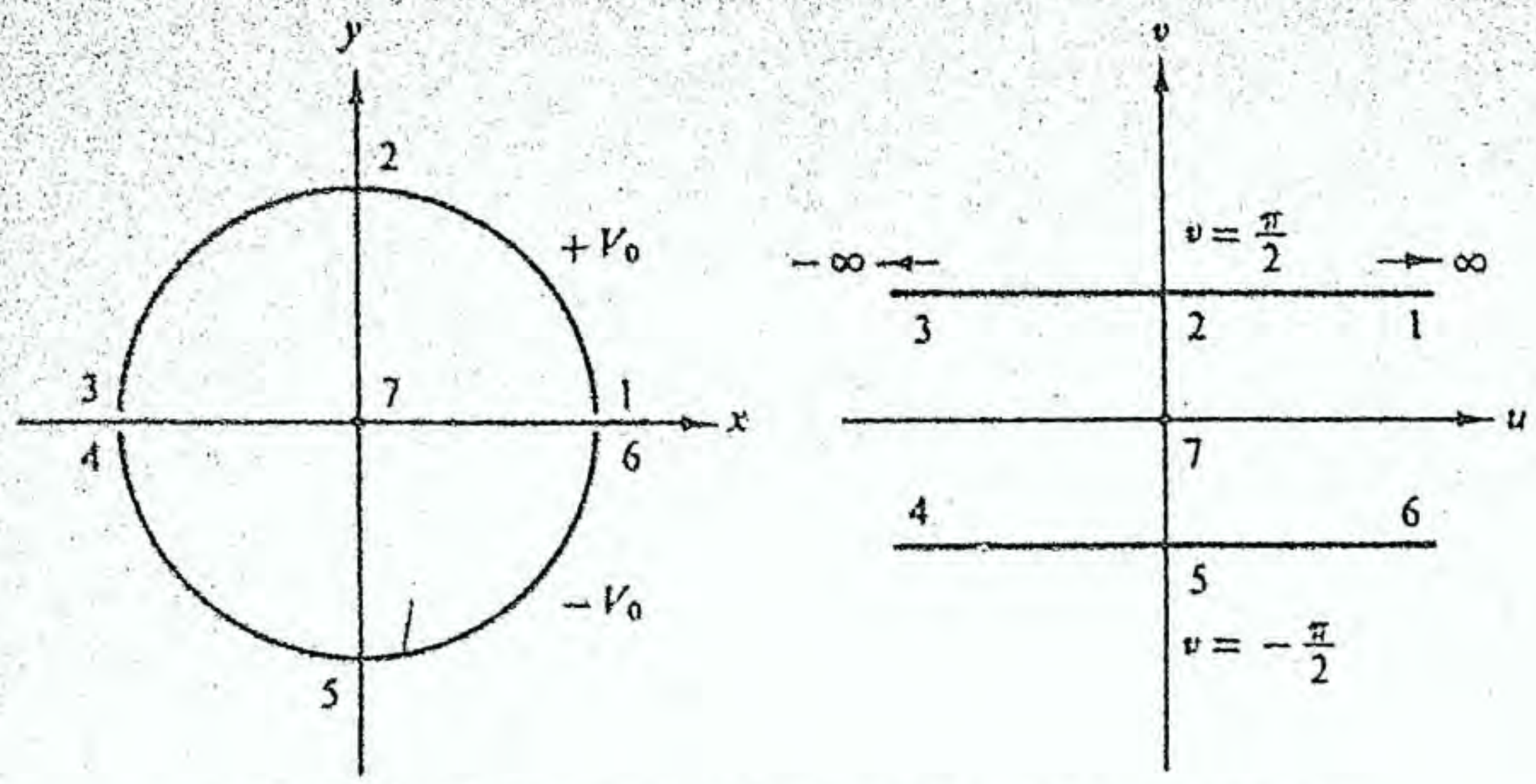


Fig. 6.27 Cilindros semicirculares, conductores, cargados

Los semicírculos en el plano z ($x^2 + y^2 = 1$, radio unitario) se pueden representar en líneas rectas paralelas en el plano w por medio de[1]

$$w = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \tag{6.134}$$

Se tiene

$$u + iv = \ln\frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \ln\frac{1-x^2-y^2+2iy}{1-2x+x^2+y^2}. \tag{6.135}$$

Sustituyendo $(1 - x^2 - y^2 + 2iy)/(1 - 2x + x^2 + y^2)$ por $Re^{i\alpha}$,

$$u + iv = \ln R + i\alpha, \tag{6.136}$$

en donde

$$v = \alpha = \tan^{-1}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}. \tag{6.137}$$

Para representar los límites semicirculares

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{x^2+y^2\to 1\\ y>0}} \tan^{-1}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)} = \frac{\pi}{2}, \\ &\lim_{\substack{x^2+y^2\to 1\\ y<0}} \tan^{-1}\frac{2y}{1-(x^2+y^2)} = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \tag{6.138}$$

tal como se muestra en la Fig. 6.27. El potencial se obtiene (por análisis) en la forma

[1] Resolviendo para z, $z = \tanh w/2$, de modo que nuevamente estamos utilizando la Ec. 6.12) en una forma diferente y en un contexto distinto.

$$V = \frac{2V_0}{\pi} v$$

$$= \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1}\left[\frac{2y}{1-(x^2+y^2)}\right] \tag{6.139}$$

$$= \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{2r \operatorname{sen}\theta}{1-r^2}\right), \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

Este problema particular puede resolverse fácilmente mediante la separación de las variables en coordenadas cilíndricas circulares (cf. Ejercicio 14.3.5). Se obtiene una solución de serie infinita para el potencial. Una ventaja posible del procedimiento de representación conformal es que la solución tiene una forma cerrada.

El lector puede demostrar que el intervalo de u es $-\infty < u < \infty$, ¡lo cual significa que la capacitancia es infinita!

Es de hacerse notar que, aun cuando la técnica de transformación conformal para resolver la ecuación de Laplace es elegante y algunas veces de gran utilidad, no obstante su aplicación es bastante limitada. La técnica puede aplicarse a los problemas bidimensionales (y a los problemas tridimensionales cuando la tercera dimensión es un eje de simetría translacional, sin dependencia en la posición a lo largo del eje). Aun así, la solución analítica es factible solamente para los casos con un grado moderado de simetría o simplicidad. Las técnicas de integración numérica, esenciales en los problemas de tres dimensiones, pueden aplicarse con mayor facilidad a los problemas bidimensionales.

EJERCICIOS

6.7.1 Desarrolle $f(z)$ en una serie de Taylor alrededor del punto $z = z_0$, donde $f'(z_0) = 0$. (Los ángulos no se preservan.) Demuestre que si las primeras $n-1$ derivadas desaparecen, pero $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, los ángulos en el plano z con vértices en $z = z_0$ aparecen en el plano w multiplicados por n.

6.7.2 Desarrolle la transformación para originar cada uno de los cuatro sistemas coordenados cilíndricos:

(a) cilíndrico circular $\quad x = \rho \cos\varphi,$
$\quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi.$

(b) cilíndrico elíptico $\quad x = a \cosh u \cos v,$
$\quad y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v.$

(c) cilíndrico parabólico $\quad x = \xi\eta,$
$\quad y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2).$

(d) bipolar
$$x = \frac{a \operatorname{senh} \eta}{\cosh \eta - \cos \xi},$$
$$y = \frac{a \operatorname{sen} \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}.$$

Nota. Estas transformaciones no son necesariamente analíticas.

6.7.3 En la transformación

$$e^z = \frac{a - w}{a + w}$$

¿en qué forma se transforman las líneas coordenadas en el plano z? ¿Cuál es el sistema coordenado del Capítulo 2 que se ha construido?

6.7.4 En un problema electrostático, los equipotenciales están definidos por $u(x, y) = c_i$, en donde u es la parte real de $w(z)$ y en que $w(z)$ es analítica. Demuestre que la magnitud del campo eléctrico $\mathbf{E}$ está determinada por

$$|\mathbf{E}| = \left| \frac{dw(z)}{dz} \right|.$$

6.7.5 Demuestre la forma en que la transformación de la Ec. 6.108

$$w = a \ln z$$

puede representar un campo (bidimensional) de una carga de línea, en que la línea es perpendicular al plano xy. Vuelva a normalizar la transformación de modo que describa la carga unitaria (por longitud unitaria).

6.7.6 Un cilindro conductor de radio a lleva una carga (por longitud unitaria) de Q. Un cilindro conductor concéntrico exterior de radio b lleva una carga (por longitud unitaria) de $-Q$.

(a) Encuentre la transformación $w = w(z)$ que representa los cilindros equipotenciales en segmentos de línea paralelos.

(b) Encuentre el equipotencial V y el campo eléctrico $\mathbf{E}$ como función de la posición en el plano w.

(c) Transformando nuevamente al plano z, demuestre que

$$V(\rho) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \ln (\rho/a)$$

$$\mathbf{E}(\rho) = \rho_0 \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \rho}.$$

(d) Demuestre que la capacitancia (por longitud unitaria) es

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln (b/a)}.$$

6.7.7 Dos conductores cilíndricos, uno de radio r_1 y el otro de radio r_2, están separados por una distancia de centro a centro D. ¿Cuál es la capacitancia por longitud unitaria si

(a) $D > r_1 + r_2$.

(b) $0 < D < |r_1 - r_2|$.

(c) Para demuestre que la capacitancia por longitud unitaria se transforma en

$$C \approx \pi\varepsilon_0/\ln\,[D/(r_1 r_2)^{1/2}].$$

A modo de comprobación, compare con la solución establecida para el mismo problema en coordenadas bipolares, Ejercicio 2.9.3.

6.7.8 (a) Encuentre el potencial electrostático *exterior* a los cilindros semicirculares del Ejemplo 6.7.2.
(b) Calcule la densidad de carga $\sigma = \varepsilon_0 E_r$ ($r = 1$, exterior).

Respuesta. (a) $V = \dfrac{2V_0}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{2r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2-1}\right),\ r \geq 1.$

(b) $$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=1} = \frac{2\varepsilon_0 V_0}{\pi}\csc\theta.$$

6.7.9 Una cinta conductora aplanada y delgada con ancho de $2a$ se lleva hasta el potencial V_0 arriba de tierra. Encuentre lo siguiente:
(a) Las líneas de potencial constante.
(b) Las líneas de campo eléctrico. (Estas se han trazado en la Fig. 6.28).
(c) La distribución de la carga eléctrica en función de la distancia desde la línea de centro de la cinta.
(d) La capacitancia por longitud unitaria.

6.7.10 Las dos transformaciones analíticas

$$z = a\,\mathrm{sen}\,w$$

$$z = -a\tanh\frac{iw}{2}$$

establecen conjuntos de equipotenciales y líneas de campo correspondientes a $u = c_i$ y $v = c_j$, con el segmento de línea $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = 0$ como equipotencial posible cuando $v = 0$.
(a) Trace un sistema ortogonal resultante de cada una de las dos transformaciones.
(b) ¿Cuál es la diferencia entre estos dos casos desde el punto de vista físico?

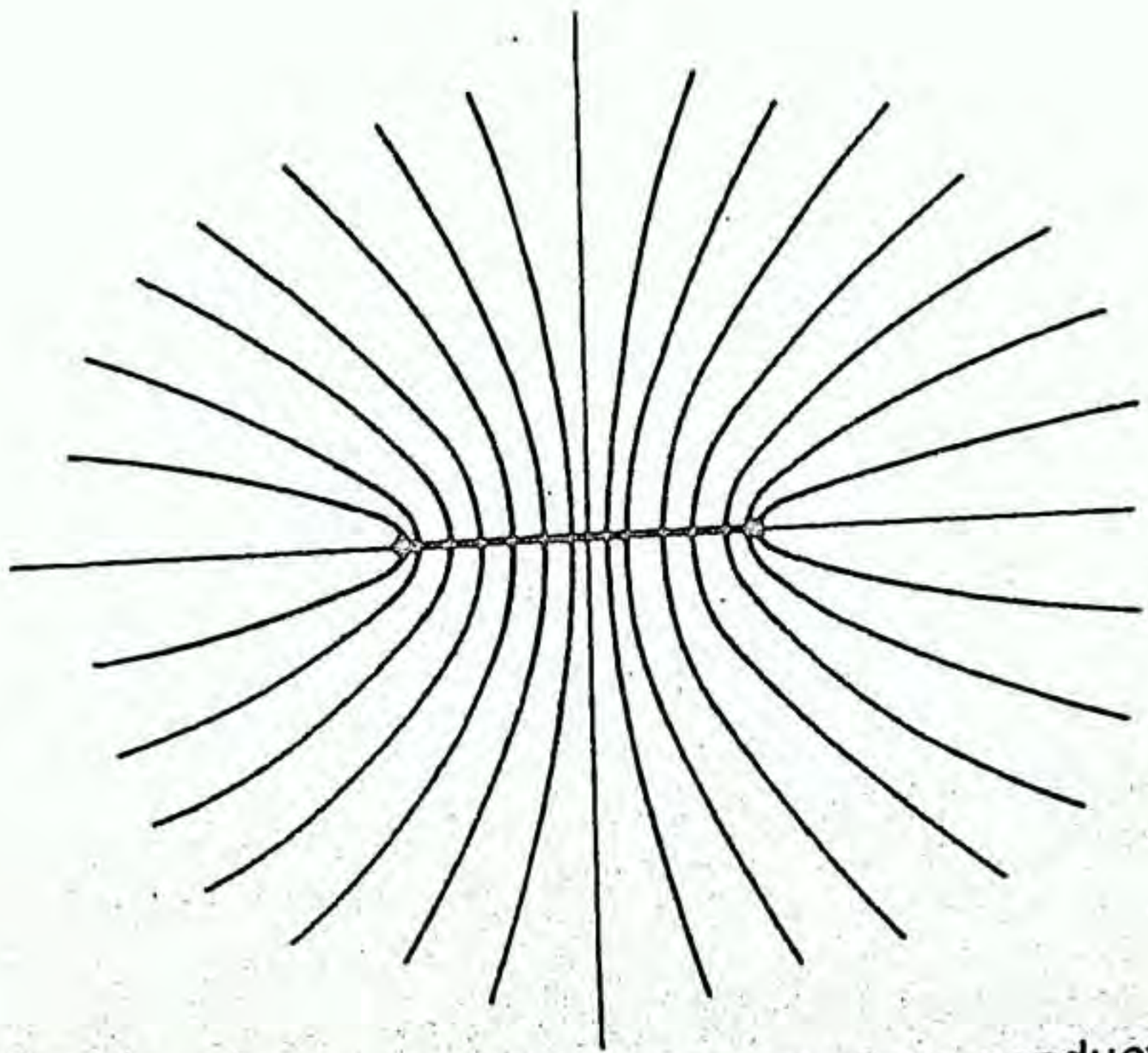


Fig. 6.28 Campo eléctrico de una cinta conductora cargada

6.7.11 Demuestre que la transformación

$$w = e^z + z$$

representa la línea infinita $y = \pm\pi$ en líneas semiinfinitas $u \leqslant u_0$, $v = \pm\pi$. Esto es equivalente a la transformación de un capacitor de placa paralela infinito o sin borde (plano z) en un capacitor de placa paralelo (plano w). Trace los equipotenciales en el plano w cerca del borde de las placas del capacitor. Encuentre el campo eléctrico en el plano intermedio entre las dos placas (a $v = 0$) como función de u.

6.7.12 (a) Un cilindro conductor de radio unitario se coloca en un campo eléctrico uniforme, $\mathbf{E}_0$. El eje del cilindro es perpendicular a la dirección del campo original. Utilizando la transformación

$$w = z + \frac{1}{z},$$

encuentre el potencial electrostático perturbado.

6.7.13 Reinterprete el Ejercicio 6.7.12 en términos del flujo irrotacional de fluido que pasa un obstáculo circular.

6.7.14 En términos de flujo de fluidos demuestre la forma en que

$$w = a \ln z$$

se puede interpretar como la fuente en el origen ($\nabla \cdot \mathbf{V} \neq 0$). Observe que el flujo aún es irrotacional, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$.

Sugerencia. Demuestre que el flujo de fluido neto a través de cualquier curva cerrada es $\oint dv$, en donde v es $\mathscr{I}(w)$. La derivación de esto es similar al cálculo de la capacitancia electrostática en esta sección.

6.8 Transformación de Schwarz-Christoffel

La transformación de Schwarz-Christoffel puede establecerse para representar el eje real del plano w en cualquier polígono deseado en el plano z, en que la mitad superior ($v > 0$) del plano w queda representado en el interior del polígono. Así, la transformación inversa representa el polígono del plano z en la mitad superior del plano w. Esto nos proporciona una forma sistemática de derivar una transformación conformal útil para las figuras de tipo polígono, incluyendo diversos casos degenerados.

Para desarrollar la transformación de Schwarz-Christoffel, considere primeramente la función $z'(w)$:

$$\frac{dz}{dw} = A(w - w_1)^{-k_1}, \tag{6.140}$$

en donde A es una constante compleja, k_1 es una constante real y w_1 es un punto en el eje real (u). La fase o argumento está definido por

$$\arg \frac{dz}{dw} = \begin{cases} \arg A - k_1\pi, & w < w_1, \\ \arg A, & w > w_1, \end{cases} \tag{6.141}$$

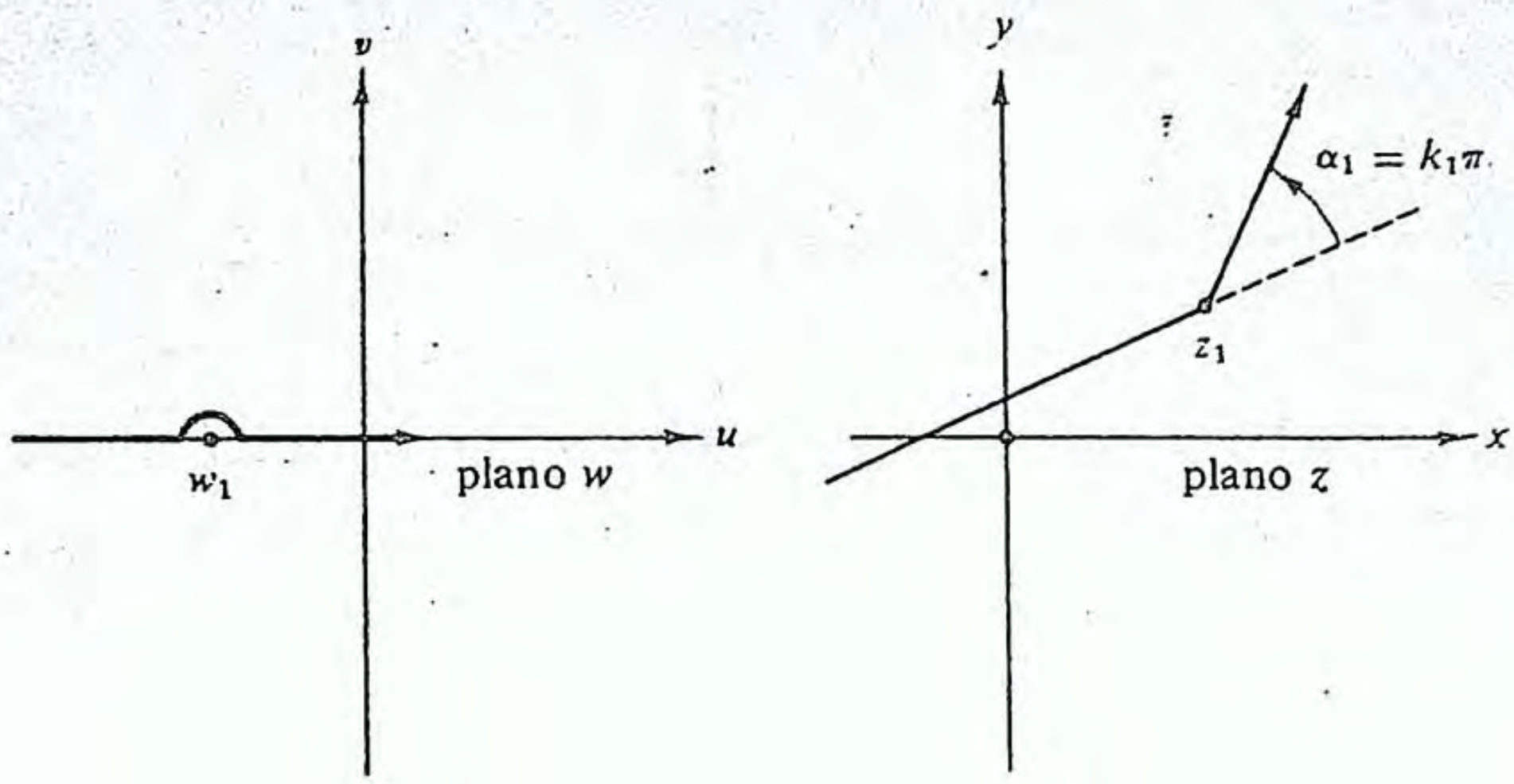


Fig. 6.29 Transformación de Schwarz-Christoffel

para w moviéndose a lo largo del eje real. Se tiene $\arg(w - w_1) = \pi$ para $w < w_1$, y $\arg(w - w_1) = 0$ para $w > w_1$; es decir, conforme w se mueve a lo largo del eje u en el sentido positivo, el argumento de dz/dw salta continuamente en la cantidad $k_1\pi$ cuando w pasa el punto w_1. Considerando como referencia la Sección 6.7, especialmente la Fig. 6.23, se observa que $\arg \Delta w = 0$ constante. En consecuencia

$$\arg \Delta z = \begin{cases} \arg A - k_1\pi, & w < w_1, \\ \arg A, & w > w_1. \end{cases} \tag{6.142}$$

Ya que A es una constante (a nuestra disposición), $\arg A$ es una constante y z consecuentemente es un par de segmentos de línea recta que forman el ángulo exterior $\alpha_1 = k_1\pi$.

Del factor $(w - w_1)^{-k_1}$, Ec. 6.140, se obtiene un vértice del polígono. Mediante la inclusión de n factores de esta forma se construye el polígono de n vértices:

$$\frac{dz}{dw} = A(w - w_1)^{-k_1}(w - w_2)^{-k_2} \cdots (w - w_n)^{-k_n}, \tag{6.143}$$

con la limitación

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 2, \tag{6.144}$$

de modo que la suma de los ángulos exteriores será 2π.[1]

Mediante integración de la Ec. 6.143 se tiene

$$z = A \int^{w} (w - w_1)^{-k_1}(w - w_2)^{-k_2} \cdots (w - w_n)^{-k_n}\, dw + B. \tag{6.145}$$

[1] Si se trata en términos de los contornos cerrados del Capítulo 7, esto garantiza que el semicírculo infinito en la mitad superior el plano w que cierra el contorno no contribuya en nada a la integral.

La constante compleja A nos permite hacer girar y orientar el polígono del plano z tal como se requiera y la constante de integración compleja B se encuentra disponible para cualquier desplazamiento translacional necesario. En el plano z el polígono puede especificarse al definir las localizaciones de los n vértices, lo cual significa fijar $2n$ constantes. Sin embargo, la Ec. 6.145 tiene $2n + 4$ parámetros,

$$\begin{array}{lll} n & w_i\text{'s} & \text{(Las } w_i\text{'s son reales)} \\ n & k_i\text{'s} & \\ 4 & A \text{ y } B & \\ \hline 2n+4 & & \end{array}$$

a partir de los cuales se elimina uno para la limitación de la Ec. 6.144 resultando esto en $2n + 3$ parámetros. En consecuencia, tres de las singularidades w_i pueden seleccionarse arbitrariamente, después de lo cual el resto queda determinado en forma única. Normalmente las tres w_i arbitrarias se seleccionan para facilitar la evaluación de la integral (Ec. 6.145).

EJEMPLO 6.8.1

Represente el eje w real en el "triángulo" mostrado en la Fig. 6.30. De acuerdo con el diagrama

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\to \frac{\pi}{2}, & k_1 &\to \frac{1}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{\pi}{2}, & k_2 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_3 &\to \pi, & k_3 &\to 1. \end{aligned} \tag{6.146}$$

Por conveniencia, está permitido que $w_1 = -1$, $w_2 = +1$, y $w_3 \to \infty$, con A disponible para compensar por w_3. Siendo así, mediante la Ec. 6.145

$$\begin{aligned} z &= A \int^{w} (w+1)^{-1/2}(w-1)^{-1/2}\, dw + B \\ &= A \int^{w} (w^2-1)^{-1/2} + B. \end{aligned} \tag{6.147}$$

Integrando

$$\begin{aligned} z &= A \cosh^{-1} w + B \\ w &= \cosh\left(\frac{z-B}{A}\right). \end{aligned} \tag{6.148}$$

Las constantes A y B se evalúan al observar que cuando $w = -1$, $z = ia$, y cuando $w = +1$, $z = 0$. De acuerdo con la última condición, $B = 0$. De acuerdo con la primera

$$\cosh \frac{ia}{A} = \cos \frac{a}{A} = -1, \tag{6.149}$$

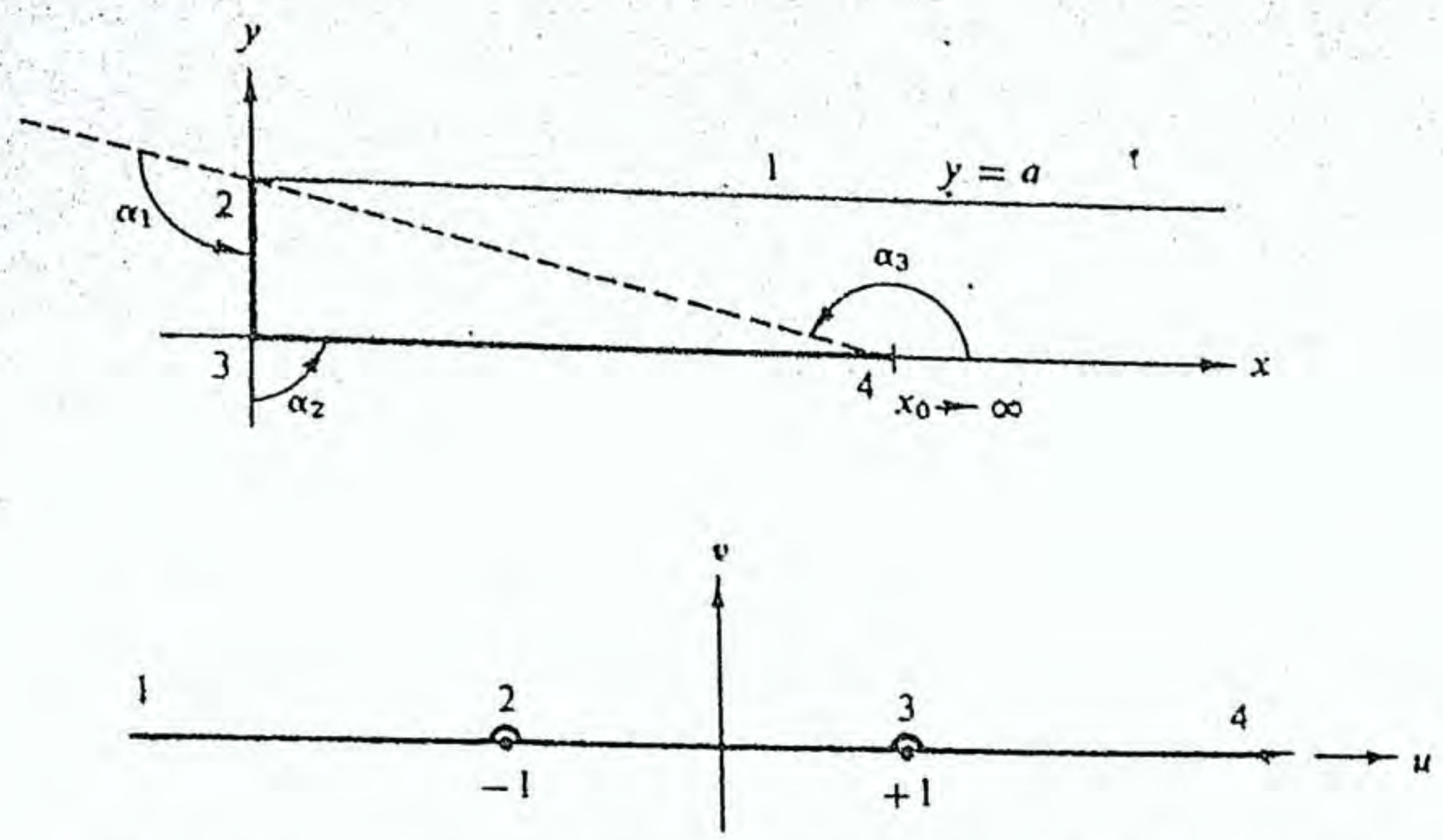


Fig. 6.30 Representación de Schwarz-Christoffel de un triángulo degenerado

lo cual demuestra que $A = a/\pi$. En consecuencia,

$$w = \cosh \frac{\pi z}{a} \tag{6.150}$$

La mitad superior del plano w se encuentra representada en el interior de la cinta semiinfinita.

EJEMPLO 6.8.2

Represente el eje w real en el "triángulo" mostrado en la Fig. 6.31. A partir de este diagrama

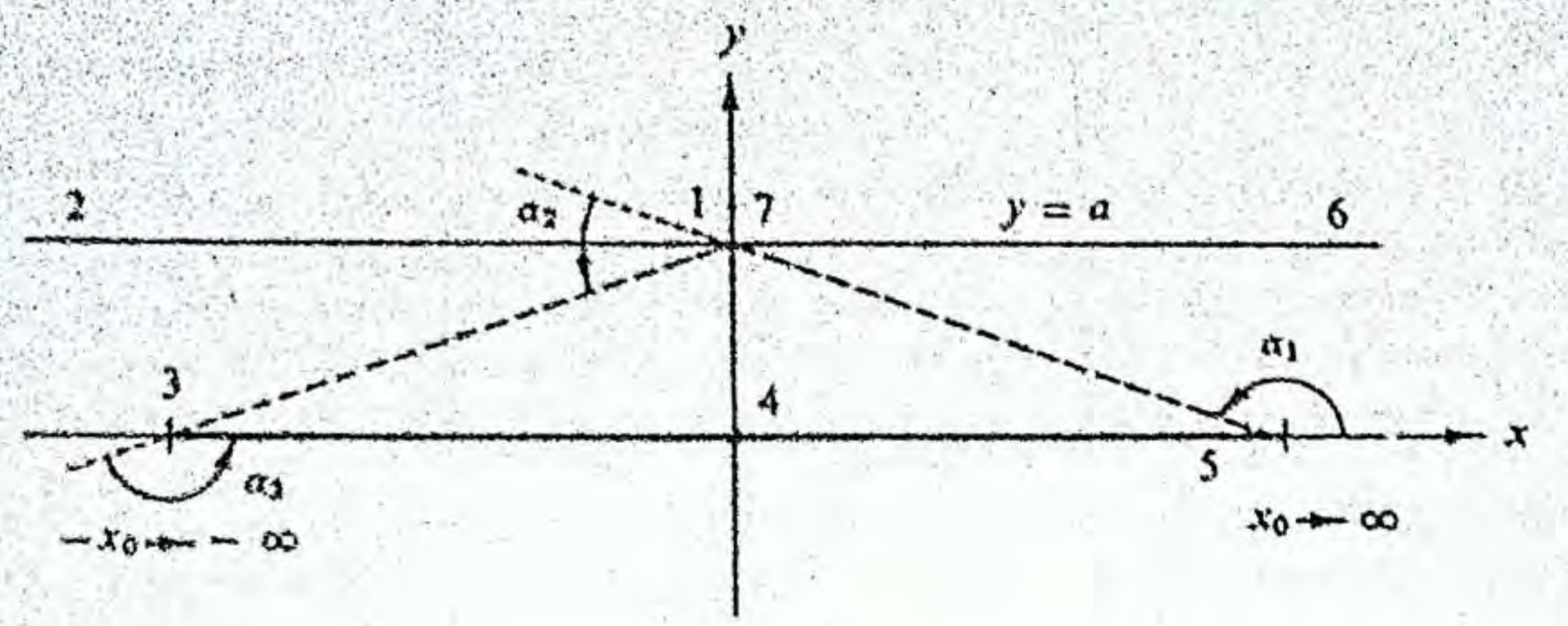
$$\begin{aligned} \alpha_1 &\to \pi, \qquad k_1 \to 1, \\ \alpha_3 &\to \pi, \qquad k_3 \to 1, \end{aligned} \tag{6.151}$$

y ya que $\alpha_2 \to 0$, $k_2 \to 0$, y este factor puede desecharse. Como en el ejemplo anterior, arbitrariamente situamos las singularidades en -1 y $+1$. Siendo así,

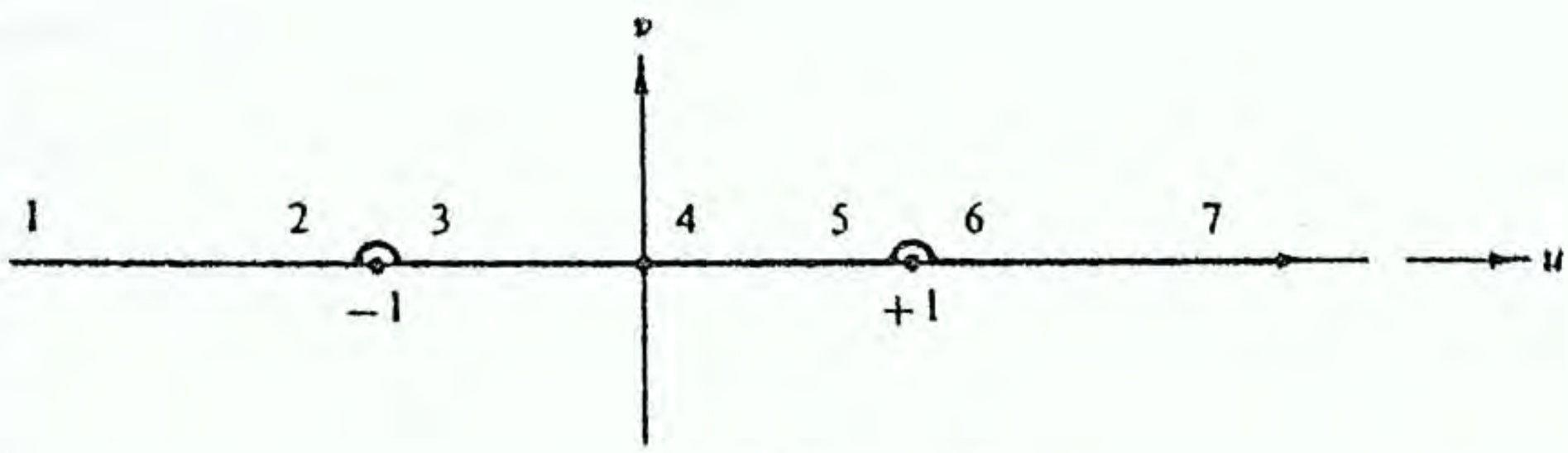
$$\begin{aligned} z &= A \int^{w} (w-1)^{-1}(w+1)^{-1}\, dw + B \\ &= \frac{A}{2} \ln \frac{w-1}{w+1} + B. \end{aligned} \tag{6.152}$$

Las constantes A y B se evalúan al requerir que $w = 0$ corresponda a $z = 0$, o

$$\frac{A}{2} \ln(-1) + B = \frac{i\pi A}{2} + B = 0. \tag{6.153}$$



(a)



(b)

Fig. 6.31 Representación de Schwarz-Christoffel de un triángulo degenerado

Asimismo, conforme $w \to \pm\infty$, $z = ia$ o sea

$$ia = \frac{A}{2} \ln 1 + B = B. \tag{6.154}$$

En consecuencia,

$$z = -\frac{a}{\pi} \ln\left(\frac{w-1}{w+1}\right) + ia. \tag{6.155}$$

Es de hacerse notar que la selección de las singularidades ($w_3 = -1$, $w_1 = +1$) fuerza la correspondencia de

$$\begin{aligned} -1 < u < 1, \quad & v = 0 \quad \text{y} \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \\ -\infty < u < -1, \quad & v = 0 \quad \text{y} \quad -\infty < x < 0, \quad y = a, \\ 1 < u < \infty, \quad & v = 0 \quad \text{y} \quad 0 < x < \infty, \quad y = a, \end{aligned}$$

mostrado por los números de posición en los planos z y w. Una selección diferente de singularidades habría originado una transformación distinta y una correspondencia diferente. En algunos ejercicios, la Ec. 6.155 se puede utilizar para establecer la transformación de Schwarz-Christoffel de un polígono y representar la misma en dos líneas infinitas paralelas de modo que la ecuación de Laplace pueda resolverse por inspección.

EJERCICIOS

6.8.1 Utilizando el procedimiento de Schwarz-Christoffel, represente el polígono limitado por las tres líneas $x = -a$, $y = 0$, $x = +a$ en el eje u (plano w) con las singularidades en $u = \pm 1$, $v = 0$.

6.8.2 El eje real en el plano z entre $x = -a$ y $x = +a$ se mantiene al potencial de 100 voltios. El resto del eje real se encuentra conectado a tierra. Encuentre el potencial para cualquier punto en $x = 0$. ¿Cuál es la capacitancia (por longitud unitaria) de este sistema?

6.8.3 Derive la transformación $w = z^2$ (la cual representa el primer cuadrante del plano z en la mitad superior del plano w) mediante el uso de la transformación de Schwarz-Christoffel.

6.8.4 Encuentre el potencial electrostático en cualquier punto $x > 0$, $y > 0$, si el eje real (x) se encuentra conectado a tierra, $V = 0$, y el eje imaginario (y) se mantiene a $V = 100$.

6.8.5 Derive la transformación de capacitor de placa paralelo

$$w = e^z + z$$

(Ejercicio 6.7.11) mediante el uso de la transformación de Schwarz-Christoffel.

REFERENCIAS

CHURCHILL, R. V., *Complex Variables and Applications*. 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill (1960). Tanto para el estudiante principiante como para el avanzado, este es un excelente texto. Es de fácil lectura y bastante completo. En el Capítulo 5 se proporciona una demostración detallada del teorema de Cauchy-Goursat.

LASS, H., *Elements of Pure and Applied Mathematics*. Nueva York: McGraw-Hill (1957). El Capítulo 4 incluye una presentación útil de la teoría de las variables complejas.

MORSE, P. M. y FESHBACH, H., *Methods of Theoretical Physics*. Nueva York: McGraw-Hill (1953). El Capítulo 4 es una presentación de parte de la teoría de las funciones de una variable compleja que son de interés para los físicos teóricos.

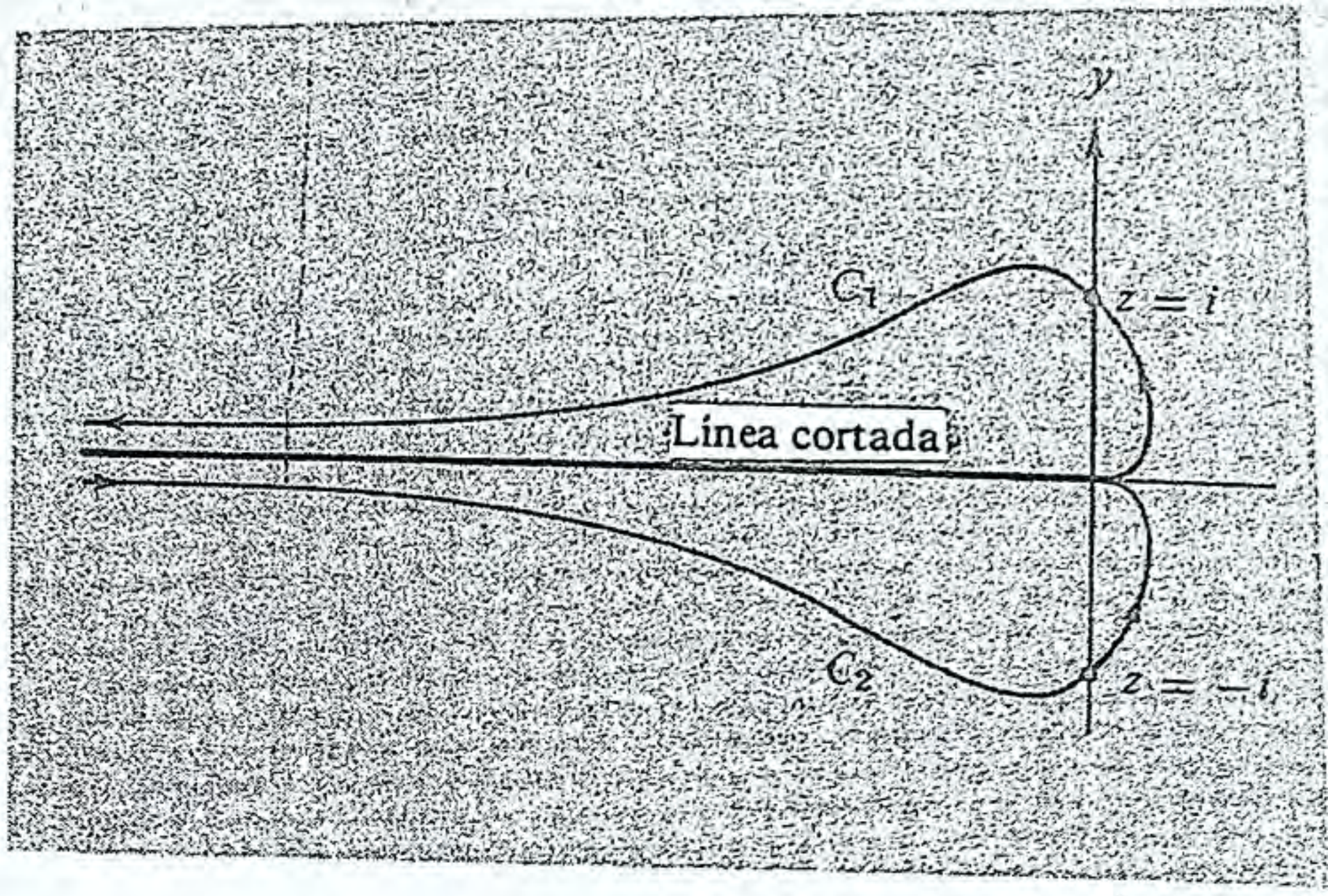
SMITH, L. P., *Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Nueva York: Prentice-Hall (1953). Smith utiliza extensamente las variables complejas en el desarrollo de las series de potencias, series de funciones, teoría de las funciones, representación conformal y el cálculo de residuos. El Capítulo 9 incluye algunas de las aplicaciones implicadas y reales de la transformación de Schwarz-Christoffel.

SOKOLNIKOFF, I. S. y REDHEFFER, R. M., *Mathematics of Physics and Modern Engineering*. Nueva York: McGraw-Hill (1958). El Capítulo 7 se refiere a las variables complejas.

SPIEGEL, M. R., *Theory and Problems of Complex Variables*. Nueva York: Schaum (1964). Un excelente resumen para los científicos sobre la teoría de las variables complejas.

WATSON, G. N., *Complex Integration and Cauchy's Theorem*. Nueva York: Hafner (orig. 1917). Un estudio breve conteniendo un desarrollo riguroso del teorema de la integral de Cauchy y la fórmula de la integral de Cauchy. Se incluyen aplicaciones del cálculo de residuos. *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*, No. 15.

Al final del Capítulo 15 se proporcionan otras referencias.



CAPITULO 7

FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA II. CALCULO DE RESIDUOS

7.1 Singularidades

En este capítulo regresaremos a la línea de análisis iniciado con las condiciones de Cauchy-Riemann en el Capítulo 6 y que dio origen al desarrollo de Laurent (Sección 6.5). El desarrollo de Laurent representa una generalización de la serie de Taylor en presencia de las singularidades. Definimos un punto z_0 como un punto singular aislado de la función $f(z)$ si $f(z)$ no es analítica en $z = z_0$ pero siendo analítica en las cercanías.

Polos. En el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \tag{7.1}$$

Si $a_n = 0$ para $n < -m < 0$ y $a_{-m} \neq 0$, se dice que z_0 es un polo de orden m. Por ejemplo, si $m = 1$, es decir si $a_{-1}/(z - z_0)$ es el primer término que no desaparece en la serie de Laurent, se tiene un polo de orden uno, lo cual frecuentemente se denomina polo simple.

Por otra parte, si la suma continúa hasta $n = -\infty$, z_0 es un polo de orden infinito y se denomina singularidad esencial. Estas singularidades esenciales tienen muchas características patológicas. Por ejemplo, se puede demostrar que en cualquier cercanía pequeña de una singularidad esencial de $f(z)$, la función $f(z)$ queda arbitrariamente cerca de cualquier (y consecuentemente todas) cantidad compleja preseleccionada w_0.[1] Literalmente, todo el plano w se representa en las cercanías del punto z_0. Un

[1] Este teorema se debe a Picard. Una prueba está dada por E. C. Titchmarsch, *The Theory of Functions*, 2a. ed. Nueva York: Oxford University Press (1939).

aspecto de diferencia fundamental entre un polo de orden finito y una singularidad esencial es que el polo de orden m se puede remover al multiplicar $f(z)$ por $(z - z_0)^m$. Esto evidentemente no puede realizarse para una singularidad esencial.

El comportamiento de $f(z)$ conforme $z \to \infty$ se define en términos del comportamiento de $f(1/t)$ a medida que $t \to 0$. Considere la función

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{7.2}$$

A medida que $z \to \infty$, se sustituye z por $1/t$ para obtener

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, t^{2n+1}}. \tag{7.3}$$

Evidentemente, de acuerdo con la definición, sen z tiene una singularidad esencial en el infinito. Este resultado podría hacerse en forma anterior al Ejercicio 6.1.7 ya que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} iy, \qquad \text{cuando } x = 0, \\ &= i \operatorname{senh} y, \end{aligned}$$

que se aproxima al infinito exponencialmente conforme $y \to \infty$.

Puntos de Ramificación. Estos representan otra clase de singularidad que será de importancia en secciones posteriores de este capítulo. Considere

$$f(z) = z^a,$$

en donde a no es un número entero.[1] A medida que z se desplaza alrededor del círculo unitario desde e^0 hasta $e^{2\pi i}$,

$$f(z) \to e^{2\pi a i} \neq e^{0i},$$

para a no integral. Del mismo modo que en la Sección 6.6, se tiene un punto de ramificación. Los puntos e^{0i} y $e^{2\pi i}$ en el plano z coinciden, aunque estos puntos coincidentes originan valores *diferentes* de $f(z)$; es decir, $f(z)$ es una función de valor múltiple. El problema se resuelve al construir una línea de corte de modo que $f(z)$ quede especificada de manera única para cierto punto en el plano z.

Observe cuidadosamente que una función con un punto de ramificación y una línea de corte requerida no es continua a través de la línea de corte. En general, existe una diferencia de fase en los lados opuestos de es-

[1] $z = 0$ es un punto singular desde el punto de vista técnico, ya que z^a solo tiene un número finito de derivadas mientras que una función analítica tiene garantizado un número infinito de derivadas (Sección 6.4).

ta línea de corte. En consecuencia, las integrales de línea en los lados opuestos de esta línea de corte del punto de ramificación no necesariamente se cancelan entre sí. En los ejercicios aparecen numerosos ejemplos de esto.

La línea de corte utilizada para convertir una región de conexión múltiple en una región de conexión simple (Sección 6.3) es completamente distinta. Nuestra función es continua a través de la línea de corte y no existe diferencia de fase.

EJEMPLO 7.1.1

Considere la función

$$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} = (z + 1)^{1/2}(z - 1)^{1/2}. \tag{7.4}$$

El primer factor en el lado derecho, $(z + 1)^{1/2}$, tiene un punto de ramificación en $z = -1$. El segundo factor tiene un punto de ramificación en $z = +1$. Para comprobar la posibilidad de considerar el segmento de línea que une $z = +1$ y $z = -1$ como línea de corte, sigamos las fases de estos dos factores conforme nos desplazamos a lo largo del contorno mostrado en la Fig. 7.1.

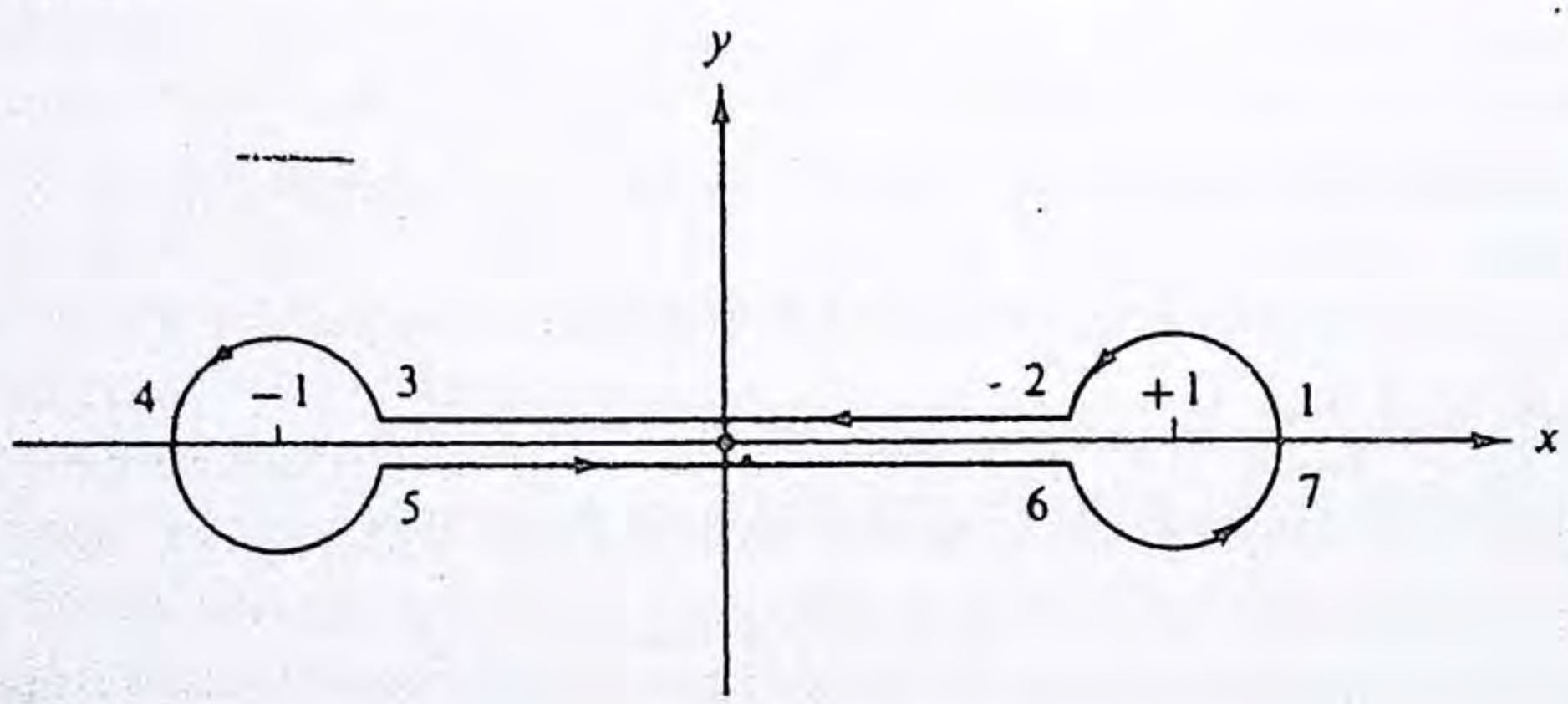


Fig. 7.1

Comenzando en el punto 1, en donde $(z + 1)$ y $(z - 1)$ tienen una fase cero, se puede construir la tabla 7.1

TABLA 7.1

	Angulo de fase		
Punto	$(z+1)$	$(z-1)$	$(z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}$
1	0	0	0
2	0	π	$\pi/2$
3	0	π	$\pi/2$
4	π	π	π
5	2π	π	$3\pi/2$
6	2π	π	$3\pi/2$
7	2π	2π	2π

Efectuando el desplazamiento desde el punto 1 hasta el punto 2, la fase de $(z-1)$ se incrementa en π, es decir $z-1$ se vuelve negativa. La fase de $z-1$ luego permanece constante hasta que se completa el círculo al moverse de 6 a 7. La fase de $(z+1)$ muestra un comportamiento similar incrementándose en 2π conforme nos movemos de 3 a 5. La fase de $f(z) = (z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}$ tabulada en la columna final es la mitad de la suma de las dos columnas anteriores.

Dos características son evidentes:

1. La fase en los puntos 5 y 6 no es la misma que la fase en los puntos 2 y 3. Este comportamiento puede esperarse en la línea de corte.

2. La fase en el punto 7 excede a la correspondiente en el punto 1 en la proporción de 2π y la función $f(z) = (z^2-1)^{1/2}$ consecuentemente es de *valor simple* para el contorno mostrado, rodeando *ambos* puntos de ramificación.

Si se considera el eje x $-1 \leqslant x \leqslant 1$ como línea de corte, $f(z)$ queda especificada de manera única. Alternativamente, el eje x positivo para $x > 1$ y el eje x negativo para $x < -1$ se pueden considerar como líneas de corte. Los puntos de ramificación no pueden rodearse y la función continúa siendo de valor simple.

Generalizando a partir de este ejemplo, la fase de una función

$$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot f_3(z) \cdots$$

es la suma algebraica de la fase de sus factores individuales:

$$\arg f(z) = \arg f_1(z) + \arg f_2(z) + \arg f_3(z) + \cdots$$

La fase de un factor individual puede considerarse como el arco tangente de la relación de su parte imaginaria a su parte real,

$$\arg f_i(z) = \tan^{-1}(v_i/u_i).$$

Para el caso de un factor de la forma

$$f_i(z) = (z - z_0),$$

la fase corresponde al ángulo de fase de un vector bidimensional desde $+z_0$ hasta z, de modo que la fase aumenta en 2π conforme el punto $+z_0$ queda rodeado. Alternativamente, el giro de cualquier circuito cerrado que no rodee a z_0 *no* cambia la fase de $z - z_0$.

Como nota final acerca de las singularidades, el teorema de Liouville (Ejercicio 6.4.6) establece: "*una función que es finita en cualquier parte (limitada) y analítica debe ser constante*".

Esto se demuestra fácilmente mediante el uso de la fórmula de la integral de Cauchy. Alternativamente, la más ligera desviación de una función analítica con respecto a un valor constante implica que al menos debe existir una singularidad en alguna parte en el plano complejo infinito.

Además de las funciones constantes triviales, las singularidades son un hecho de la vida y debemos aprender a vivir con las mismas. Utilizaremos las singularidades para desarrollar el poderoso y útil cálculo de residuos.

EJERCICIOS

7.1.1 La función $f(z)$ desarrollada en la forma de una serie de Laurent manifiesta un polo del orden m a $z = z_0$. Demuestre que el coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$, a_{-1}, está determinado por

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z - z_0)^m f(z)\right]_{z=z_0},$$

con

$$a_{-1} = [(z - z_0)f(z)]_{z=z_0},$$

cuando el polo es un polo simple ($m = 1$).

7.1.2 La función $f(z)$ se puede representar por medio de

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

en donde $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son analíticas. El denominador $f_2(z)$ desaparece en $z = z_0$ indicando que $f(z)$ tiene un polo en $z = z_0$. Sin embargo, $f_1(z_0) \neq 0$, $f_2'(z_0) \neq 0$. Demuestre que a_{-1}, el coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en un desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $z = z_0$, está definido por

$$a_{-1} = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}.$$

7.1.3 En analogía con el Ejercicio 7.1.1 considere en detalle la fase de cada factor y la fase total resultante de $f(z) = (z^2 + 1)^{1/2}$ siguiendo un contorno similar al mostrado en la Fig. 7.1, pero circundando los nuevos puntos de ramificación.

7.1.4 La función de Legendre de segunda clase, $Q_\nu(z)$, tiene puntos de ramificación en $z = \pm 1$. Los puntos de ramificación se unen por medio de una línea de corte a lo largo del eje real (x).

(a) Demuestre que $Q_0(z) = \frac{1}{2}\ln((z + 1)/(z - 1))$ es de valor simple (con el eje real $-1 \leq x \leq 1$ considerado como línea de corte).

(b) Para el argumento real x y $|x| < 1$ es conveniente considerar

$$Q_0(x) = \tfrac{1}{2}\ln((1 + x)/(1 - x)).$$

Demuestre que

$$Q_0(x) = \tfrac{1}{2}[Q_0(x + i0) + Q_0(x - i0)].$$

Aquí $x + i0$ indica que z se aproxima al eje real desde arriba, $x - i0$ indica una aproximación desde abajo.

7.1.5 Como ejemplo de singularidad esencial considere $e^{1/z}$ conforme z se aproxima a cero. Para cualquier número complejo z_0, $z_0 \neq 0$, demuestre que

$$e^{1/z} = z_0$$

tiene un número infinito de soluciones.

Teorema del Residuo. Si el desarrollo de Laurent de una función se integra término por término mediante el uso de un contorno que circunde un punto singular aislado z_0 una vez en el sentido contrario a las manecillas del reloj, se obtiene

$$a_n \oint (z - z_0)^n \, dz = a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} \Bigg|_{z_1}^{z_1}$$

$$= 0 \text{ para } n \neq -1. \tag{7.5}$$

Sin embargo, si $n = -1$,

$$a_{-1} \oint (z - z_0)^{-1} \, dz = a_{-1} \oint \frac{ire^{i\theta} \, d\theta}{re^{i\theta}} = 2\pi i a_{-1}. \tag{7.6}$$

Sumando las Ecs. 7.5 y 7.6, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \, dz = a_{-1}. \tag{7.7}$$

La constante a_{-1}, el coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent, se denomina *residuo* de $f(z)$ en $z = z_0$.

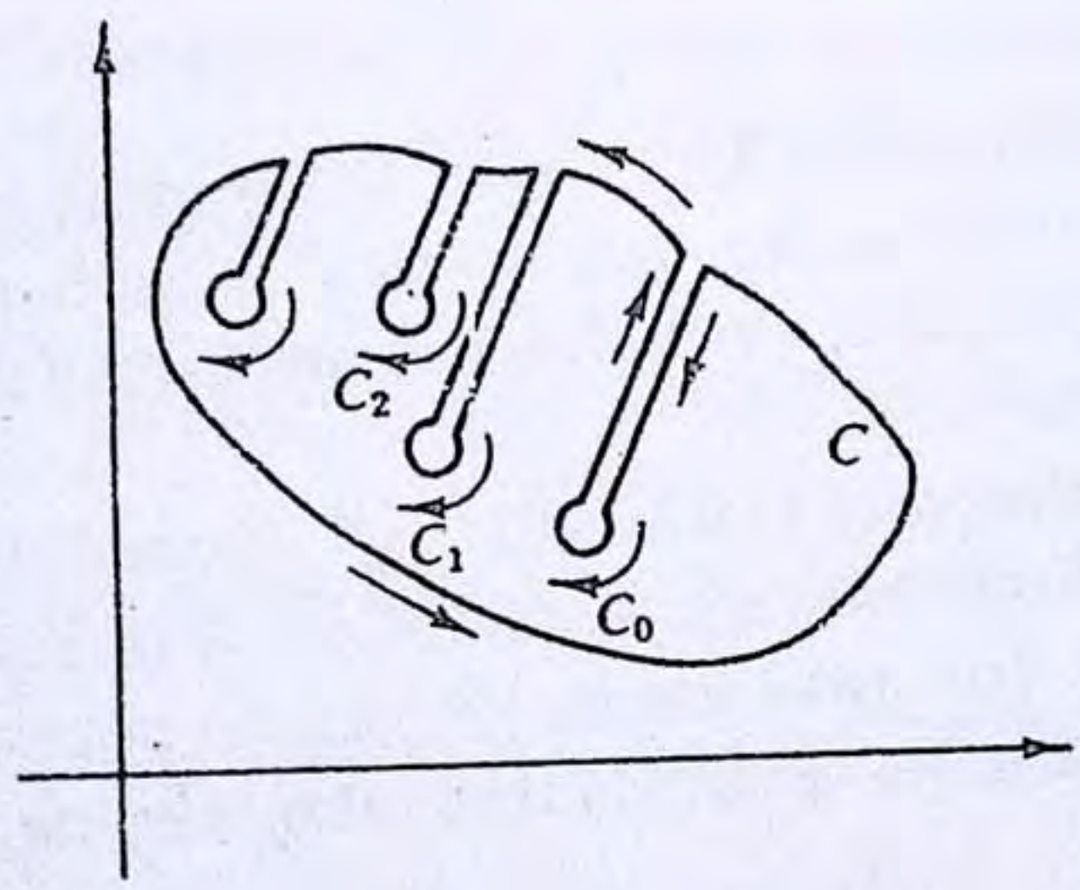


Fig. 7.2 Exclusión de singularidades aisladas

Un conjunto de singularidades aisladas puede manejarse con bastante facilidad al deformar nuestro contorno como se muestra en la Fig. 7.2. El teorema de la integral de Cauchy (Sección 6.3) origina

$$\oint_C f(z) \, dz + \oint_{C_0} f(z) \, dz + \oint_{C_1} f(z) \, dz + \oint_{C_2} f(z) \, dz + \cdots = 0. \tag{7.8}$$

La integral circular alrededor de cualquier punto singular dado está definida por la Ec. 7.7

$$\oint_{C_i} f(z) \, dz = -2\pi i \, a_{-1} \, (z = z_i), \tag{7.9}$$

suponiendo un desarrollo de Laurent alrededor del punto singular $z = z_i$. El signo negativo procede de la integración en el sentido de las manecillas del reloj en la Fig. 7.2. Combinando las Ecs. 7.8 y 7.9, se tiene

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i(a_{-1z_0} + a_{-1z_1} + a_{-1z_2} + \cdots)$$

$$= 2\pi i \quad \text{(suma de residuos incluidos).} \tag{7.10}$$

Esto es el *teorema del residuo.*

Valor Principal de Cauchy. Ocasionalmente, un polo de primer orden aislado quedará definido directamente en el contorno de integración. En este caso, podemos deformar el contorno para incluir o excluir el residuo según se requiera al incluir una desviación semicircular de radio infinitesimal. Esto se muestra en la Fig. 7.3. La integración sobre el semicírculo proporciona

$\pi i a_{-1}$ si es en el sentido contrario a las manecillas del reloj

$-\pi i a_{-1}$ si es el sentido de las manecillas del reloj

Esta contribución, + o −, aparece en el lado izquierdo de la Ec. 7.10. Si nuestra derivación es en el sentido de las manecillas del reloj, el residuo no quedará circundado y no se tendrá el término correspondiente en el lado derecho de la Ec. 7.10. Sin embargo, si nuestra derivación fuera en el sentido contrario a las manecillas del reloj, el residuo quedará circundado por el contorno C y a el término $2\pi i a_{-1}$ aparecerá en el lado derecho de la Ec. 7.10. El resultado neto para la derivación en el sentido de las manecillas del reloj o el sentido contrario es que un polo simple en el contorno se cuenta como una mitad de lo que habría sido si hubiera estado dentro del contorno. Esto corresponde a considerar el valor principal de Cauchy.

Por ejemplo, suponga que $f(z)$ con una singularidad en $z = x_0$ se integra sobre todo el eje real. El contorno se cierra con un semicírculo infinito en el plano medio superior. Siendo así

$$\oint f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{Cx_0} f(z)\,dz$$

$$+ \int_{x_0+\delta}^{\infty} f(x)\,dx + \int_C \text{semicírculo infinito} \tag{7.11}$$

$$= 2\pi i \sum \text{residuos } \textit{encerrados}$$

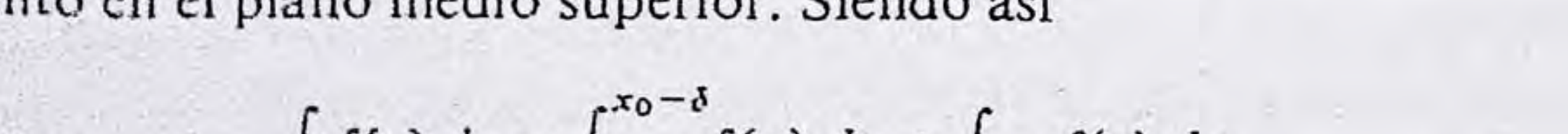


Fig. 7.3 Desviación con respecto a los puntos singulares

Si el pequeño semicírculo C_{x_0} incluye x_0 (al pasar debajo del eje x, en el sentido contrario a las manecillas del reloj), x_0 queda circundado, y su contribución aparece *duplicada* —en la forma $\pi i a_{-1}$ en $\int_{C_{x_0}}$ y como $2\pi i a_{-1}$ en el término $2\pi i \sum$ residuos circundados— para una contribución neta de $\pi i a_{-1}$. Si se selecciona el pequeño semicírculo superior, x_0 queda excluida. La única contribución procede de la integración sobre C_{x_0} que proporciona $-\pi i a_{-1}$. Moviendo esto al extremo derecho de la Ec. 7.11, se tiene $+\pi i a_{-1}$, como antes.

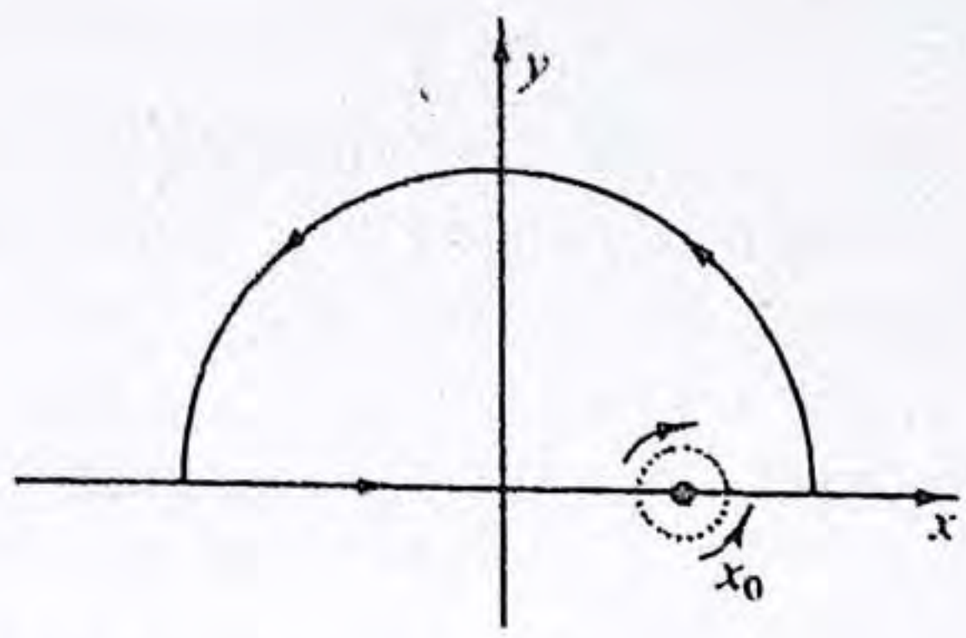


Fig. 7.4 Cerrando el contorno con un semicírculo de radio infinito

Las integrales a lo largo del eje x se pueden combinar y permitir que el radio del semicírculo es aproxime a cero. Se tiene

$$\lim_{\delta \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0 - \delta} f(x)\, dx + \int_{x_0 + \delta}^{\infty} f(x)\, dx \right\} = \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx. \tag{7.12}$$

en donde **P** indica el valor principal de Cauchy y representa el proceso limitante anterior. Observe cuidadosamente que el valor principal de Cauchy es un proceso de balanceo o cancelación. En la vecindad de la singularidad a $z = x_0$,

$$f(x) \approx \frac{a_{-1}}{x - x_0}. \tag{7.13}$$

Esto es singular con respecto a x_0. El intervalo simétrico o uniforme (relativo a x_0) proporciona la cancelación de las áreas sombreadas, Fig. 7.5. La contribución de la singularidad se encuentra en la integración alrededor del semicírculo.

Ocasionalmente, esta misma técnica limitante se aplica a los límites de integración $\pm\infty$. Podemos definir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} f(x)\, dx. \tag{7.14}$$

El Ejemplo 2.9.1 es una ilustración de esta forma del valor principal de Cauchy.

Un tratamiento alternativo mueve el polo fuera del contorno y luego considera el comportamiento limitante conforme se regresa. Esta técnica

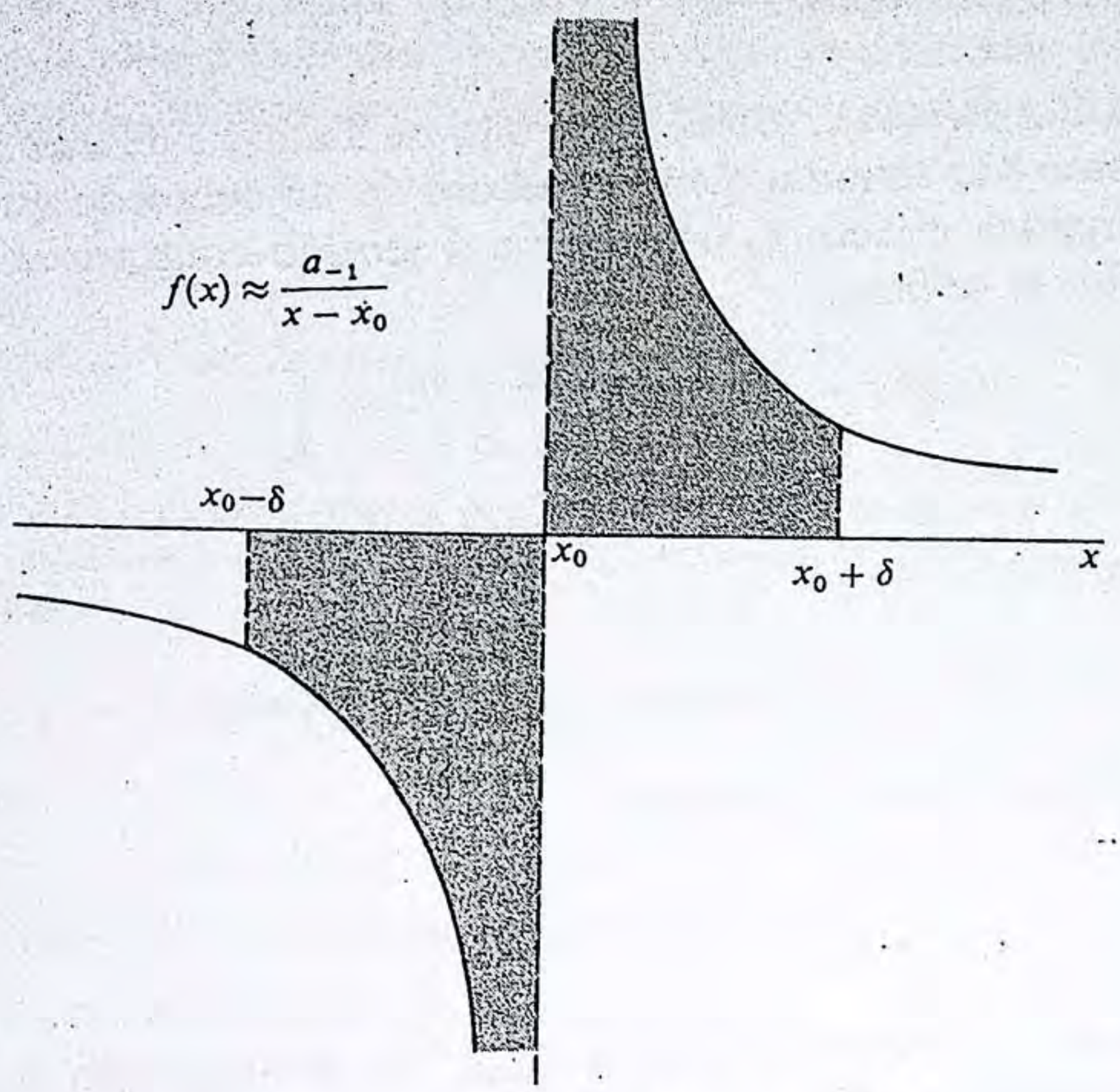


Fig. 7.5 $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\, dx$

se ilustra en el Ejemplo 7.2.3, en que los puntos singulares se mueven fuera del contorno de tal modo que la solución se fuerza a adquirir la forma deseada para satisfacer las condiciones limitantes del problema físico.

Evaluación de Integrales Definidas. $\int_0^{2\pi} f(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, d\theta$. El cálculo de residuos es de utilidad en la evaluación de una amplia variedad de integrales definidas en los problemas físicos y puramente matemáticos. Primeramente procederemos a considerar integrales de la forma

$$I = \int_0^{2\pi} f(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, d\theta, \tag{7.15}$$

en donde f es finita para todos los valores de θ. También requerimos que f sea una función racional del sen θ y cos θ de modo que sea de valor simple. Sea

$$z = e^{i\theta}, \qquad dz = ie^{i\theta}\, d\theta.$$

A partir de esto,

$$d\theta = -i\frac{dz}{z}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}. \tag{7.16}$$

Nuestra integral se transforma en

$$I = -i\oint f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{z}, \tag{7.17}$$

en que la trayectoria de integración es el círculo unitario. Mediante el teorema del residuo, Ec. 7.10

$$I = (-i)2\pi i \sum \text{ residuos dentro del círculo unitario.} \tag{7.18}$$

Observe que se pretende obtener los residuos de $f(z)/z$. En los Ejercicios 7.2.4-7 se proporcionan ilustraciones de las integrales de este tipo.

Evaluación de Integrales Definidas. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Suponga que nuestra integral definida tiene la forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{7.19}$$

y que satisface dos condiciones:

(a) $f(z)$ es analítica en el plano medio superior, excepto para un número finito de polos. (Se supondrá que no existen polos en el eje real. Si los polos se encuentran presentes en el eje real, se pueden incluir o excluir tal como se ha descrito anteriormente en esta sección.)

(b) $f(z)$ desaparece en la misma proporción[1] que $1/z^2$ para $|z| \to \infty$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$.

Con estas condiciones, se puede considerar como contorno de integración el eje real y un semicírculo en el plano medio superior tal como se muestra en la Fig. 7.6. Se permite que el radio R del semicírculo se vuelva infinitamente grande. Siendo así

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{\pi} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \\ &= 2\pi i \sum \text{ residuos (plano medio superior).} \end{aligned} \tag{7.20}$$

De acuerdo con la segunda condición, la segunda integral (sobre el semicírculo) desaparece, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \text{ residuos (plano medio superior).} \tag{7.21}$$

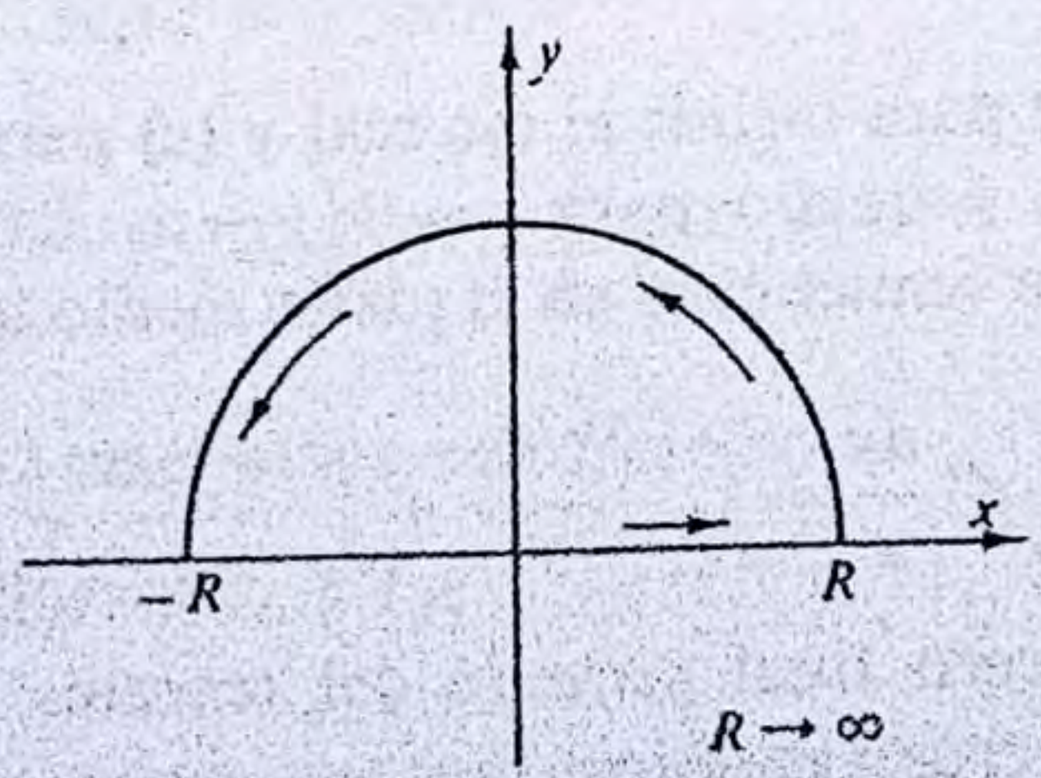


Fig. 7.6

[1] Se podría considerar el que $f(z)$ desaparezca con mayor rapidez que $1/z$, pero se desea que $f(z)$ sea de valor simple.

EJEMPLO 7.2.1

Evalúe

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}. \tag{7.22}$$

A partir de la Ec. 7.21

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = 2\pi i \sum \text{residuos (plano medio superior)}.$$

En este y en cualquier otro problema similar se tiene la pregunta: ¿dónde están los polos? Volviendo a establecer el *integrando* en la forma

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z + i} \cdot \frac{1}{z - i}, \tag{7.23}$$

se observa que se tienen polos simples (orden 1) en $z = i$ y $z = -i$.

Un polo simple en $z = z_0$ indica (y está definido por) el desarrollo de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{7.24}$$

El residuo a_{-1} se aísla fácilmente en la forma

$$a_{-1} = (z - z_0) f(z)|_{z=z_0}. \tag{7.25}$$

Utilizando la Ec. 7.25, se encuentra que el residuo en $z = i$ es $1/2i$, mientras que en $z = -i$ es $-1/2i$.

Siendo así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi. \tag{7.26}$$

En este caso hemos utilizado $a_{-1} = 1/2i$ para el residuo de un polo incluido en $z = i$. El lector deberá quedar satisfecho por sí mismo al saber de la posibilidad de utilizar el semicírculo inferior y que esta selección origina el mismo resultado, $I = \pi$. Un problema algo más delicado se proporciona en el siguiente ejemplo.

Evaluación de Integrales Definidas. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx$. Considere la integral definida

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\, dx \tag{7.27}$$

con a real y positiva. Esta es la transformada de Fourier, Capítulo 15. Supondremos la condición

$$\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0, \qquad 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi. \tag{7.28}$$

Utilizamos el contorno mostrado en la Fig. 7.6. La aplicación del cálculo de residuos es la misma que en la página anterior, pero en este caso tenemos que trabajar un poco más para demostrar que la integral sobre el semicírculo (infinito) llega a cero. Esta integral se transforma en

$$I_R = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{iaR\cos\theta - aR\,\mathrm{sen}\,\theta} iRe^{i\theta}\, d\theta. \tag{7.29}$$

Sea R tan grande que $|f(z)| = |f(Re^{i\theta})| < \varepsilon$. Siendo así

$$\begin{aligned} |I_R| &\leqslant \varepsilon R \int_0^{\pi} e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta \\ &= 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta. \end{aligned} \tag{7.30}$$

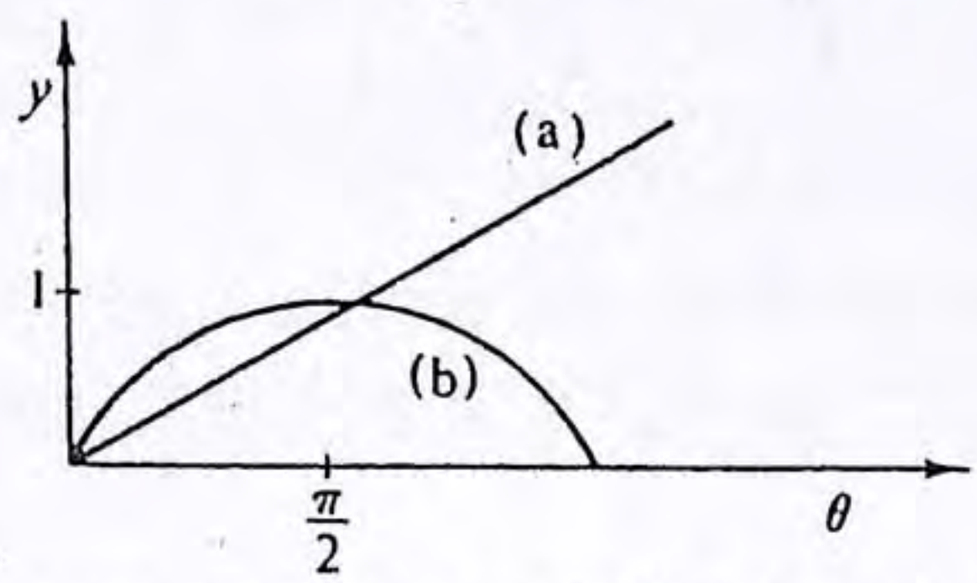


Fig. 7.7 (a) $y = (2/\pi)\theta$, (b) $y = \mathrm{sen}\,\theta$

En el intervalo $[0, \pi/2]$,

$$\frac{2}{\pi}\theta \leqslant \mathrm{sen}\,\theta.$$

En consecuencia,

$$|I_R| \leqslant 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-aR2\theta/\pi}\, d\theta. \tag{7.31}$$

Ahora, integrando por análisis,

$$|I_R| \leqslant 2\varepsilon R \frac{1 - e^{-aR}}{aR2/\pi}.$$

Finalmente,

$$\lim_{R\to\infty} |I_R| \leqslant \frac{\pi}{a}\varepsilon. \tag{7.32}$$

A partir de la Ec. 7.28, $\varepsilon \to 0$ conforme $R \to \infty$, y

$$\lim_{R\to\infty} |I_R| = 0. \tag{7.33}$$

Este resultado útil se denomina algunas veces *lema de Jordan*. Mediante el mismo quedamos preparados para la solución de las integrales de Fourier de la forma mostrada en la Ec. 7.27

Utilizando el contorno mostrado en la Fig. 7.6, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx + \lim_{R\to\infty} I_R = 2\pi i \sum \text{residuos (planos medio superior)}.$$

Ya que la integral sobre el semicírculo superior I_R desaparece conforme $R \to \infty$ (lema de Jordan),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum \text{residuos (plano medio superior)}. \tag{7.34}$$

EJEMPLO 7.2.2. SINGULARIDAD EN EL CONTORNO DE INTEGRACION

Evalúe

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx. \tag{7.35}$$

Esto puede considerarse como la parte imaginaria[1] de

$$I_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}\,dz}{z}. \tag{7.36}$$

Ahora el único polo es un polo simple en $z = 0$ y el residuo según la Ec. 7.25 es $a_{-1} = 1$. Seleccionamos el contorno mostrado en la Fig. 7.8(a) para

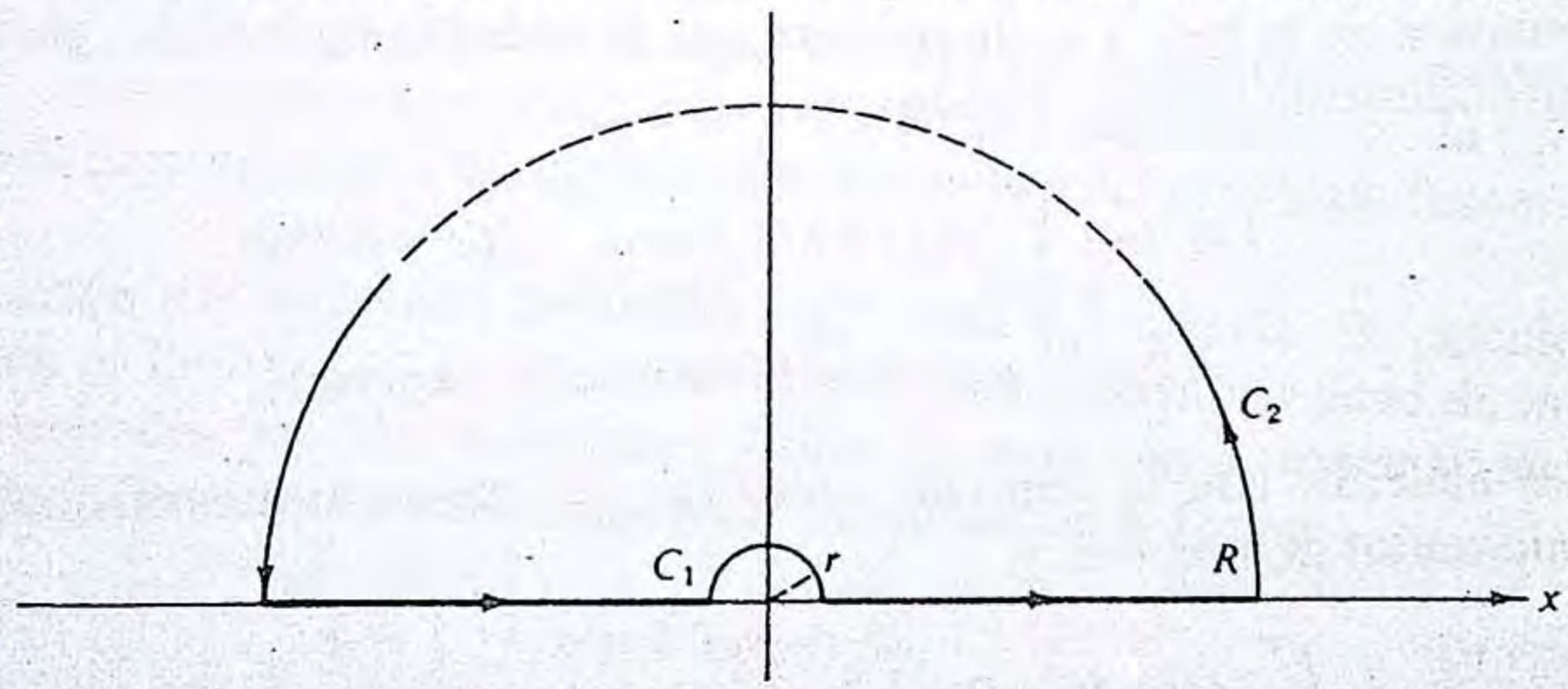


Fig. 7.8

evitar el polo, (b) para incluir el eje real y (c) para obtener un *integrando* desvanecidamente pequeño para $z = iy, y \to \infty$. Observe que en este caso sería desastroso un semicírculo en el plano medio inferior. Se tiene

$$\oint \frac{e^{iz}\,dz}{z} = \int_{-R}^{-r} e^{ix}\frac{dx}{x} + \int_{C_1} \frac{e^{iz}\,dz}{z} + \int_r^R \frac{e^{ix}\,dx}{x} + \int_{C_2} \frac{e^{iz}\,dz}{z} = 0, \tag{7.37}$$

de modo que el cero final procede del teorema del residuo (Ec. 7.10). Según el lema de Jordan anterior,

[1] Se puede utilizar $\int[(e^{iz} - e^{-iz})/2iz]dz$, pero se requiere de dos contornos distintos para los dos exponenciales (cf. Ejemplo 7.2.3).

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}\,dz}{z} = 0, \tag{7.38}$$

y

$$\oint \frac{e^{iz}\,dz}{z} = \int_{C_1} \frac{e^{iz}\,dz}{z} + P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{x} = 0. \tag{7.39}$$

La integral sobre el pequeño semicírculo proporciona $(-)\,\pi i$ veces el residuo de 1, menos como resultado de ir en el sentido de las manecillas del reloj. Considerando la parte imaginaria[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi, \tag{7.40}$$

o

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{7.41}$$

El contorno de la Fig. 7.8, aun cuando no es conveniente, no es del todo único. En el Ejercicio 7.2.11 se presenta otra selección del contorno para la evaluación de la Ec. 7.35.

EJEMPLO 7.2.3. DISPERSION MECANICA CUANTICA

El análisis mecánico cuántico de la dispersión origina la función

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x\,dx}{x^2 - \sigma^2}, \tag{7.42}$$

en donde σ es real y positiva. De acuerdo con las condiciones físicas del problema se tiene un requisito adicional: $I(\sigma)$ debe tener la forma $e^{i\sigma}$ de modo que represente una onda dispersa saliente.

Utilizando

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{1}{i} \operatorname{senh} iz \\ &= \frac{1}{2i} e^{iz} - \frac{1}{2i} e^{-iz}, \end{aligned} \tag{7.43}$$

se establece la Ec. 7.42 en el plano complejo como

$$I(\sigma) = I_1 + I_2, \tag{7.44}$$

[1] Alternativamente, se pueden combinar las integrales de la Ec. 7.37 en la forma

$$\int_{-R}^{-r} e^{ix}\frac{dx}{x} + \int_{r}^{R} e^{ix}\frac{dx}{x} = \int_{r}^{R} (e^{ix} - e^{-ix})\frac{dx}{x} = i2\int_{r}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

con

$$I_1 = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2 - \sigma^2}\, dz,$$
$$I_2 = -\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{-iz}}{z^2 - \sigma^2}\, dz. \tag{7.45}$$

La integral I_1 es similar al Ejemplo 7.2.2 y, como en este caso, podemos completar el contorno por medio de un semicírculo infinito en el plano medio superior. Para I_2, el exponencial es negativo y el contorno se completa por medio de un semicírculo infinito en el plano medio inferior, tal como se muestra en la Fig. 7.9. Del mismo modo que en el Ejemplo 7.2.2, ninguno de los semicírculos contribuye en nada a la integral. Lema de Jordan.

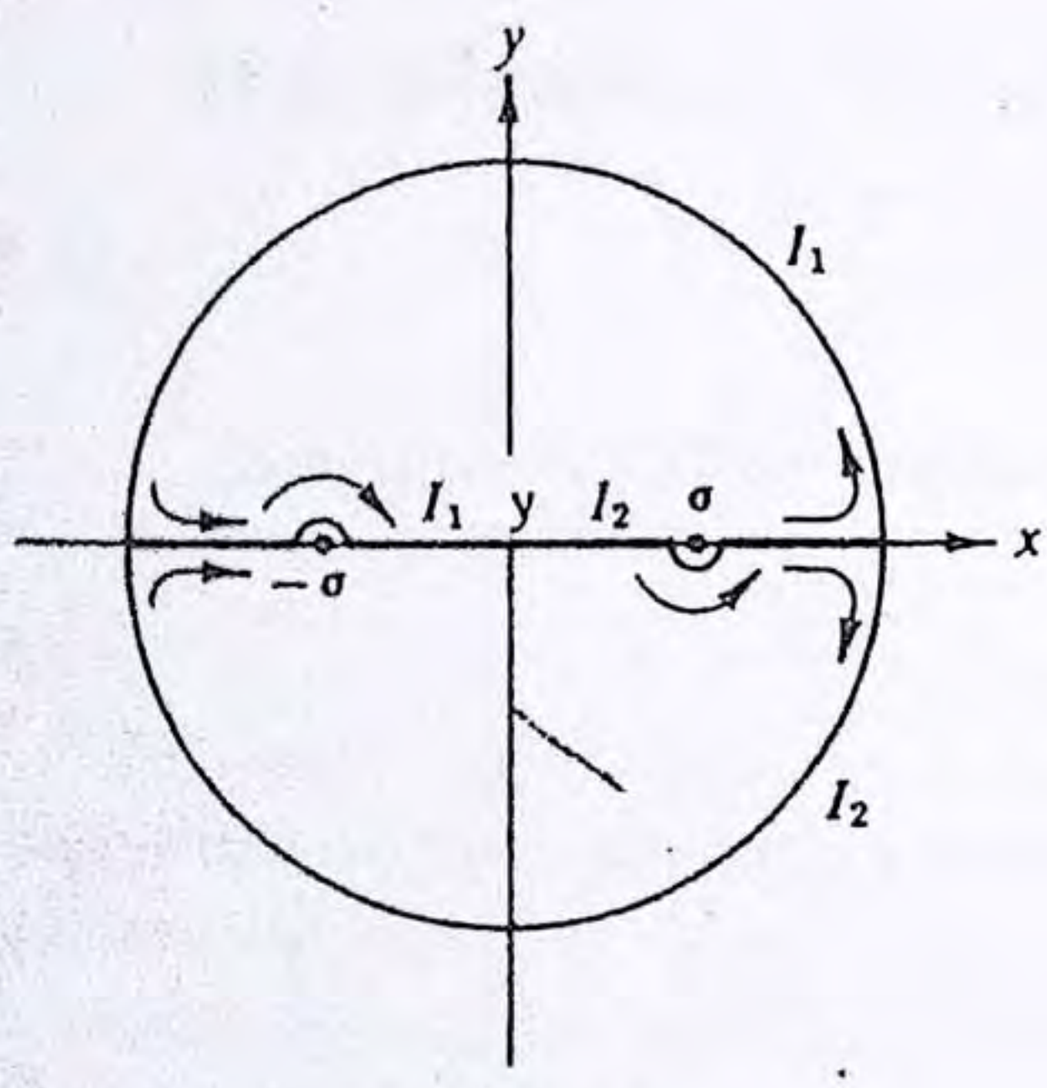


Fig. 7.9

Aún se tiene el problema de localizar los polos y evaluar los residuos. Los polos se encuentran en $z = +\sigma$ y $z = -\sigma$ *en el contorno de la integración*. Los residuos son

	$z = \sigma$	$z = -\sigma$
I_1	$\frac{e^{i\sigma}}{2}$	$\frac{e^{-i\sigma}}{2}$
I_2	$\frac{e^{-i\sigma}}{2}$	$\frac{e^{i\sigma}}{2}$

Dando la vuelta alrededor de los polos, tal como se muestra en la Fig. 7.9 (es de poca importancia el ir hacia arriba o hacia abajo), el teorema del residuo origina

$$I_1 - \pi i\left(\frac{1}{2i}\right)\frac{e^{-i\sigma}}{2} + \pi i\left(\frac{1}{2i}\right)\frac{e^{i\sigma}}{2} = 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)\frac{e^{i\sigma}}{2}, \tag{7.46}$$

con lo cual hemos encerrado la singularidad en $z = \sigma$, pero excluido la correspondiente a $z = -\sigma$. De modo similar, pero observando que el contorno para I_2 es el *sentido de las manecillas del reloj,*

$$I_2 - \pi i\left(\frac{-1}{2i}\right)\frac{e^{i\sigma}}{2} + \pi i\left(\frac{-1}{2i}\right)\frac{e^{-i\sigma}}{2} = -2\pi i\left(\frac{-1}{2i}\right)\frac{e^{i\sigma}}{2}. \tag{7.47}$$

Sumando las Ecs. 7.46 y 7.47, se tiene

$$I(\sigma) = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}(e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}) = \pi \cosh i\sigma$$
$$= \pi \cos \sigma. \tag{7.48}$$

Esto constituye una evaluación perfectamente adecuada de la Ec. 7.42, aunque desafortunadamente la dependencia del coseno es apropiada para una onda estacionaria y no para la onda extendida hacia afuera tal como se ha especificado.

Para obtener la forma deseada se puede proceder con una técnica diferente. En lugar de evadir los puntos singulares, podemos proceder a moverlos fuera del eje real. Específicamente, sea $\sigma \to \sigma + i\gamma$; $-\sigma \to -\sigma - i\gamma$, en donde γ es positiva pero pequeña y finalmente llega a cero, es decir

$$I(\sigma) = \lim_{\gamma \to 0} I(\sigma + i\gamma). \tag{7.49}$$

Con esta sustitución simple, la primera integral I_1 se transforma en

$$I_1(\sigma + i\gamma) = 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)\frac{e^{i(\sigma + i\gamma)}}{2} \tag{7.50}$$

mediante la aplicación directa del teorema del residuo. Asimismo,

$$I_2(\sigma + i\gamma) = -2\pi i\left(\frac{-1}{2i}\right)\frac{e^{i(\sigma + i\gamma)}}{2}. \tag{7.51}$$

Sumando las Ecs. 7.50 y 7.51 y permitiendo luego que $\gamma \to 0$, se obtiene

$$I(\sigma) = \lim_{\gamma \to 0}[I_1(\sigma + i\gamma) + I_2(\sigma + i\gamma)]$$
$$= \lim_{\gamma \to 0} \pi e^{i(\sigma + i\gamma)} = \pi e^{i\sigma}, \tag{7.52}$$

un resultado que no se acopla a las condiciones limitantes de nuestro problema de dispersión.

Es interesante hacer notar que la sustitución $\sigma \to \sigma - i\gamma$ habría originado

$$I(\sigma) = \pi e^{-i\sigma}, \tag{7.53}$$

lo cual representaría una onda entrante. Nuestro primer resultado (Ec. 7.48) puede considerarse como un promedio aritmético de las Ecs. 7.52 y 7.53. Este promedio es el valor principal de Cauchy de la integral. Observe que se dispone de estas posibilidades (Ecs. 7.48, 7.52 y 7.53) debido a que nuestra integral es una integral impropia. No estará definida de manera única hasta que especifiquemos el proceso limitante particular (o promedio) por utilizarse.

Evaluación de Integrales Definidas—formas Exponenciales. Teniendo presentes las funciones exponencial o hiperbólica en el *integrando*, el problema se vuelve algo más complicado que antes. En lugar de una receta

completamente general, el contorno debe seleccionarse para que se adapte a la integral específica. Estos casos también constituyen oportunidades para ilustrar la versatilidad y potencia de la integración de contorno.

Como ejemplo, considere una integral que será de bastante utilidad en el desarrollo de la relación entre $z!$ y $(-z)!$ Observe cómo se explota la periodicidad a lo largo del eje imaginario

EJEMPLO 7.2.4

Evalúe

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx, \qquad 0 < a < 1. \tag{7.54}$$

Los límites en a son necesarios (y suficientes) para evitar que la integral se desvíe a medida que $x \to \pm\infty$. La integral (Ec. 7.54) se puede manejar sustituyendo la variable real x por la variable compleja z e integrando alrededor del contorno mostrado en la Fig. 7.10. Si se considera el límite como $R \to \infty$, evidentemente el eje real origina la integral deseada. La trayectoria de retorno a lo largo de $y = 2\pi$ se selecciona para dejar invariante el denominador de la integral, introduciendo al mismo tiempo un factor constante $e^{i2\pi a}$ en el numerador. En el plano complejo, se tiene

$$\oint \frac{e^{az}}{1+e^z}\,dz = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx - e^{i2\pi a}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx\right)$$

$$= (1 - e^{i2\pi a})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx. \tag{7.55}$$

Además se tienen dos secciones verticales $(0 \leqslant y \leqslant 2\pi)$, que desaparecen (exponencialmente) a medida que $R \to \infty$.

Ahora, ¿en dónde se encuentran los polos y cuáles son los residuos? Se tiene un polo cuando

$$e^z = e^x e^{iy} = -1. \tag{7.56}$$

La Ec. 7.56 se satisface en $z = 0 + i\pi$. Mediante el desarrollo de Laurent en potencias de $(z - i\pi)$ se observa que el polo es un polo simple con un re-

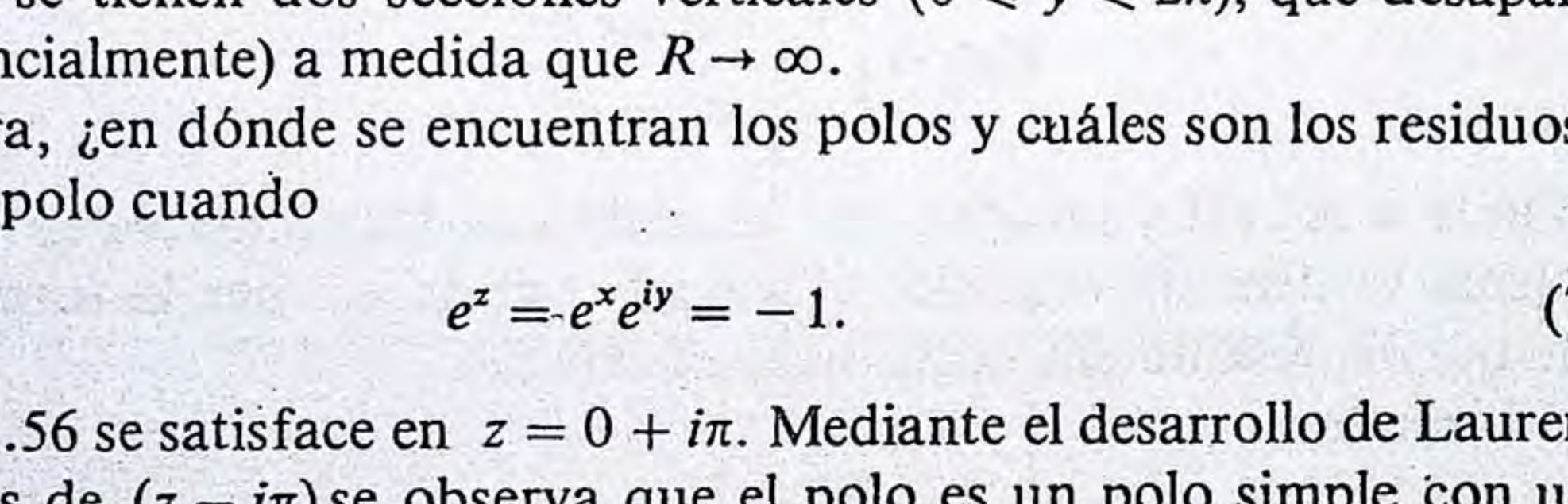


Fig. 7.10

siduo de $-e^{i\pi a}$. Siendo así, mediante la aplicación del teorema del residuo una vez más,

$$(1 - e^{i2\pi a})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx = 2\pi i(-e^{i\pi a}). \tag{7.57}$$

Esto se reduce fácilmente a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}, \qquad 0 < a < 1. \tag{7.58}$$

Utilizando la función beta (Sección 10.4), se puede demostrar que la integral es igual al producto de $(a - 1)!\ (-a)!$ Esto resulta en la interesante y útil relación de función factorial

$$a!(-a)! = \frac{\pi a}{\operatorname{sen} \pi a}. \tag{7.59}$$

Aun cuando la Ec. 7.58 es consistente para a real, $0 < a < 1$, la Ec. 7.59 puede desarrollarse mediante la continuación analítica para todos los valores de a, reales o complejos, excluyendo tan solo los valores de integral real.

Como ejemplo final de las integrales de contorno de funciones exponenciales, considere los números de Bernoulli nuevamente.

EJEMPLO 7.2.5. NUMEROS DE BERNOULLI

En la Sección 5.9, los números de Bernoulli fueron definidos mediante el desarrollo

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \tag{7.60}$$

Sustituyendo x por z, se tiene la serie de Taylor con

$$B_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{7.61}$$

en donde el contorno C_0 es alrededor del origen en el sentido contrario a las manecillas del reloj con $|z| < 2\pi$ para evitar los polos en $\pm 2\pi i$.

Para $n = 0$ se tiene un polo simple en $z = 0$ con el residuo de $+1$. En consecuencia, mediante la Ec. 7.10

$$B_0 = \frac{0!}{2\pi i} \cdot 2\pi i(1) = 1. \tag{7.62}$$

Para $n = 1$, la singularidad en $z = 0$ se transforma en un polo de segundo orden. Se puede demostrar que el residuo es de $-\frac{1}{2}$ por medio del desarrollo del exponencial, seguido del desarrollo binomial. Esto resulta en

$$B_1 = \frac{1!}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \tag{7.63}$$

Para $n \geqslant 2$ el procedimiento se vuelve algo más bien tedioso y acudimos a otros medios para la evaluación de la Ec. 7.61. El contorno se deforma, tal como se muestra en la Fig. 7.11.

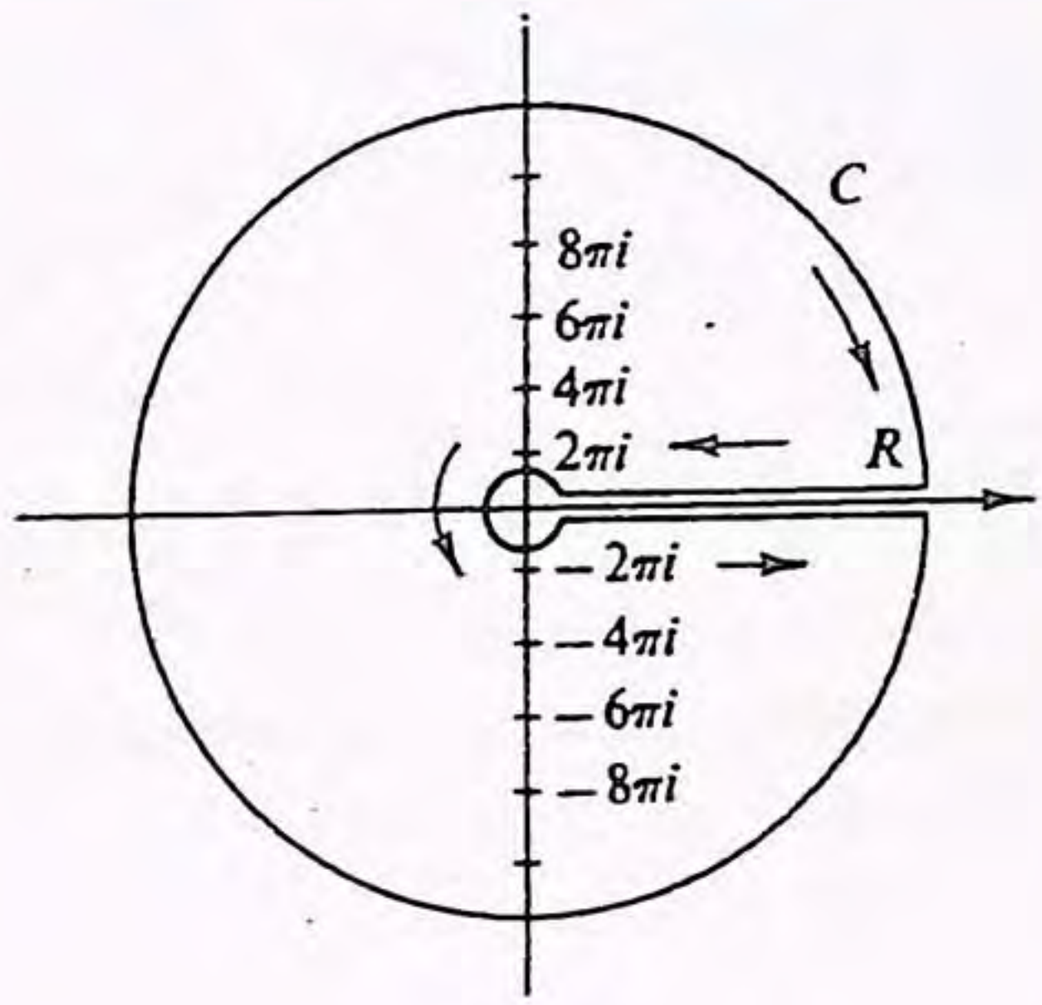


Fig. 7.11 Contorno de integración para los números de Bernoulli

El nuevo contorno C aún rodea el origen, tal como se requiere, pero ahora también circunda (en una dirección negativa) una serie infinita de puntos singulares a lo largo del eje imaginario en $z = \pm p2\pi i$, $p = 1, 2, 3, \ldots$

La integración hacia adelante y hacia atrás del eje x se cancela y para $R \to \infty$, la integración sobre el círculo infinito da como resultado cero. Recuerde que $n \geqslant 2$. En consecuencia,

$$\oint_{C_0} \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}} = -2\pi i \sum_{p=1}^{\infty} \text{residuos} \qquad (z = \pm p2\pi i). \tag{7.64}$$

En $z = p2\pi i$ se tiene un polo simple con un residuo $(p2\pi i)^{-n}$. Cuando n es non, el residuo de $z = p2\pi i$ se cancela exactamente del correspondiente a $z = -p2\pi i$ y $B_{n\ \overline{\text{non}}} = 0$, $n = 3, 5, 7$, etc. Para n par, los residuos se suman originando

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{n!}{2\pi i}(-2\pi i)2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^n (2\pi i)^n} \\ &= -\frac{(-1)^{n/2} 2\, n!}{(2\pi)^n} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-n} \\ &= -\frac{(-1)^{n/2} 2\, n!}{(2\pi)^n} \zeta(n), \end{aligned} \tag{7.65}$$

en donde $\zeta(n)$ es la función zeta de Riemann introducida en la Sección 5.9. La Ec. 7.65 corresponde a la Ec. 5.151 de la Sección 5.9.

7.2.1 Determine la naturaleza de las singularidades de cada una de las siguientes funciones y evalúe los residuos ($a > 0$).

(a) $\dfrac{1}{z^2 + a^2}$.

(b) $\dfrac{1}{(z^2 + a^2)^2}$.

(c) $\dfrac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$.

(d) $\dfrac{\operatorname{sen} 1/z}{z^2 + a^2}$.

(e) $\dfrac{ze^{+iz}}{z^2 + a^2}$.

(f) $\dfrac{ze^{+iz}}{z^2 - a^2}$.

(g) $\dfrac{e^{+iz}}{z^2 - a^2}$.

(h) $\dfrac{z^{-k}}{z+1}$, $\quad 0 < k < 1$.

7.2.2 Localice las singularidades y evalúe los residuos de cada una de las siguientes funciones

(a) $z^{-n}(e^z - 1)^{-1}$, $\quad z \neq 0$,

(b) $\dfrac{z^2 e^z}{1 + e^{2z}}$.

7.2.3 El establecimiento de que la integral a mitad de camino alrededor de un punto singular es igual a la mitad de la integral en todo el camino alrededor se ha limitado a los polos simples. Demuestre, mediante un ejemplo específico, que

$$\int_{\text{Semicírculo}} f(z)\, dz = \frac{1}{2} \oint_{\text{Círculo}} f(z)\, dz$$

no necesariamente es consistente cuando la integral circunda un polo de orden superior. *Sugerencia.* Ensaye con $f(z) = z^{-2}$.

7.2.4 Aplique el cálculo de residuos para demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

en donde $-1 < \varepsilon < 1$.

7.2.5 Generalizando el Ejercicio 7.2.4, demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a \pm b \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{(a^2 - b^2)^{1/2}}, \qquad \text{para} \quad a > |b|.$$

¿Qué sucede si $|b| > |a|$?

7.2.6 Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2} = \frac{2\pi}{1 - t^2}.$$

¿Qué límites se establecen para el parámetro t? ¿Por qué?

7.2.7 Con el cálculo de residuos, demuestre que

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

(La notación de doble factorial se define en la Sección 10.1.)

Sugerencia. $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \qquad |z| = 1.$

7.2.8 Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Sugerencia. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$

7.2.9 Un cálculo de mecánica cuántica para una probabilidad de transición origina la función $f(t, \omega) = 2(1 - \cos \omega t)/\omega^2$. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \omega)\,d\omega = 2\pi t.$$

7.2.10 Demuestre que $(a > 0)$

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{\pi}{a}e^{-a}.$

¿Cómo se modifica el lado derecho si $\cos x$ se sustituye por $\cos kx$?

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + a^2}\,dx = \pi e^{-a}.$

¿Cómo se modifica el lado derecho si $\operatorname{sen} x$ se sustituye por $\operatorname{sen} kx$?

7.2.11 Utilice el contorno mostrado (Fig. 7.12) con $R \to \infty$ para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi.$$

7.2.12 En la teoría cuántica de las colisiones atómicas se encuentra la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{ipt}\,dt$$

en donde p es real. Demuestre que

$$I = 0, \qquad |p| > 1$$
$$I = \pi, \qquad |p| < 1.$$

¿Qué sucede si $p = \pm 1$?

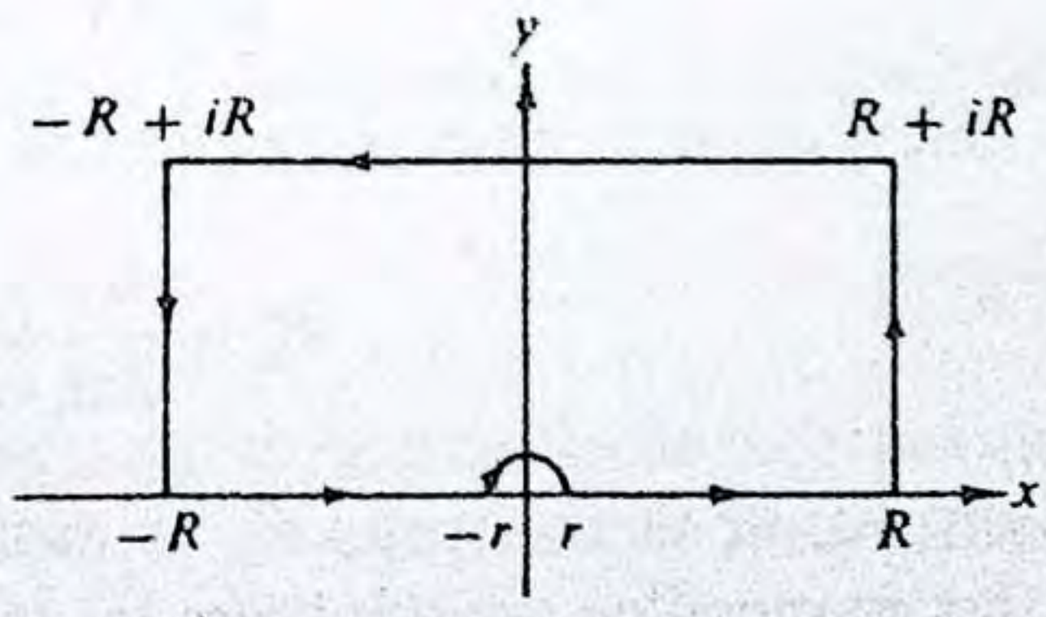


Fig. 7.12

7.2.13 Evalúe

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2}\,dx.$$

(a) mediante el desarrollo de serie adecuado del *integrando* para obtener

$$4\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1)^{-3},$$

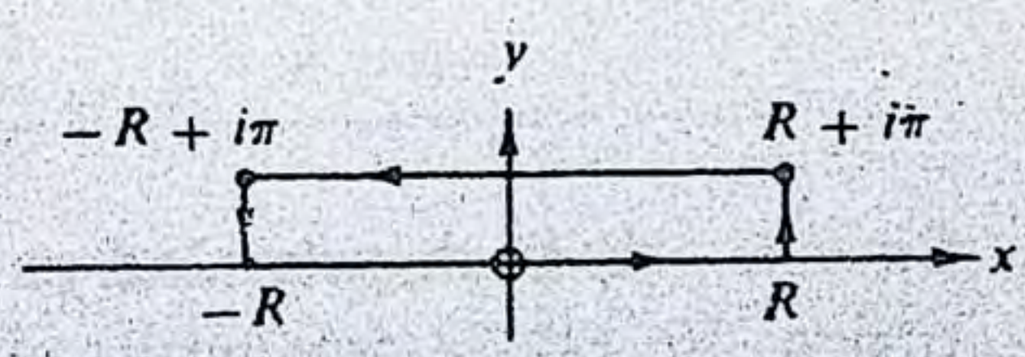


Fig. 7.13

(b) mediante la integración de contorno para obtener

$$\frac{\pi^3}{8}.$$

Sugerencia. $x \to z = e^t$. Ensaye con el contorno mostrado en la Fig. 7.13, permitiendo que $R \to \infty$.

7.2.14 Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}\,dx = \frac{\pi a}{\operatorname{sen} \pi a},$$

en donde $-1 < a < 1$. Esto constituye otra forma de derivar la Ec. 7.59.
Sugerencia. Utilice el contorno mostrado en la Fig. 7.14, observando que $z = 0$ es un punto de ramificación y el eje x positiva es una línea de corte. Observe también los comentarios acerca de las fases siguiendo el Ejemplo 7.1.1.

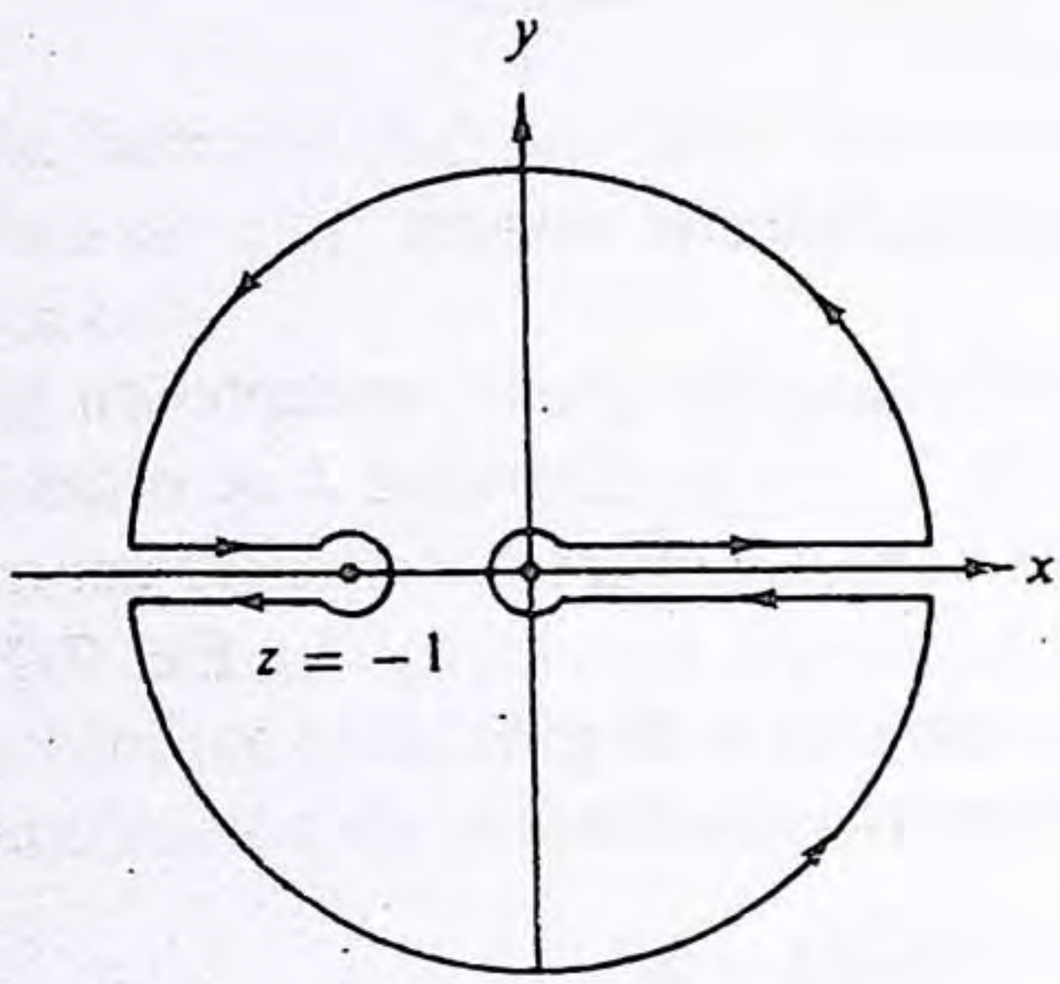


Fig. 7.14

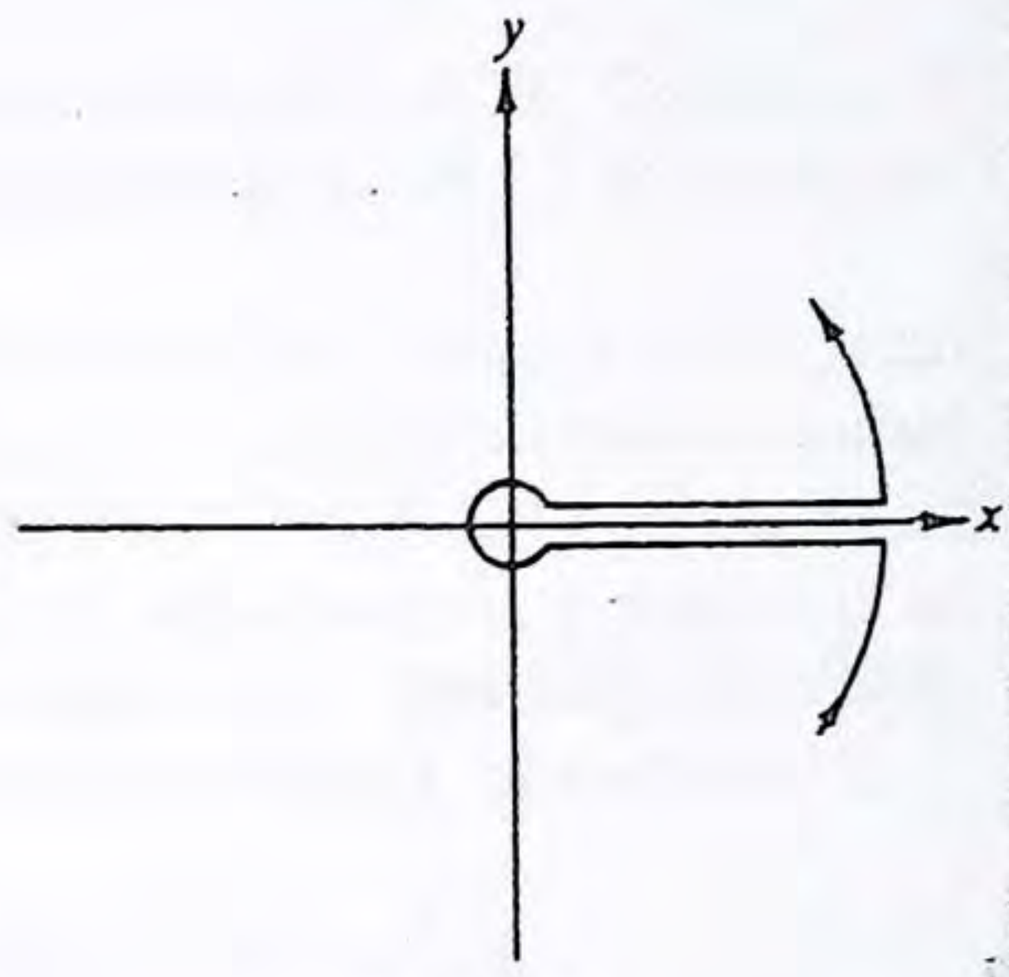


Fig. 7.15

7.2.15 Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi},$$

en donde $0 < a < 1$. Esto hace accesible otra forma de derivar la relación de función factorial indicada por la Ec. 7.59.
Sugerencia. Se tiene un punto de ramificación y aún se requiere de la línea de corte. Recuerde que $z^{-a} = w$ en la forma polar es

$$[re^{i(\theta+2\pi n)}]^{-a} = \rho e^{i\varphi},$$

lo cual da lugar a $-a\theta - 2an\pi = \varphi$.
Se debe restringir n a cero (o cualquier otro número entero simple) con objeto de que φ pueda especificarse de manera única. Ensaye con el contorno mostrado en la Fig. 7.15.

7.2.16 Varias de las integrales de Bromwich, Sección 15.11, involucra una porción que puede aproximarse mediante

$$I(y) = \int_{a+iy}^{a+iy} \frac{e^{zt}}{z^{1/2}}\,dz\,.$$

En este caso a y t son positivas y finitas. Demuestre que

$$\lim_{y\to\infty} I(y) = 0.$$

7.3 Aplicaciones del Cálculo de Residuos

En esta sección se consideran tres aplicaciones del cálculo de residuos. Primeramente, dos procedentes del análisis matemático y luego un problema de estabilidad de un amplificador.

Inversión de las Series de Potencias. En la Sección 5.7 se investigó el problema de considerar un desarrollo de serie conocida

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \tag{7.66}$$

y volver a establecerlo en la forma

$$z = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \cdots \tag{7.67}$$

Los primeros coeficientes b_i se definieron en términos de las a_i conocidas mediante un procedimiento de sustitución directa. Ahora podemos volver a derivar estos coeficientes mediante un método más poderoso y más elegante.

Se requiere de la igualdad

$$z(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t(dw/dt)}{w(t) - w(z)}\, dt, \tag{7.68}$$

en donde t es una variable (compleja) de integración. Para verificar la Ec. 7.68 se calcula el residuo en $t = z$. Utilizando el Ejercicio 7.1.1 con $m = 1$ y el desarrollo de Taylor de $w(t)$ alrededor del punto $t = z$, se encuentra que el residuo del *integrando* es

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{t \to z} \frac{(t - z)t(dw/dt)}{w(t) - w(z)} \\ &= \lim_{t \to z} \frac{(t - z)z(dw/dt)}{w(z) + (t - z)(dw/dt) + [(t - z)^2/2!](d^2w/dt^2) + \cdots - w(z)}. \end{aligned} \tag{7.69}$$

En el límite, a medida que $t \to z$, la Ec. 7.69 se reduce a $a_{-1} = z$ verificando así la Ec. 7.68.

El contorno C en la Ec. 7.68 se selecciona de tal modo que $w(t) \neq 0$ en y dentro del contorno, excepto para el cero de $w(t)$ en el origen. Luego z se restringe para mantener $|w(z)| < |w(t)|$ sobre todo el contorno. Con esta restricción, el *integrando* puede desarrollarse mediante el teorema binomial para originar

$$\begin{aligned} z(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t(dw/dt)}{w(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{w(z)}{w(t)}\right]^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [w(z)]^n \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t(dw/dt)}{[w(t)]^{n+1}}\, dt. \end{aligned} \tag{7.70}$$

Comparando las Ecs. 7.67 y 7.70, se igualan los coeficientes de potencias iguales de $w(z)$ para obtener

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t(dw/dt)}{[w(t)]^{n+1}}\, dt \tag{7.71}$$

Ahora el problema se reduce a la evaluación de la integral en la Ec. 7.71. A partir de la Ec. 7.66, el *integrando I* de la Ec. 7.71 se transforma en

$$I = \frac{t(a_1 + 2a_2 t + \cdots)}{t^{n+1}(a_1 + a_2 t + \cdots)^{n+1}}, \tag{7.72}$$

mostrando un polo de orden n en $t = 0$. Ya que $t = 0$ es el único cero de $w(t)$ en y dentro del contorno C,

$$b_n = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[\frac{t^{n+1}(dw/dt)}{[w(t)]^{n+1}}\right]_{t=0} \tag{7.73}$$

de acuerdo con el Ejercicio 7.1.1.

En un procedimiento alternativo, la Ec. 7.71 se integra por partes para obtener

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{t(dw/dt)}{w^{n+1}}\,dt = -\frac{1}{2\pi n i}\oint t\frac{d}{dt}[w^{-n}]\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi n i}\oint \frac{dt}{w^n}. \end{aligned} \tag{7.74}$$

No se tiene ninguna "parte integrada" debido a que hemos integrado una función de valor simple con respecto a un circuito cerrado. Ahora, aplicando el teorema del residuo, se tiene

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{t}{w(t)}\right)^n\right]_{t=0} \tag{7.75}$$

Este método de invertir una serie es de particular utilidad cuando $w(t)$ se puede expresar en una forma cerrada de modo que las Ecs. 7.73 o 7.75 se puedan diferenciar directamente.

Si se utiliza el desarrollo en serie de $w(t)$, se obtienen los nuevos coeficientes b_i en términos de las a_j conocidas originales. Los primeros coeficientes son

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1^{-1}, \\ b_2 &= -a_2 a_1^{-3}, \\ b_3 &= a_1^{-3}(2a_2^2 a_1^{-2} - a_3 a_1^{-1}), \\ b_4 &= a_1^{-4}(-5a_2^3 a_1^{-3} + 5a_2 a_3 a_1^{-2} - a_4 a_1^{-1}), \end{aligned} \tag{7.76}$$

en concordancia con los resultados de la Sección 5.7.

Productos Infinitos. Mediante la fórmula de la integral de Cauchy (Sección 6.4) y el teorema del residuo

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_m} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0) + \sum_{k=1}^{m} a_{-1}(z = z_k). \tag{7.77}$$

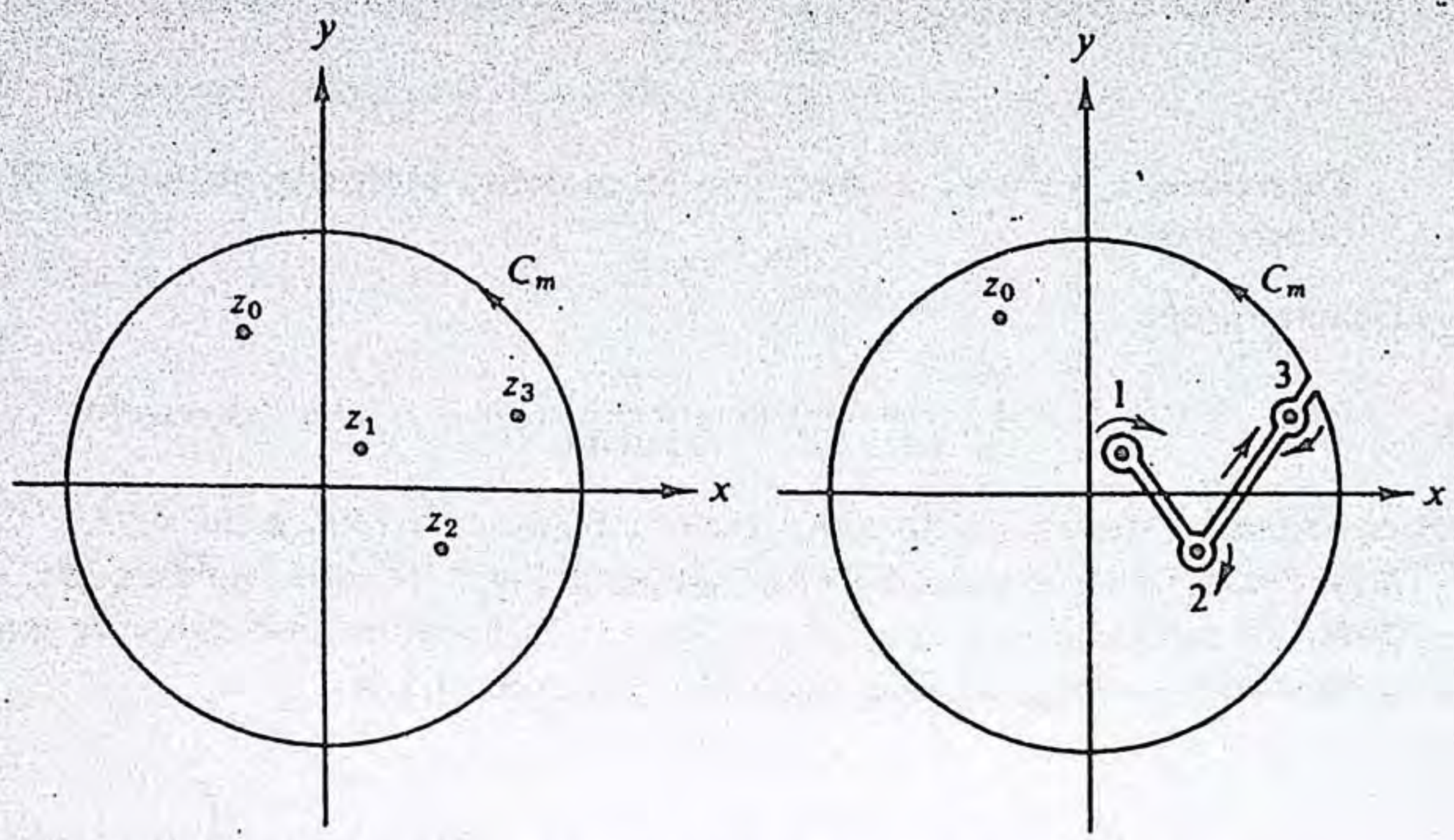


Fig. 7.16 Exclusión de las singularidades aisladas.

Aquí, $f(z)$ es una función analítica en cualquier parte, excepto en polos (primer orden) aislados, $z = z_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, m$. El índice k se ordena de tal modo que $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant |z_3| \leqslant \cdots$. El contorno C_m es un círculo centrado en el origen y circundando los polos en $z = z_1, z_2, \ldots, z_m$. La Ec. 7.77 se obtiene al deformar C_m tal como se muestra en la Fig. 7.16.

El residuo de $f(z)/(z - z_0)$ en $z = z_k$ es justamente

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_k} \frac{(z - z_k) f(z)}{z - z_0} = \frac{b_{-1}(z = z_k)}{z_k - z_0}, \tag{7.78}$$

en donde b_{-1} es el residuo de $f(z)$ en $z = z_k$. En consecuencia, la Ec. 7.77 puede establecerse nuevamente en la forma

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_m} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{-1}(z = z_k)}{z_0 - z_k}. \tag{7.79}$$

Regresando a nuestra integral original, se tiene la identidad

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_m} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_m} \frac{f(z)\, dz}{z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_m} \frac{z_0 f(z)\, dz}{z(z - z_0)}, \tag{7.80}$$

Aplicando la Ec. 7.79 a la primera integral en el lado derecho de la Ec. 7.80, $z_0 = 0$, se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_m} \frac{f(z)}{z}\, dz = f(0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{-1}(z = z_k)}{z_k}. \tag{7.81}$$

Ahora bien, si $f(z)/z^2$ disminuye con más rapidez que $|z|^{-1}$ a medida que $|z| \to \infty$, la segunda integral en el lado derecho de la Ec. 7.80 desaparece conforme el radio de C_m se extiende hasta el infinito ($m \to \infty$). Siendo así, mediante la sustitución de la Ec. 7.81 en la Ec. 7.80 y del resultado en la Ec. 7.79, se tiene

$$f(z_0) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-1}\left(\frac{1}{z_0 - z_k} + \frac{1}{z_k}\right). \tag{7.82}$$

Esto corresponde a una forma del desarrollo de Mittag-Leffler.

El siguiente paso consiste en sustituir $f(z)$ por una función que sea más conveniente de manejar. Suponga que $g(z)$ es una función que en todas partes es analítica en el plano complejo finito y que tiene ceros simples en puntos aislados $z = z_k$. Se construye

$$f(z) = \frac{dg(z)/dz}{g(z)} = \frac{g'}{g}, \tag{7.83}$$

y esta función $f(z)$ satisface las condiciones de la Ec. 7.77. Con b_{-1}, el residuo de g'/g; igual a la unidad en todos los polos, z_k (Ec. 7.82) se transforma en

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{g'(0)}{g(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right). \tag{7.84}$$

El subíndice cero de z_0 ha sido desechado ya que no es necesario. Mediante la integración de la Ec. 7.84 desde 0 hasta z, se obtiene

$$\ln g(z) = \ln g(0) + \frac{g'(0)}{g(0)} z + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + \frac{z}{z_k}\right]. \tag{7.85}$$

Convirtiendo a la forma exponencial se tiene

$$g(z) = g(0)\exp\left\{\frac{g'(0)}{g(0)} z + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + \frac{z}{z_k}\right]\right\} \tag{7.86}$$

$$= g(0)\exp\left(\frac{g'(0)}{g(0)} z\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)e^{z/z_k}\right],$$

proporcionando a $g(z)$ como un producto infinito.

Este resultado final (Ec. 7.86) se denomina algunas veces teorema del factor de Weierstrass. Al utilizar esta ecuación, es de recordarse que $g(z)$ tiene que ser analítica en todo el plano complejo (finito) y que tiene ceros (simples) en $z = z_k$. Asimismo, $g'(z)/zg(z)$ desaparece conforme $|z| \to \infty$.

EJEMPLO 7.3.1. (sen z)/z

Desarrolle (sen z)/z como producto infinito. Observamos que $g(z) =$ (sen z)/z no tiene singularidades en el plano finito y que tiene ceros simples en $z = \pm k\pi$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ En consecuencia, $z_k = \pm k\pi$. Ya que

$$g(0) = 1 \quad \text{y} \quad g'(0) = 0, \tag{7.87}$$

la Ec. 7.86 resulta en

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right)e^{z/k\pi}\left(1 + \frac{z}{k\pi}\right)e^{-z/k\pi}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{7.88}$$

Este es el origen de la Ec. 5.187 de la Sección 5.10.

Estabilidad de Circuitos de Amplificador. Un amplificador con retroalimentación se puede representar mediante un diagrama (Fig. 7.17). La señal original es E_s y la salida final es E_0.

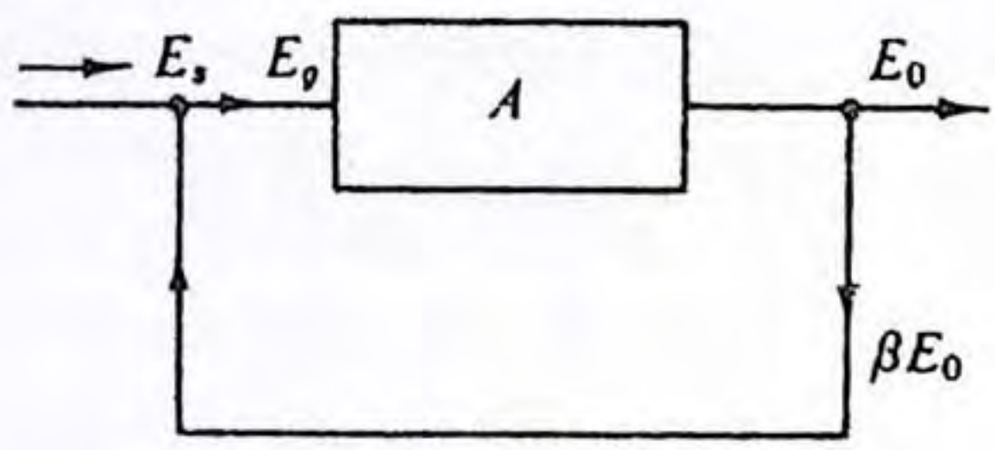


Fig. 7.17 Circuito de retroalimentación

Parte de la salida, βE_0, en donde β puede ser una cantidad compleja, se retroalimenta para unirse con la señal E_s. La suma E_g es la entrada real a la etapa de amplificación. Se tiene

$$E_g = E_s + \beta E_0. \tag{7.89}$$

Asimismo

$$E_0 = AE_g, \tag{7.90}$$

en donde A es la amplificación. Del mismo modo que β, A puede ser compleja. Tanto A como β pueden depender de la frecuencia angular ω de las señales de entrada (y salida). Eliminando E_g, se tiene

$$E_0 = AE_s + A\beta E_0. \tag{7.91}$$

La inestabilidad (oscilación, etc.) está caracterizada por una salida sin ninguna entrada, es decir, $E_s = 0$, $E_0 \neq 0$. De acuerdo con la Ec. 7.91, la condición de inestabilidad se transforma en

$$1 - A(\omega)\,\beta(\omega) = 0, \tag{7.92}$$

en donde la parte real de ω es mayor de cero para corresponder a la frecuencia factible físicamente.

Si $f(z) = 1 - A(z)\beta(z) = 0$ tiene una solución en el eje real positivo, se tendrá una inestabilidad creciente exponencialmente. Si se tiene una solución compleja en la mitad derecha del plano complejo, resultará una inestabilidad oscilatoria. Siendo así, trataremos de determinar si $1 - A\beta$ tiene soluciones o raíces en cualquier parte en la mitad derecha del plano complejo.

Ahora el número de ceros (N), cada uno multiplicado por su multiplicidad, menos el número de polos (P), cada uno multiplicado por su orden o multiplicidad, de una función $f(z)$ está determinado por[1]

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P. \tag{7.93}$$

Aquí N y P incluyen los ceros y los polos dentro del contorno C. Para demostrar la Ec. 7.93, considere un cero del orden n de $f(z)$ en $z = z_1$. Siendo así,

$$f(z) = (z - z_1)^n\, g(z). \tag{7.94}$$

Diferenciando, se obtiene

$$f'(z) = n(z - z_1)^{n-1}\, g(z) + (z - z_1)^n\, g'(z) \tag{7.95}$$

y el *integrando* de la Ec. 7.93 se transforma en

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_1} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{7.96}$$

Integrando alrededor de z_1, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = n, \tag{7.97}$$

es decir la multiplicidad del cero.

Para un polo del orden m en $z = z_2$

$$f(z) = (z - z_2)^{-m}\, h(z). \tag{7.98}$$

Esta vez, el *integrando* se transforma en

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_2} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \tag{7.99}$$

y la integración alrededor del polo en z_2

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -m, \tag{7.100}$$

es decir el negativo del orden del polo. Combinando las Ecs. 7.97 y 7.100, se obtiene la Ec. 7.93.

Supondremos que nuestra función $f(z) = 1 - A\beta$ no tiene polos para $\mathscr{R}(\omega) \geqslant 0$. Luego, si se integra $f'(z)/f(z)$ alrededor del lado derecho del plano complejo, la Ec. 7.93 indicará si hemos incluido algunos ceros. Si

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0, \tag{7.101}$$

[1] Este es un caso especial de una integral algo más general, que algunas veces se denomina integral de Cauchy.

entonces $N = 0$ y nuestro sistema es estable. Aquí, C es el eje imaginario y un semicírculo (infinito) que circunda el lado derecho del plano z.

Para evaluar la Ec. 7.93, es decir para comprobar la Ec. 7.101, sea

$$f(z) = re^{i\theta},$$

$$\ln f(z) = \ln r + i\theta. \tag{7.102}$$

Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\ln f(z) = \frac{1}{r}\frac{dr}{dz} + i\frac{d\theta}{dz}. \tag{7.103}$$

Sustituyendo en la Ec. 7.93, se obtiene

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \oint \frac{dr}{r} + i\oint d\theta. \tag{7.104}$$

Ya que C es un contorno cerrado, la primera integral en el lado derecho (que proporciona $\ln r$) desaparece. La segunda integral proporciona 2π o cero, dependiendo de que el origen se incluya o se excluya. En consecuencia, se puede concluir que la estabilidad del amplificador depende de que la gráfica polar de $f(z) = 1 - A(z)\,\beta(z)$ excluye el origen a medida que z varía a lo largo del eje imaginario desde $-i\infty$ hasta $+i\infty$.[1] Cuando el origen *no* se incluye

$$\oint d\theta = 0, \tag{7.105}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N = 0, \tag{7.106}$$

y no se tienen ceros en la mitad del plano derecho. Siendo así, el amplificador es estable. Esto constituye el criterio de estabilidad de Nyquist.

EJERCICIOS

7.3.1 (Inversión de una serie de potencias.) Con el comportamiento de la Ec. 7.71 para $n = 0$ ($b_0 = 0$), explique por qué la serie invertida (Ec.7.66) fue ajustada para un término *no constante*.

7.3.2 Derive la representación de producto infinito

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

7.3.3 El producto z veces la función gamma, $z\Gamma(z)$ tiene polos simples en $z = -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ Desarrolle una representación de producto infinito de la recíproca de la función gamma.

Sugerencia. Usted encontrará la constante de Euler-Mascheroni.

[1] Para $\omega \to \infty$, $A \to 0$. Así, el círculo infinito se representa en el punto $f(z) = 1$.

7.3.4 (a) La función $g(z)$ es analítica en todo el plano complejo finito y tiene ceros simples en $z = z_k$. Asimismo, $g'(z)/z\,g(z)$ desaparece conforme $|z| \to \infty$. Si finalmente $g(z)$ es una función uniforme de z, demuestre que

$$g(z) = g(0) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{z_k^2}\right),$$

en donde solamente uno de los dos ceros z_i y $-z_i$ se incluye en el producto infinito.

(b) Si $g(0) = 1$, demuestre que

$$g''(0) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^2},$$

$$g^{(4)}(0) = 3[g''(0)]^2 - 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^4}.$$

Sugerencia. Un procedimiento consiste en considerar $g''(0)$ como integral de $g'(z)/z^2$ y $g^{(4)}(0)$ como la integral de $g''(z)/z^3$.

7.3.5 De acuerdo con los resultados del Ejercicio 7.3.4, demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90},$$

está de acuerdo con la Sección 5.9.

Sugerencia. Ensaye con $g(z) = (\operatorname{sen} z)/z$.

7.3.6 Un circuito RLC en serie simple (Fig. 7.18) obedece la ecuación

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + C^{-1}I = 0$$

para $t > 0$; el interruptor se encuentra cerrado en $t = 0$. Suponga una solución de la forma

$$I = I_0 e^{pt}.$$

Demuestre que si

(a) $R = 0$, entonces p se encuentra en el eje imaginario (oscilación uniforme).

(b) $0 < \dfrac{R}{2L} < \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, entonces p se encuentra en la mitad izquierda del plano complejo (oscilaciones amortiguadas),

(c) $\dfrac{R}{2L} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, entonces p se encuentra en el eje real negativo, raíz doble (amortiguamiento crítico),

(d) $\dfrac{R}{2L} > \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, entonces p se encuentra en el eje real negativo (sobre amortiguamiento).

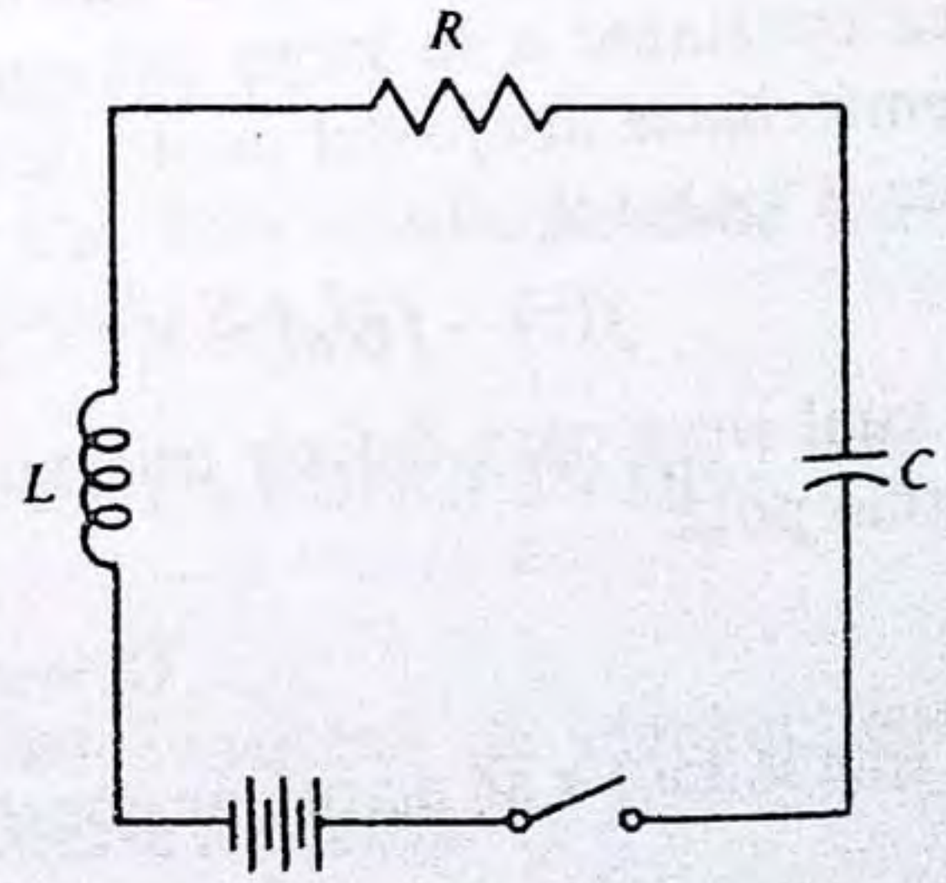


Fig. 7.18 Circuito *RLC*

Observe que si R se hace negativa en estos tres últimos casos, p pasa a la mitad derecha del plano complejo y se tiene la inestabilidad.

7.4 El Método de los Descendentes de Gran Pendiente

Al analizar problemas de la física matemática frecuentemente es conveniente conocer el comportamiento de una función para valores grandes de la variable, es decir el comportamiento asintótico de la función. Ejemplos específicos los proporcionan las diversas funciones de Bessel (Capítulo 11) y la función gamma (Capítulo 10). El método de los descendentes de gran pendiente es uno que permite determinar tal comportamiento asintótico cuando la función puede expresarse como una integral de la forma general

$$I(s) = \int_C g(z)\, e^{sf(z)}\, dz. \tag{7.107}$$

Por el momento, consideremos que s es real. El contorno de integración C se selecciona luego de modo que la parte real de $f(z)$ se aproxime a menos infinito en ambos límites y que el *integrando* desaparezca en los límites, o se selecciona como contorno cerrado. También se supone que el factor $g(z)$ en el *integrando* está gobernado por el exponencial en la región de interés.

Si el parámetro s es grande y positivo, el valor del *integrando* se vuelve grande cuando la parte real de $f(z)$ es grande y pequeño cuando la parte real de $f(z)$ es pequeña o negativa. En particular, conforme se permite que s aumente indefinidamente (dando lugar a la dependencia asintótica), toda la contribución del *integrando* a la integral procederá de la región en que la parte real de $f(z)$ adquiere un valor máximo positivo. Aparte de este máximo positivo, el *integrando* se vuelve despreciablemente pequeño en comparación. Esto se define al expresar $f(z)$ en la forma

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y). \tag{7.108}$$

Luego, la integral puede indicarse en la forma

$$I(s) = \int_C g(z)\, e^{su(x,y)} e^{isv(x,y)}\, dz. \tag{7.109}$$

Si ahora, adicionalmente, se impone la condición de que la parte imaginaria del exponente, $i\, v(x, y)$, sea constante en la región donde la parte real adquiere su valor máximo, es decir $v(x, y) = v(x_0, y_0) = v_0$, la integral puede aproximarse mediante

$$I(s) \approx e^{isv_0} \int_C g(z)\, e^{su(x,y)}\, dz. \tag{7.110}$$

Aparte del máximo de la parte real, la parte imaginaria puede tener la posibilidad de oscilar según se requiera, ya que el *integrando* es despreciablemente pequeño y el factor de fase variante es en consecuencia irrelevante.

La parte real de $s\, f(z)$ es un máximo para cierta s cuando la parte real de $f(z)$, $u(x, y)$ es un máximo. Esto implica que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7.111}$$

y consecuentemente, mediante el uso de las condiciones de Cauchy-Riemann de la sección 6.2, se tiene que

$$\frac{df(z)}{dz} = 0. \tag{7.112}$$

Procedemos a la búsqueda de tales ceros de la derivada.

Es esencial observar que el valor máximo de $u(x, y)$ es el máximo solamente a lo largo de cierto contorno. En el plano finito ninguna de las partes real e imaginaria de la función analítica tiene un máximo absoluto. Esto puede establecerse al recordar que tanto u como v satisfacen la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{7.113}$$

De acuerdo con lo anterior, si la segunda derivada con respecto a x es positiva, la segunda derivada con respecto a y debe ser negativa y consecuentemente u o v no pueden tener un máximo o mínimo absoluto. Ya que la función $f(z)$ ha sido considerada analítica, los puntos singulares quedan evidentemente excluidos. La desaparición de la derivada (Ec. 7.112) implica así que se tiene un punto de apoyo, un valor estacionario, que puede ser un máximo de $u(x, y)$ para un contorno y un mínimo para otro.

Siendo así, nuestro problema consiste en seleccionar el contorno de integración de modo que pueda satisfacer dos condiciones. (a) El contorno debe seleccionarse de tal modo que $u(x, y)$ tenga un máximo en el punto de apoyo. (b) El contorno debe pasar a través del apoyo de tal modo que la parte imaginaria, $v(x, y)$, sea una constante. Esta segunda condición origina la trayectoria de los descendentes de gran pendiente y le proporciona al método su nombre. De acuerdo con la Sección 6.2, especialmente el Ejercicio 6.2.1, y la Sección 6.7, se conoce que las curvas correspondientes a $u =$ constante y $v =$ constante forman un sistema ortogonal. Esto significa que una curva $v = c_i$, constante, es tangencial en todo momento al gradiente de u, ∇u. En consecuencia, la curva $v =$ constante es la curva que proporciona la línea de descendente de gran pendiente desde el punto de apoyo.[1]

En el punto de apoyo, la función $f(z)$ puede desarrollarse a modo de una serie de Taylor para dar lugar a

$$f(z) = f(z_0) + \tfrac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) + \cdots \tag{7.114}$$

[1] La línea de ascendente de gran pendiente también está caracterizada por v constante. El punto de apoyo debe analizarse cuidadosamente para distinguir la línea de descendente de gran pendiente con respecto a la línea de ascendente de gran pendiente. Esto se describe posteriormente en dos ejemplos.

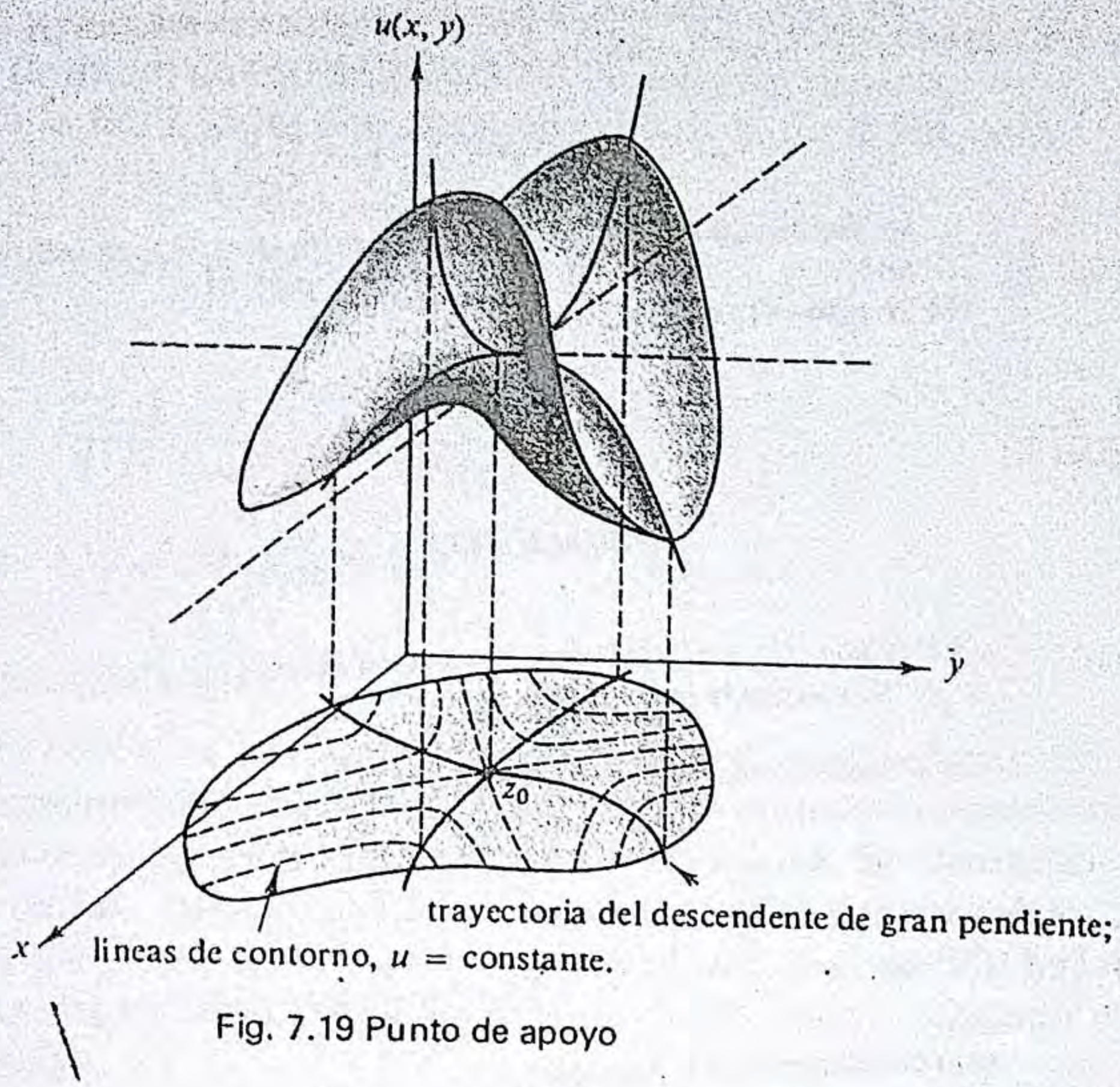


Fig. 7.19 Punto de apoyo

La primera derivada no está presente, ya que es obvio que la Ec. 7.112 se satisface. El primer término de corrección, $\frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0)$, es real y negativo. Es real debido a que hemos especificado que la parte imaginaria sea constante a lo largo del contorno y negativo debido a que nos movemos hacia abajo del punto de apoyo o montaña. Siendo así, suponiendo que $f''(z_0) \neq 0$,

$$f(z) - f(z_0) \approx \tfrac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) = -\tfrac{1}{2s} t^2, \tag{7.115}$$

lo cual sirve para definir una nueva variable t. Si $(z - z_0)$ se indica en la forma polar

$$(z - z_0) = \delta e^{i\alpha}, \tag{7.116}$$

(en que la fase α se mantiene constante), se tiene

$$t^2 = -s f''(z_0)\, \delta^2 e^{2i\alpha}. \tag{7.117}$$

Ya que t es real,[1] se puede indicar

$$t = \pm \delta |s f''(z_0)|^{1/2}. \tag{7.118}$$

Sustituyendo la Ec. 7.115 en la Ec. 7.107, se obtiene

$$I(s) \approx g(z_0)\, e^{sf(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \frac{dz}{dt}\, dt. \tag{7.119}$$

[1] La fase del contorno (especificada mediante α) en el punto de apoyo se selecciona de modo que $\mathscr{I}[f(z) - f(z_0)] = 0$, es decir $\frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0)$ debe ser real.

Ya que

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dt}{dz}\right)^{-1} = \left(\frac{dt}{d\delta}\frac{d\delta}{dz}\right)^{-1} = |s f''(z_0)|^{-1/2} e^{i\alpha}, \tag{7.120}$$

la Ec. 7.119 se transforma en

$$I(s) \approx \frac{g(z_0)\, e^{sf(z_0)} e^{i\alpha}}{|s f''(z_0)|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt. \tag{7.121}$$

Es de hacerse notar que los límites han sido establecidos como menos infinito hasta más infinito. Esto es permisible ya que la integral es esencialmente cero cuando t se aparta notablemente del origen. Observando que la integral restante es justamente la integral del error de Gauss, se obtiene finalmente

$$I(s) \approx \frac{\sqrt{2\pi}\, g(z_0)\, e^{sf(z_0)} e^{i\alpha}}{|s f''(z_0)|^{1/2}}. \tag{7.122}$$

La fase α ha sido introducida en la Ec. 7.116 como la fase del contorno a medida que pasa por el punto de apoyo. Se selecciona de tal modo que las dos condiciones establecidas [$\alpha =$ constante; $\mathscr{R}f(z) =$ máximo] se satisfacen. Ocasionalmente sucede que el contorno pasa a través de dos o más puntos de apoyo en sucesión. En este caso, se requiere tan solo agregar la contribución correspondiente a la Ec. 7.122 de cada uno de los puntos de apoyo con objeto de lograr una aproximación para la integral total.

Una advertencia: hemos supuesto que la única contribución notable a la integral procede de la vecindad inmediata al (los) punto(s) de apoyo $z = z_0$, es decir

$$\mathscr{R}[f(z)] = u(x, y) \ll u(x_0, y_0)$$

sobre todo el contorno lejos de $z_0 = x_0 + iy_0$. Esta condición debe comprobarse para cada problema diferente (Ejercicio 7.4.5).

EJEMPLO 7.4.1. FORMA ASINTOTICA DE LA FUNCION DE HANKEL, $H_\nu^{(1)}(s)$

En la Sección 11.4 se demuestra que las funciones de Hankel, que satisfacen la ecuación de Bessel, pueden definirse mediante

$$H_\nu^{(1)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{0C_1}^{-\infty} e^{(s/2)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}}, \tag{7.123}$$

$$H_\nu^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty C_2}^{0} e^{(s/2)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}}. \tag{7.124}$$

El contorno C_1 es la curva en el plano medio superior de la Fig. 7.20. El contorno C_2 se encuentra en el plano medio inferior. Se aplica el método de los descendentes de gran pendiente a la primera función de Hankel, $H_\nu^{(1)}(s)$, la cual convencionalmente se encuentra en la forma especificada por la Ec. 7.107, con $f(z)$ determinada por

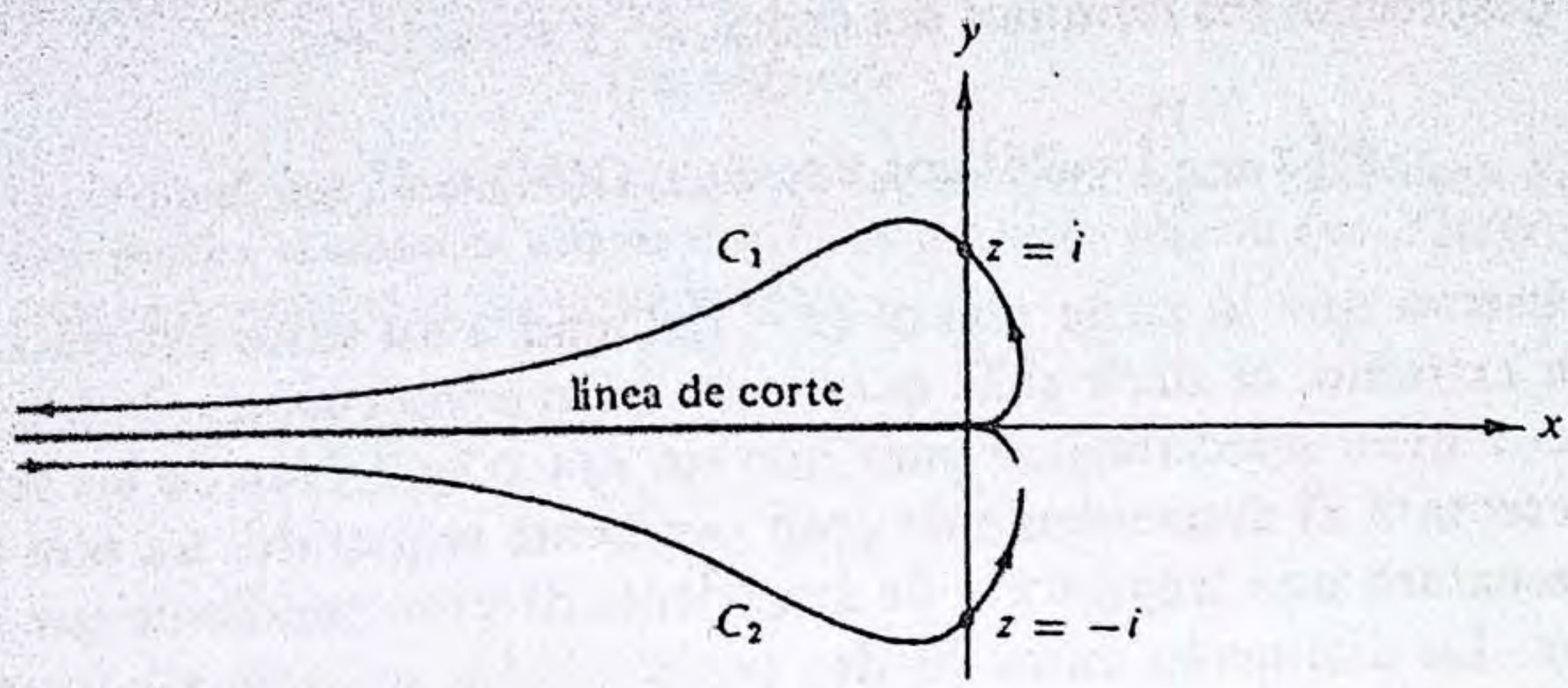


Fig. 7.20 Contornos de la función de Hankel

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{7.125}$$

Mediante la diferenciación, se obtiene

$$f'(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2z^2}. \tag{7.126}$$

Estableciendo $f'(z) = 0$ de acuerdo con la Ec. 7.112,

$$z = i, -i. \tag{7.127}$$

En consecuencia, se tienen puntos de apoyo en $z = +i$ y $z = -i$. La integral para $H^{(1)}_{\nu}(s)$ se selecciona de tal modo que comienza en el origen, se mueve tangencialmente hacia el eje positivo real, luego alrededor del punto de apoyo en $z = +i$, y luego hacia menos infinito, de manera asintótica con el eje real negativo. Debemos seleccionar el contorno a través del punto $z = +i$ de modo que la parte real de $(z - 1/z)$ sea un máximo y que la fase sea constante en la vecindad del punto de apoyo.

En la vecindad del punto de apoyo en $z_0 = +i$ se tiene

$$z - i = \delta e^{i\alpha}, \tag{7.128}$$

en donde δ es un número pequeño. Siendo así,

$$\begin{aligned} 2f(z) = z - \frac{1}{z} &= \delta e^{i\alpha} + i - \frac{1}{\delta e^{i\alpha} + i} \\ &= \delta \cos\alpha + i(\delta \operatorname{sen}\alpha + 1) - \frac{1}{\delta \cos\alpha + i(\delta \operatorname{sen}\alpha + 1)} \\ &= \delta \cos\alpha + i(\delta \operatorname{sen}\alpha + 1) - \frac{\delta \cos\alpha - i(\delta \operatorname{sen}\alpha + 1)}{1 + 2\delta \operatorname{sen}\alpha + \delta^2}. \end{aligned} \tag{7.129}$$

En consecuencia, la parte real se transforma en

$$\mathscr{R}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \delta \cos\alpha - \delta \cos\alpha(1 + 2\delta \operatorname{sen}\alpha + \delta^2)^{-1}. \tag{7.130}$$

Recordando que δ es pequeño, se desarrolla mediante el teorema binomial y se desprecian los términos del orden δ^3 y superiores.

$$\mathscr{R}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 2\delta^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + O(\delta^3) \approx \delta^2 \operatorname{sen} 2\alpha. \tag{7.131}$$

Se observa que la parte real de $(z - 1/z)$ tendrá un valor extremo si sen 2α es un extremo, es decir si 2α es $\pi/2$ o $3\pi/2$. En consecuencia, la fase del contorno α debe seleccionarse para que sea $\pi/4$ o $3\pi/4$. Una de las selecciones representará el descendente de gran pendiente requerido. La otra selección representará una trayectoria de ascendente de gran pendiente que debemos evitar. La distinción entre las dos posibilidades se logra mediante la sustitución de los valores específicos de α. Para $\alpha = \pi/4$

$$\mathscr{R}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \delta^2, \tag{7.132}$$

mientras que para $\alpha = 3\pi/4$

$$\mathscr{R}\left(z - \frac{1}{z}\right) = -\delta^2. \tag{7.133}$$

La sustitución directa en la Ec. 7.122 proporciona ahora

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(s) &= \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{2\pi} i^{-\nu-1} e^{(s/2)(i-1/i)} e^{i(3\pi/4)}}{|(s/2)(-2/i^3)|^{1/2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{(i\pi/2)(-\nu-2)} e^{is} e^{i(3\pi/4)}. \end{aligned} \tag{7.134}$$

Mediante la combinación de los términos se obtiene finalmente

$$H_\nu^{(1)}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{i(s-\nu(\pi/2)-\pi/4)} \tag{7.135}$$

como término principal del desarrollo asintótico de la función de Hankel $H_\nu^{(1)}(s)$. Los términos adicionales, en caso de requerirse, pueden establecerse mediante el método de Stokes descrito en la Sección .6.

EJEMPLO 7.4.2. FORMA ASINTOTICA DE LA FUNCION FACTORIAL, $s!$

En muchos problemas de la física, particularmente en el campo de la mecánica estadística, es conveniente disponer de una aproximación precisa de la función gamma o factorial de unos números bastantes grandes. Tal como se establece en la Sección 10.1, la función factorial se puede definir por medio de la integral

$$s! = \int_0^\infty \rho^s e^{-\rho}\, d\rho = s^{s+1} \int_{0C}^\infty e^{s(\ln z - z)}\, dz. \tag{7.136}$$

En este caso se ha efectuado la sustitución $\rho = zs$ con objeto de llevar la integral a la forma requerida por la Ec. 7.107. Igual que antes, se supone que s es real y positiva, de lo cual se tiene que el *integrando* desaparece en los límites 0 y ∞. Mediante la diferenciación de la dependencia en z que aparece en el exponente, se obtiene

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz}(\ln z - z) = \frac{1}{z} - 1, \tag{7.137}$$

lo cual demuestra que el punto $z = 1$ es un punto de apoyo. Se permite que

$$z - 1 = \delta e^{i\alpha}, \tag{7.138}$$

con δ pequeño para describir el contorno en la vecindad del punto de apoyo. Sustituyendo en $f(z)$, se establece un desarrollo en serie

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln(1 + \delta e^{i\alpha}) - (1 + \delta e^{i\alpha}) \\ &= \delta e^{i\alpha} - \tfrac{1}{2}\delta^2 e^{2i\alpha} + \cdots - 1 - \delta e^{i\alpha} \\ &= -1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 e^{2i\alpha}. \end{aligned} \tag{7.139}$$

De acuerdo con lo anterior, se observa que el *integrando* adquiere un valor máximo (e^{-s}) en el punto de apoyo cuando se escoge que el contorno C siga el eje real, una conclusión que el lector bien pudiera haber logrado en una forma más o menos intuitiva.

La sustitución directa en la Ec. 7.122 con $\alpha = 0$ proporciona ahora

$$s! \approx \frac{\sqrt{2\pi} s^{s+1} e^{-s}}{|s(-1^{-2})|^{1/2}} \tag{7.140}$$

Siendo así, el primer término en el desarrollo asintótico de la función factorial es

$$s! \approx \sqrt{2\pi s}\, s^s e^{-s}. \tag{7.141}$$

Los términos adicionales en la serie asintótica se desarrollan en la Sección 10.3. La Ec. 7.141 es la fórmula de Stirling.

En el ejemplo anterior, el cálculo ha sido realizado suponiendo que s es real. Esta suposición no es necesaria. El estudiante puede demostrar (Ejercicio 7.4.6) que la Ec. 7.141 también es consistente cuando s se sustituye por la variable compleja w, considerando tan solo que la parte real de w sea grande y positiva.

EJERCICIOS

7.4.1 Utilizando el método de los descendentes de gran pendiente, evalúe la función de Hankel definida por

$$H_\nu^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty C_2}^{0} e^{(s/2)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}},$$

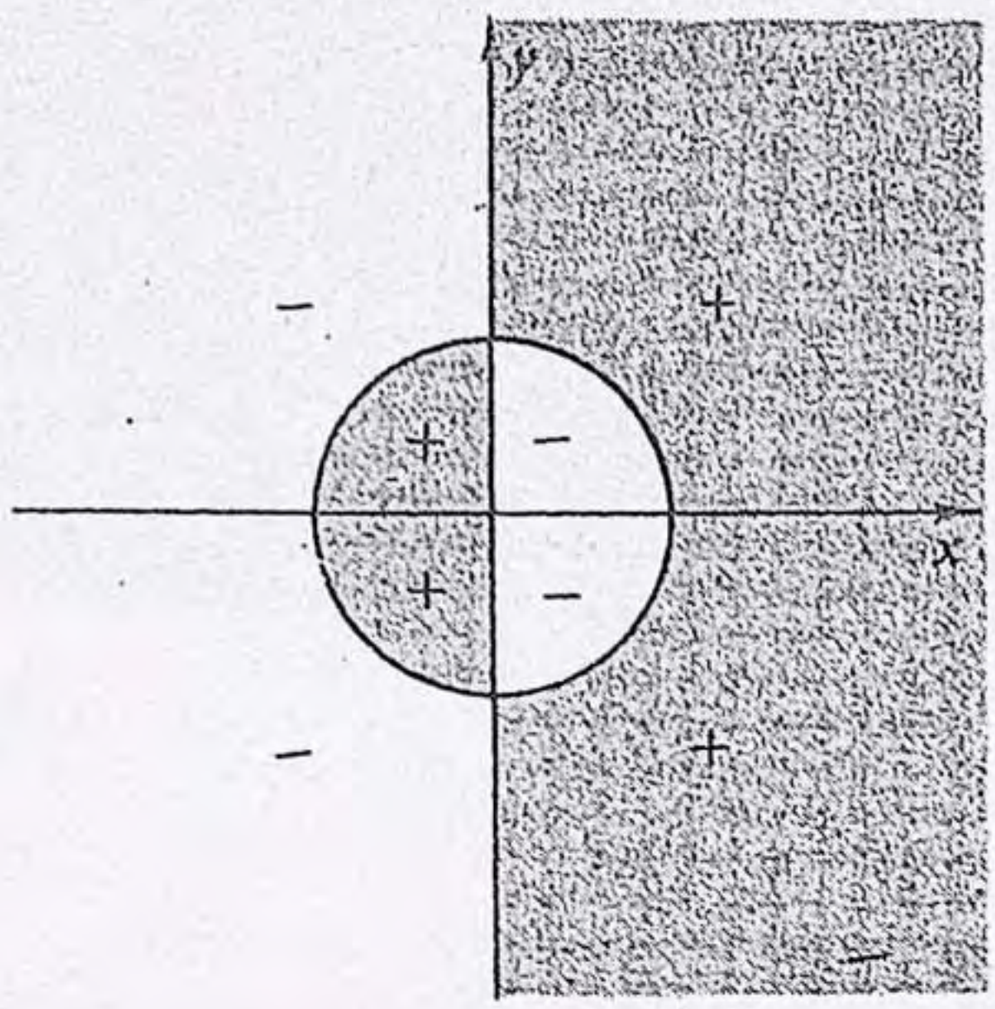


Fig. 7.21

con el contorno C_2 tal como se muestra en la Fig. 7.20.

Respuesta. $H_\nu^{(2)}(s) \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi s}}\, e^{-i(s-\pi/4-\nu\pi/2)}$.

7.4.2 La raíz cuadrada negativa en la Ec. 7.118 no aparece en la Ec. 7.121. ¿Cuál es la justificación de no tomarla en cuenta? Ilustre su argumento con referencia detallada a $H_\nu^{(1)}(z)$, Ejemplo 7.4.1.

7.4.3 (a) Al aplicar el método de los descendentes de gran pendiente a la función de Hankel $H_\nu^{(1)}(s)$, demuestre que

$$\mathscr{R}[f(z)] < \mathscr{R}[f(z_0)] = 0$$

para z en el contorno C_1 pero lejos del punto $z = z_0 = i$.

(b) Demuestre que $\mathscr{R}[f(z)] > 0$ para $0 < r < 1$, $\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi \\ -\pi \leqslant \theta < -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

y para $r > 1$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

A esto se debe que C_1 pudiera *no* deformarse al pasar a través del segundo punto de apoyo $z = -i$.

7.4.4 Determine la dependencia asintótica de las funciones de Bessel modificadas $I_\nu(x)$, considerando que

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{(x/2)(t+1/t)}\frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

El contorno comienza y finaliza en $t = -\infty$, circundando el origen en un sentido positivo y pasando a través de *dos* puntos de apoyo.

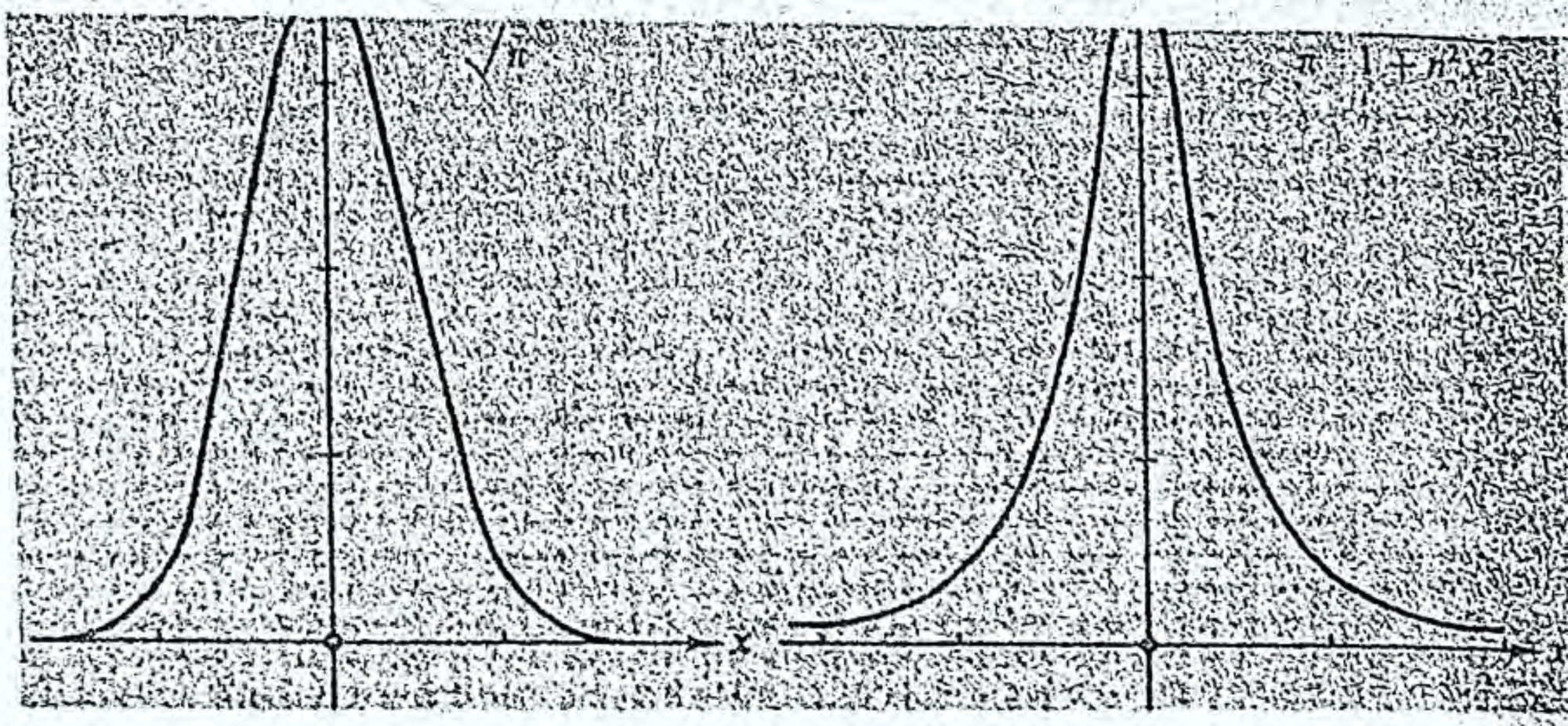
7.4.5 Determine la dependencia asintótica de la función de Bessel modificada de segunda $K_\nu(x)$, mediante el uso de

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(-x/2)(s+1/s)}\frac{ds}{s^{1-\nu}}.$$

7.4.6 Demuestre que la fórmula de Stirling

$$s! \approx \sqrt{2\pi s}\, s^s e^{-s}$$

es consistente para los valores complejos de s (con $\mathscr{R}(s)$ grande y positiva). *Sugerencia.* Esto implica el hecho de asignar una fase a s y luego requerir que $\mathscr{I}[sf(z)] =$ constante en la vecindad del punto de apoyo.



CAPITULO 8

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

8.1 Ecuaciones Diferenciales Parciales de la Física Teórica

Casi todas las partes elementales y una gran cantidad de partes avanzadas de la física teórica se formulan en términos de ecuaciones diferenciales, frecuentemente en la forma de ecuaciones diferenciales parciales. Dentro de las que se encuentran más a menudo se tienen las siguientes:

1. Ecuación de Laplace, $\nabla^2\psi = 0$.
   Esta ecuación bastante común y muy importante se manifiesta en los estudios de
   a. fenómenos electromagnéticos, incluyendo la electrostática, los dieléctricos, corrientes uniformes y magnetoestática.
   b. hidrodinámica (flujo irrotacional de un fluido perfecto y las ondas superficiales),
   c. flujo de calor,
   d. gravitación.
2. Ecuación de Poisson, $\nabla^2\psi = -\rho/\varepsilon_0$.
3. Las ecuaciones de onda (Helmholtz) y de difusión independientes del tiempo, $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$.
   Estas ecuaciones aparecen en fenómenos diversos tales como
   a. ondas elásticas en sólidos incluyendo cuerdas vibrantes, barras, membranas,
   b. sonido o acústica,
   c. ondas electromagnéticas,
   d. reactores nucleares.

4. La ecuación de difusión dependiente del tiempo

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

y las formas de cuatro dimensiones correspondientes que implican el d'Alembertiano, un análogo de cuatro dimensiones de la laplaciana en el espacio de Minkowski,

$$\Box^2 = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{(ic)^2\partial t^2}.$$

5. La ecuación de onda dependiente del tiempo $\Box^2\psi = 0$.

6. La ecuación de potencial escalar, $\Box^2\psi = -\rho/\varepsilon_0$.

7. La ecuación de Klein-Gordon, $\Box^2\psi = \mu^2\psi$, y las ecuaciones de vector correspondientes en que la función escalar ψ se sustituye por una función de vector.

Otras formas más complicadas también son comunes.

8. La ecuación de onda de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

y

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

para el caso independiente del tiempo.

9. Las ecuaciones para las ondas elásticas y para los fluidos viscosos y la ecuación de telegrafía.

10. Las ecuaciones diferenciales parciales acopladas de Maxwell para los campos eléctrico y magnético y las correspondientes a Dirac para las funciones de onda electrónica relativísticas.

Todas estas ecuaciones pueden indicarse en la forma,

$$H\psi = F,$$

en donde H es el operador diferencial,

$$H\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}, x, y, z\right),$$

F es una función conocida y ψ es la función escalar (o vectorial) desconocida.

Dos características son de particular importancia:

1. Todas estas ecuaciones son lineales[1] en la función desconocida ψ. A medida que los problemas físicos y matemáticos más fáciles se resuelven,

[1] Cf. Sección 2.5 para definición de linearidad.

las ecuaciones diferenciales no lineales tales como las que describen los fenómenos de onda de choque reciben más y más atención. Sin embargo, tanto las propias ecuaciones diferenciales no lineales como las técnicas numéricas, a las cuales frecuentemente acudimos para establecer las soluciones, se encuentran fuera del campo de este libro.

2. Estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales de segundo orden. [Las ecuaciones de Maxwell y Dirac son de primer orden, pero implican dos funciones desconocidas. Eliminando una desconocida se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden para la otra (cf. Sección 1.9).]

Ocasionalmente se pueden encontrar ecuaciones de orden superior. Tanto en la teoría del movimiento lento de un fluido viscoso como en la teoría del cuerpo elástico se encuentra la ecuación

$$(\nabla^2)^2\psi = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\psi = 0.$$

Afortunadamente, para los tratamientos de introducción como el presente, estas ecuaciones diferenciales de orden superior son poco usuales.

Algunas de las técnicas generales para la resolución de las ecuaciones diferenciales se describen en esta sección.

1. Separación de variables. La ecuación diferencial se separa en ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden atacarse mediante el método de Frobenius, Sección 8.4. Esta técnica de separación se introduce en la Sección 2.5 y se describe adicionalmente en la Sección 8.2. No siempre resulta adecuada, pero cuando este es el caso frecuentemente constituye el método más simple.

2. Soluciones integrales utilizando la función de Green. En la Sección 8.6 se proporciona una introducción a la técnica de la función de Green. Un tratamiento más detallado aparece en el Capítulo 16.

3. Otros métodos analíticos tales como el uso de las transformadas integrales. Algunas de las técnicas de esta clase se desarrollan y aplican en el Capítulo 15.

4. Cálculos numéricos. El desarrollo de las máquinas de cálculo de alta velocidad modernas ha abierto una gran diversidad de posibilidades basadas en el cálculo de diferencias finitas. Dos de estas, el método de Runge-Kutta y el método del predictor-corrector se describen en la Sección 8.7. Para mayores detalles de estos métodos y otros métodos, el lector puede consultar inicialmente a R. W. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, 1962) y proseguir con referencias especializadas.

8.2 Separación de Variables. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Las ecuaciones de la física matemática incluidas en la Sección 8.1 son ecuaciones diferenciales parciales. Nuestra primera técnica para su solución separa las ecuaciones diferenciales de n variables en n ecuaciones diferenciales ordinarias. Cada separación introduce una constante arbi-

traria de separación. Si se tiene n variables, habremos de introducir $n-1$ constantes, determinadas por las condiciones impuestas en el problema que se intenta resolver.

En la Sección 2.5 se ilustró la técnica de separación de variables para la ecuación de onda en las coordenadas polares esféricas y cartesianas. En el sistema coordenado polar esférico, la ecuación de onda

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{8.1}$$

originó la ecuación acimutal

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\,\Phi(\varphi) = 0, \tag{8.2}$$

en donde $-m^2$ es una constante de separación. Como ilustración de la forma en que se restringe la constante, observamos que φ en coordenadas polares esféricas es un ángulo acimutal. Si este fuera un problema clásico, ciertamente habríamos de requerir que la solución acimutal $\Phi(\varphi)$ sea de valor simple, es decir

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \tag{8.3}$$

Esto es equivalente a requerir que la solución acimutal tenga un período de 2π o algún múltiplo integral del mismo.[1] En consecuencia, m es un número entero. El valor de este número entero dependerá de los detalles del problema. Esto se considera en el Capítulo 9.

Los sistemas coordenados descritos en el Capítulo 2 han sido seleccionados de la infinidad de sistemas coordenados ortogonales posibles[2] en que las ecuaciones de Helmholtz y de onda se separan en ecuaciones diferenciales ordinarias. Pasando por los catorce sistemas coordenados uno por uno, las ecuaciones diferenciales ordinarias separadas muestran una duplicación considerable. Cada vez que una coordenada corresponde a un eje de translación o a un ángulo acimutal, la ecuación separada tiene la forma

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2\,\Phi(\varphi)$$

para φ, el ángulo acimutal, y

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = \pm a^2\,Z(z) \tag{8.4}$$

para z, un eje de translación en uno de los sistemas coordenados cilíndricos. Evidentemente, las soluciones son sen az y cos az para $-a^2$ y la fun-

[1] Esto también se aplica a la mayoría de los problemas de la mecánica cuántica, pero el argumento queda más implicado.

[2] Las coordenadas bipolares y sus formas rotacionales, toroidales y biesféricas, son excepciones. Se han incluido para ilustrar la forma en que los sistemas coordenados especiales se pueden utilizar ventajosamente en los problemas especiales.

ción hiperbólica correspondiente (o exponenciales) senh az y cosh az para $+a^2$.

La ecuación de Legendre

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\Theta=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0, \tag{8.5}$$

y la ecuación de Legendre asociada

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\Theta-\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\Theta=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y-\frac{m^2}{1-x^2}y=0, \tag{8.6}$$ [1]

también aparecen frecuentemente. Tal como se ha mencionado en la Sección 2.5, estas ecuaciones aparecen cuando se utiliza ∇^2 en las coordenadas polares esféricas. Las coordenadas esferoidales prolatas y oblatas también originan las ecuaciones de Legendre y Legendre asociada.

Una tercera ecuación que se encuentra frecuentemente es la ecuación diferencial de Bessel,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0. \tag{8.7}$$

En las secciones 2.5 y 2.6 las coordenadas cilíndricas circulares y polares esféricas dieron lugar a variedades de la ecuación de Bessel. La separación de variables para la ecuación de Laplace en las coordenadas parabólicas también originó la ecuación de Bessel. Es de hacerse notar que la ecuación de Bessel es notable por la variedad de formas que puede adquirir. Para la consulta de una extensa tabulación de las formas posibles, el lector puede consultar *Tables of Functions* de Jahnke y Emde.[2]

Otras ecuaciones diferenciales ordinarias que ocasionalmente se presentan incluyen las ecuaciones de Laguerre y Laguerre asociada derivadas del problema del átomo de hidrógeno, sumamente importante para la mecánica cuántica:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+\alpha y=0, \tag{8.8}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1+k-x)\frac{dy}{dx}+\alpha y=0. \tag{8.9}$$

[1] Estas son formas algebraicas equivalentes en donde $x=\cos\theta$.

[2] Cuarta edición revisada. Nueva York: Dover (1845), pág. 146. También, *Tables of Higher Functions* por E. Jahnke, F. Emde y F. Lösch, 6a. ed. Nueva York: McGraw-Hill (1960).

De acuerdo con la teoría de la mecánica cuántica para el oscilador lineal, se tiene la ecuación de Hermite,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2\alpha y = 0. \tag{8.10}$$

Finalmente, de vez en cuando se encuentra la ecuación diferencial de Chebyshev

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0. \tag{8.11}$$

Para una referencia conveniente, las formas de las soluciones de la ecuación de Laplace, la ecuación de Helmholtz y la ecuación de difusión para las coordenadas polares esféricas se han recolectado en la Tabla 8.1. Las soluciones para la ecuación de Laplace en las coordenadas cilíndricas circulares se presentan en la Tabla 8.2.

Para la ecuación de Helmholtz y la ecuación de difusión, la constante $\pm k^2$ se agrega a la constante de separación $\pm\alpha^2$ con objeto de definir un nuevo parámetro γ^2 o $-\gamma^2$. En el caso de la selección $+\gamma^2$ (con $\gamma^2 > 0$), se obtiene $J_m(\gamma\rho)$ y $N_m(\gamma\rho)$. Para el caso de la selección $-\gamma^2$ (con $\gamma^2 > 0$), se obtiene $I_m(\gamma\rho)$ y $K_m(\gamma\rho)$ como antes. En el Ejemplo 2.6.1 aparece una ilustración del primer caso (con k^2 y α^2 intercambiadas).

Estas ecuaciones diferenciales ordinarias y dos generalizaciones de las mismas serán examinadas y sistematizadas en la siguiente sección. Las propiedades generales que se derivan de la forma de las ecuaciones diferenciales se consideran en el Capítulo 9. Las soluciones individuales se establecen y aplican en los Capítulos 10 al 13.

TABLA 8.1

Soluciones en coordenadas polares esféricas[a]

$$\psi = \sum_{l,m} a_{lm}\psi_{lm}$$

1.	$\nabla^2\psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{Bmatrix}^b$
2.	$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} j_l(kr) \\ n_l(kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{Bmatrix}^b$
3.	$\nabla^2\psi - k^2\psi = 0$	$\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} i_l(kr) \\ k_l(kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{Bmatrix}^b$

[a] Las referencias para algunas funciones son $P_l^m(\cos\theta)$, $m = 0$, Sección 12.1; $m \neq 0$, Sección 12.5; $Q_l^m(\cos\theta)$, Sección 12.10; $j_l(kr)$, $n_l(kr)$, $i_l(kr)$, y $k_l(kr)$, Sección 11.7.

[b] $\cos m\varphi$ y $\operatorname{sen} m\varphi$ se pueden sustituir por $e^{\pm im\varphi}$.

TABLA 8.2

Soluciones en coordenadas cilíndricas circulares[a]

$$\psi = \sum_{m,\alpha} a_{m\alpha}\psi_{m\alpha}, \qquad \nabla^2\psi = 0$$

(a)	$\psi_{m\alpha} = \begin{Bmatrix} J_m(\alpha\rho) \\ N_m(\alpha\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-\alpha z} \\ e^{\alpha z} \end{Bmatrix}$
(b)	$\psi_{m\alpha} = \begin{Bmatrix} I_m(\alpha\rho) \\ K_m(\alpha\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha z \\ \operatorname{sen} \alpha z \end{Bmatrix}$
(c) Si $\alpha = 0$ (sin dependencia en z)	$\psi_m = \begin{Bmatrix} \rho^m \\ \rho^{-m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi \end{Bmatrix}$

[a] Las referencias para las funciones radiales son $J_m(\alpha\rho)$, Sección 11.1; $N_m(\alpha\rho)$, Sección 11.3; $I_m(\alpha\rho)$ y $K_m(\alpha\rho)$, Sección 11.6.

El físico práctico puede y probablemente se encuentre con las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, algunas de las cuales probablemente sean transformadas en ejemplos estudiados aquí. Algunas las tendrá que resolver por medio de las técnicas de las Secciones 8.4 y 8.5. Otras lo llevarán al uso de la máquina calculadora para la solución numérica.

EJERCICIOS

8.2.1 Demuestre que cuando la ecuación de Laplace se separa en coordenadas esferoidales prolatas (Sección 2.10), la ecuación para la dependencia de ξ_1 y ξ_2 es la ecuación de Legendre asociada.

8.2.2 Demuestre que cuando la ecuación de Laplace se separa en coordenadas esferoidales oblatas (Secciones 2.11 y 12.10), la ecuación para la dependencia de v es la ecuación asociada de Legendre, y que la ecuación para la depedencia de u es la ecuación asociada de Legendre del argumento imaginario.

Nota. $\cosh ix = \cos x$, $\operatorname{senh} ix = i \operatorname{sen} x$, Ejercicio 6.1.7.

8.2.3 El operador de momento angular mecánico cuántico está dado por $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$. Demuestre que

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}\psi = l(l+1)\psi$$

origina la ecuación de Legendre asociada.

Sugerencia. Los Ejercicios 1.9.6 y 2.4.14 pueden ser de utilidad.

8.2.4 La ecuación de onda de Schrödinger unidimensional para una partícula en el campo de potencial $V = \frac{1}{2}kx^2$ es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi(x)$$

(a) Utilizando $\xi = ax$ y una constante λ,

$$a = \left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4}$$

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$$

demuestre que

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\,\psi(\xi) = 0.$$

(b) Sustituyendo

$$\psi(\xi) = y(\xi)\, e^{-\xi^2/2}$$

demuestre que $y(\xi)$ satisface la ecuación diferencial de Hermite.

8.2.5 Verifique que lo siguiente son soluciones de la ecuación de Laplace:

(a) $\psi_1 = 1/r$,

(b) $\psi_2 = \dfrac{1}{2r} \ln \dfrac{r+z}{r-z}$

8.2.6 Si Ψ es una solución de la ecuación de Laplace, $\nabla^2\Psi = 0$, demuestre que $\partial\Psi/\partial z$ también es una solución.

Nota. Las derivadas de z de $1/r$ generan los polinomios de Legendre, $P_n(\cos\theta)$, Ejercicio 12.1.6. Las derivadas de z de $(1/2r)\ln[(r+z)/(r-z)]$ generan las funciones de Legendre, $Q_n(\cos\theta)$.

8.3 Puntos Singulares

En esta sección se introduce el concepto del punto singular o singularidad (tal como se aplica a la ecuación diferencial). El interés en este concepto radica en su utilidad para clasificar las ecuaciones diferenciales y para investigar la factibilidad de una solución tipo serie (Sección 8.4). Primeramente indicaremos una definición.

Todas las ecuaciones diferenciales ordinarias incluidas en la Sección 8.2 se pueden resolver para $d^2y\,dx^2$. Utilizando la notación $d^2y/dx^2 = y''$, se tiene[1]

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{8.12}$$

Ahora bien, si en la Ec. 8.12 y e y' pueden tener todos los valores finitos a $x = x_0$ e y'' permanece finita, el punto $x = x_0$ es un punto ordinario. Por otra parte, si y'' se vuelve infinita para *cualquier* selección finita de y e y', el punto $x = x_0$ se denomina punto singular.

Otra forma de presentar esta definición de punto singular consiste en establecer nuestra ecuación diferencial en la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{8.13}$$

[1] Esta notación imprimada, $y' = dy/dx$, fue introducida por Lagrange a fines del siglo XVIII como abreviación de la notación de Leibnitz más explícita pero más problemática dy/dx.

Ahora bien, si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ permanecen finitas a $x = x_0$, e punto $x = x_0$ es un punto ordinario. Sin embargo cuando $P(x)$ o $Q(x)$ (c ambas) divergen a medida que $x \to x_0$, el punto x_0 es un punto singular.

Utilizando la Ec. 8.13, podemos distinguir entre las dos clases de puntos singulares.

1. Si $P(x)$ o $Q(x)$ diverge a medida que $x \to x_0$, pero $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2\, Q(x)$ permanecen finitas a medida que $x \to x_0$, entonces $x = x_0$ se denomina punto singular no esencial o regular.

2. Si $P(x)$ diverge con mayor rapidez que $1/(x - x_0)$, de tal modo que $(x - x_0)\, P(x)$ llegue al infinito a medida que $x \to x_0$, o cuando $Q(x)$ diverge con mayor rapidez que $1/(x - x_0)^2$ de modo que $(x - x_0)^2\, Q(x)$ llegue al infinito a medida que $x \to x_0$, entonces el punto $x = x_0$ se denomina singularidad esencial o irregular.

Estas definiciones son consistentes para todos los valores finitos de x_0 El análisis del punto $x \to \infty$ es similar al tratamiento de las funciones de una variable compleja (Sección 6.6). Se establece $x = 1/z$, sustituyendo en la ecuación diferencial y luego se permite que $z \to 0$. Mediante el cambio de las variables en las derivadas, se tiene

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(z^{-1})}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy(z^{-1})}{dz} = -z^2\frac{dy(z^{-1})}{dz} \tag{8.14}$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{dy(x)}{dx}\right]\frac{dz}{dx} = (-z^2)\left[-2z\frac{dy(z^{-1})}{dz} - z^2\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}\right]$$

$$= 2z^3\frac{dy(z^{-1})}{dz} + z^4\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}. \tag{8.15}$$

Utilizando estos resultados, la Ec. 8.13 se transforma como sigue

$$z^4\frac{d^2y}{dz^2} + [2z^3 - z^2P(z^{-1})]\frac{dy}{dz} + Q(z^{-1})y = 0. \tag{8.16}$$

Este comportamiento a $x = \infty$ $(z = 0)$ depende así del comportamiento de los nuevos coeficientes.

$$\frac{2z^3 - z^2P(z^{-1})}{z^4} \quad \text{y} \quad \frac{Q(z^{-1})}{z^4}$$

a medida que $z \to 0$. Cuando las dos expresiones permanecen finitas, el punto $x = \infty$ es un punto ordinario. Si divergen con mayor rapidez que $1/z$ y $1/z^2$, respectivamente, el punto $x = \infty$ es un punto singular regular, mientras que en el caso contrario es un punto singular irregular (una singularidad esencial).

EJEMPLO 8.3.1

La ecuación de Bessel es

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{8.17}$$

Comparando la misma con la Ec. 8.13, se tiene

$$P(x) = \frac{1}{x}, \qquad Q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2},$$

lo cual demuestra que el punto $x = 0$ es una singularidad regular. Mediante inspección se observa que no existen otros puntos singulares en el intervalo finito. A medida que $x \to \infty$ $(z \to 0)$, de la Ec. 8.16 se tienen los coeficientes

$$\frac{2z^3 - z^2 \cdot z}{z^4} \quad \text{y} \quad \frac{1 - n^2z^2}{z^4}.$$

Ya que esta última expresión diverge a z^4, el punto $x = \infty$ es una singularidad esencial o irregular.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de la Sección 8.2, además de otras dos, la hipergeométrica y la hipergeométrica confluente, tienen puntos singulares tal como se muestra en la Tabla 8.3.

TABLA 8.3

Ecuación	Singularidad regular $x=$	Singularidad irregular $x=$
1. Hypergeométrica $x(x-1)y'' + [(1+a+b)x - c]y' + aby = 0.$	$0, 1, \infty$	—
2. Legendre[a] $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0.$	$-1, 1, \infty$	—
3. Chebyshev $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$	$-1, 1, \infty$	—
4. Hypergeométrica confluente $xy'' + (c-x)y' - ay = 0.$	0	∞
5. Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$	0	∞
6. Laguerre[a] $xy'' + (1-x)y' + ay = 0.$	0	∞
7. Oscilador armónico simple $y'' + \omega^2y = 0.$	—	∞
8. Hermite $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$	—	∞

[a] La ecuación asociada tiene los mismos puntos singulares.

Como podrá observarse de las tres primeras ecuaciones en la tabulación anterior, la hipergeométrica, la de Legendre y la de Chebyshev tienen tres puntos singulares regulares. La ecuación hipergeométrica con las singularidades regulares en 0, 1 e ∞ se considera como el estándar, la forma canónica. Las soluciones de las otras dos se pueden expresar en términos de sus soluciones, las funciones hipergeométricas. Esto se realiza en el Capítulo 13.

De modo similar, la ecuación hipergeométrica confluente se considera como la forma canónica de una ecuación diferencial de segundo orden lineal con un punto singular, irregular y uno regular.

En cierto sentido la ecuación hipergeométrica confluente se puede "derivar" a partir de la ecuación hipergeométrica

$$x(x-1)y'' + [(1+a+b)x - c]y' + aby = 0. \tag{8.18}$$

Si se permite que $bx = z$ se obtiene

$$\frac{z}{b}\left(\frac{z}{b} - 1\right)b^2\frac{d^2y}{dz^2} + \left[(1+a+b)\frac{z}{b} - c\right]b\frac{dy}{dz} + aby = 0.$$

Dividiendo entre b

$$z\left(\frac{z}{b} - 1\right)\frac{d^2y}{dz^2} + \left[\frac{(1+a)z}{b} + z - c\right]\frac{dy}{dz} + ay = 0.$$

Finalmente, al permitir que $b \to \infty$, nuestra ecuación se transforma en

$$-z\frac{d^2y}{dz^2} - (c - z)\frac{dy}{dz} + ay = 0, \tag{8.19}$$

la cual, dentro de un factor común de -1, es justamente la ecuación hipergeométrica confluente. Nuestra transformación tiene el efecto de combinar (confluencia) las dos singularidades regulares en $x = 0$ y 1 en una singularidad regular en $z = 0$ y convertir la singularidad en el infinito de una singularidad regular a una irregular.

EJERCICIOS

8.3.1 Demuestre que la ecuación de Legendre tiene singularidades regulares en $x = -1, 1,$ e ∞.

8.3.2 Demuestre que la ecuación de Laguerre, igual que la ecuación de Bessel, tiene una singularidad regular en $x = 0$ y una singularidad irregular en $x = \infty$.

8.3.3 Demuestre que la sustitución

$$x \to \frac{1-x}{2}, \qquad a = -l, \qquad b = l + 1, \qquad c = 1$$

convierte la ecuación hipergeométrica en la ecuación de Legendre.

8.4 Soluciones de Series Método de Frobenius

En esta sección se desarrolla un método para obtener una solución de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden lineal. El método, un desarrollo en serie, siempre resulta adecuado considerando que el punto de expansión no resulta más inadecuado que el punto singular regular. En la física, está condición bastante moderada casi siempre se satisface.

Una ecuación diferencial *homogénea de segundo orden lineal* se puede establecer en la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0. \tag{8.20}$$

La ecuación es *homogénea* debido a que cada término contiene $y(x)$ o una derivada; *lineal* debido a que cada término y, dy/dx o d^2y/dx^2 aparece como primera potencia, y sin productos. En esta sección procederemos a desarrollar (al menos) una solución de la Ec. 8.20. En la Sección 8.5 desarrollaremos una segunda solución independiente y demostraremos que no existe una tercera solución independiente. En consecuencia, la solución más general de la Ec. 8.20 puede establecerse en la forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x). \tag{8.20a}$$

Nuestro problema físico puede originar una ecuación diferencial de segundo orden lineal *no homogénea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = F(x). \tag{8.20b}$$

La función de la derecha, $F(x)$, representa una fuente de suministro (tal como una carga electrostática) o una fuerza impulsora (tal como un oscilador impulsado). Las soluciones específicas de esta ecuación no homogénea se consideran en el Ejercicio 8.5.19. Se exploran con cierto detalle utilizando las técnicas de la función de Green, Secciones 8.6, 16.5 y 16.6, y con la técnica de la transformada de Laplace en la Sección 15.10. Denominando a esta solución y_p, se puede agregar a la misma cualquier solución de la ecuación homogénea correspondiente (Ec. 8.20). Siendo así, la solución más general de la Ec. 8.20*b* es

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x). \tag{8.20c}$$

Las constantes c_1 y c_2 serán fijadas eventualmente por las condiciones limitantes.

Por el momento, supondremos que $F(x) = 0$, que nuestra ecuación diferencial es homogénea. Intentaremos desarrollar una solución de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden lineal, Ec. 8.20, mediante la sustitución en una serie de potencias con coeficientes indeterminados. También disponible como parámetro se tiene la potencia del término más bajo no desvaneciente de la serie. Como ilustración, aplicaremos el

método a dos ecuaciones diferenciales importantes. Primeramente la ecuación de oscilador lineal

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0, \tag{8.21}$$

con las soluciones conocidas $y = \operatorname{sen} \omega x$, $\cos \omega x$.

Ensayamos con

$$\begin{aligned} y(x) &= x^k(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}, \qquad a_0 \neq 0, \end{aligned} \tag{8.22}$$

en que el exponente k y todos los coeficientes a_λ aún se encuentran indeterminados. Mediante la diferenciación doble, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) x^{k+\lambda-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2}.$$

Mediante la sustitución en la Ec. 8.21, se obtiene

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \omega^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0. \tag{8.23}$$

De acuerdo con el análisis de unicidad de la serie de potencias (Capítulo 5), los coeficientes de cada potencia de x en el lado izquierdo de la Ec. 8.23 deben desaparecer.

La potencia más baja de x que aparece en la Ec. 8.23 es x^{k-2} para $\lambda = 0$ en la primera suma. El requerimiento de que el coeficiente desaparezca[1] proporciona

$$a_0 k(k-1) = 0.$$

Hemos seleccionado a_0 como el coeficiente de los términos más bajos desaparecientes de la serie (Ec. 8.22), debido a lo cual, por definición, $a_0 \neq 0$. En consecuencia, se tiene

$$k(k-1) = 0. \tag{8.24}$$

Esta ecuación, procedente del coeficiente de la potencia más baja de x, se denomina *ecuación indicial*. La ecuación indicial y sus raíces son de importancia crítica para nuestro análisis. Evidentemente, en este ejemplo debemos requerir que $k = 0$ o $k = 1$.

Antes de considerar estas dos posibilidades para k, regresaremos a la Ec. 8.23 y habremos de requerir que el resto de los coeficientes netos, por

[1] Unicidad de la serie de potencias, Sección 5.7.

ejemplo el coeficiente de x^{k+j} ($j \geqslant 0$), desaparezca. Establecemos $\lambda = j + 2$ en la primera suma y $\lambda = j$ en la segunda. (Estas son sumas independientes y λ es un índice simulado.) Esto resulta en

$$a_{j+2}(k + j + 2)(k + j + 1) + \omega^2 a_j = 0$$

o

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(k + j + 2)(k + j + 1)}. \tag{8.25}$$

Lo anterior constituye una *relación de recurrencia*. Teniendo a_j, se puede calcular a_{j+2} y luego a_{j+4}, a_{j+6}, y así sucesivamente tanto como se requiera. El lector podrá notar que para este ejemplo, si comenzamos con a_0, la Ec. 8.25 origina coeficientes pares a_2, a_4, etc., e ignora a_1, a_3, a_5, etc. Ya que a_1 es arbitrario, podemos establecer que sea cero (cf. Ejercicio 8.4.2 y 8.4.3) y luego mediante la Ec. 8.25

$$a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0,$$

y todos los coeficientes de potencia non desaparecen. No nos preocupamos acerca de las potencias impares perdidas; el objeto aquí consiste en encontrar una solución. Las potencias impares desechadas de hecho vuelven a aparecer cuando se utilice la *segunda* raíz de la ecuación indicial.

Regresando a la Ec. 8.24, nuestra ecuación indicial, primeramente ensayamos con la solución $k = 0$.

La relación de recurrencia (Ec. 8.25) se transforma en

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j + 2)(j + 1)}, \tag{8.26}$$

lo cual origina

$$a_2 = -a_0 \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} = -\frac{\omega^2}{2!} a_0,$$

$$a_4 = -a_2 \frac{\omega^2}{3 \cdot 4} = +\frac{\omega^4}{4!} a_0,$$

$$a_6 = -a_4 \frac{\omega^2}{5 \cdot 6} = -\frac{\omega^6}{6!} a_0, \text{ etc.}$$

Mediante inspección (e inducción matemática)

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0. \tag{8.27}$$

y nuestra solución es

$$y(x)_{k=0} = a_0 \left[1 - \frac{(\omega x)^2}{2!} + \frac{(\omega x)^4}{4!} - \frac{(\omega x)^6}{6!} + \cdots \right]$$

$$= a_0 \cos \omega x. \tag{8.28}$$

Si se selecciona la raíz de la ecuación indicial $k = 1$ (Ec. 8.25) la relación de recurrencia se transforma en

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+3)(j+2)}. \tag{8.29}$$

Sustituyendo en $j = 0, 2, 4$, sucesivamente se obtiene

$$a_2 = -a_0 \frac{\omega^2}{2 \cdot 3} = -\frac{\omega^2}{3!} a_0,$$

$$a_4 = -a_2 \frac{\omega^2}{4 \cdot 5} = +\frac{\omega^4}{5!} a_0,$$

$$a_6 = -a_4 \frac{\omega^2}{6 \cdot 7} = -\frac{\omega^6}{7!} a_0, \text{ etc.}$$

Nuevamente, mediante inspección e inducción matemática,

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0 \cdot \tag{8.30}$$

Para esta selección, $k = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} y(x)_{k=1} &= a_0 x \left[1 - \frac{(\omega x)^2}{3!} + \frac{(\omega x)^4}{5!} - \frac{(\omega x)^6}{7!} + \cdots \right] \\ &= \frac{a_0}{\omega} \left[(\omega x) - \frac{(\omega x)^3}{3!} + \frac{(\omega x)^5}{5!} - \frac{(\omega x)^7}{7!} + \cdots \right] \\ &= \frac{a_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega x. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Para resumir este procedimiento, la Ec. 8.23 se puede indicar esquemáticamente como se muestra en la Fig. 8.1. De acuerdo con la unicidad de la serie de potencias (Sección 5.7), el coeficiente total de cada potencia de x debe desaparecer (por sí mismo). El requisito de que el primer coeficiente (I) desaparezca origina la ecuación indicial, Ec. 8.24. El segundo coeficiente se establece al considerar $a_1 = 0$. La desaparición del coeficiente de x^k (y las potencias superiores consideradas una a la vez) origina la relación de recurrencia correspondiente a la Ec. 8.25.

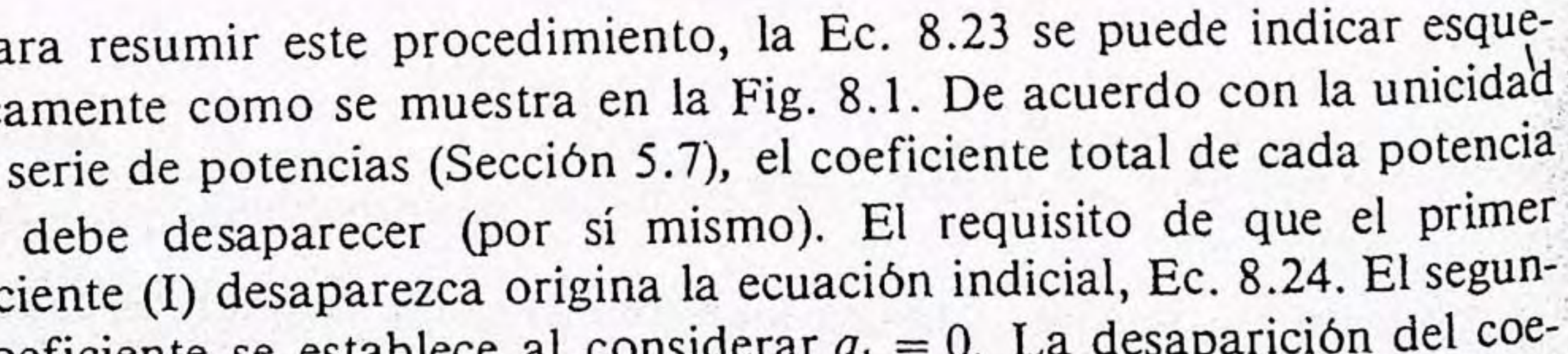


Fig. 8.1

Esta sustitución en serie, conocida como método de Frobenius, nos ha proporcionado dos soluciones en serie para la ecuación del oscilador lineal. Sin embargo, existen dos puntos relacionados con tales soluciones en serie que deben recalcarse notablemente:

1. La solución en serie siempre debe sustituirse nuevamente en la ecuación diferencial para establecer si funciona, esto como una protección en contra de los errores algebraicos y lógicos. Alternativamente, cuando funciona de modo satisfactorio, constituye una solución.

2. La aceptación de la solución en serie depende de su convergencia (incluyendo la convergencia asintótica). Es bastante posible que el método de Frobenius nos proporcione una solución en serie que satisfaga la ecuación diferencial original cuando sea sustituida, pero que *no* converja sobre la región de interés. La ecuación diferencial de Legendre ilustra esta situación.

El lector alerta habrá de notar que hemos obtenido una solución de simetría uniforme, $y_1(x) = y_1(-x)$, y una de simetría no uniforme $y_2(x) = -y_2(-x)$. Esto no es precisamente un accidente sino más bien una consecuencia directa de la forma de la ecuación diferencial. Estableciendo la ecuación diferencial en la forma

$$\mathscr{L}(x)\, y(x) = 0, \tag{8.32}$$

en donde $\mathscr{L}(x)$ es el operador diferencial, se observa que para la ecuación de oscilador lineal (Ec. 8.21), $\mathscr{L}(x)$ es uniforme, es decir

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(-x). \tag{8.33}$$

Frecuentemente, esto se define como una paridad uniforme.

Siempre que el operador diferencial tenga una paridad o simetría específica, ya sea par o impar, $+x$ se puede intercambiar por $-x$, y la Ec. 8.32 se transforma en

$$\pm\mathscr{L}(x)\, y(-x) = 0, \tag{8.34}$$

en que + es cuando $\mathscr{L}(x)$ es par, y − cuando $\mathscr{L}(x)$ es non. Evidentemente, si $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial, $y(-x)$ también es una solución. Siendo así, cualquier solución puede resolverse en las partes par e impar,

$$y(x) = \tfrac{1}{2}[y(x) + y(-x)] + \tfrac{1}{2}[y(x) - y(-x)], \tag{8.35}$$

en que el primer paréntesis de la derecha proporciona una solución par, mientras que el segundo proporciona una solución impar.

Si nos referimos nuevamente a la Sección 8.3, se observa que las ecuaciones de Legendre, Chebyshev, Bessel, oscilador armónico simple y de Hermite (o los operadores diferenciales) manifiestan esta paridad uniforme. Las soluciones de todas estas se pueden presentar en la forma de una serie de potencias pares de x y una serie separada de potencias im-

pares de x. El operador diferencial de Laguerre no tiene ninguna de estas simetrías; en consecuencia, es de esperarse que sus soluciones tengan paridad par o impar.

Limitaciones del procedimiento de la serie. Ecuación de Bessel. Este ataque de la ecuación del oscilador lineal quizás fue un poco sencillo. Mediante la sustitución de la serie de potencias (Ec. 8.22) en la ecuación diferencial (Ec. 8.21) hemos obtenido dos soluciones independientes sin ningún problema

Para lograr cierta idea de lo que sucede, tratemos de resolver la ecuación de Bessel,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{8.36}$$

utilizando y' para dy/dx y'' para d^2y/dx^2. Nuevamente, suponiendo una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda},$$

procedemos a diferenciar y sustituir en la Ec. 8.36. El resultado es

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)x^{k+\lambda} \\ + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda+2} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda n^2 x^{k+\lambda} = 0.\end{aligned} \tag{8.37}$$

Estableciendo $\lambda = 0$, el coeficiente de x^k, la potencia más baja de x que aparece en el lado izquierdo, es

$$a_0[k(k-1) + k - n^2] = 0, \tag{8.38}$$

y nuevamente, $a_0 \neq 0$ por definición. En consecuencia, la Ec. 8.38 proporciona la *ecuación indicial*

$$k^2 - n^2 = 0 \tag{8.39}$$

con las soluciones $k = \pm n$.

Es de cierto interés examinar el coeficiente de x^{k+1}. En este caso, se obtiene

$$a_1[(k+1)k + k + 1 - n^2] = 0$$

o

$$a_1(k+1-n)(k+1+n) = 0. \tag{8.40}$$

Ni para $k = \pm n$ ni $k + 1 - n$ o $k + 1 + n$ desaparece y *debemos* requerir que $a_1 = 0$.[1]

Procediendo con el coeficiente de x^{k+j} para $k = n$, se establece $\lambda = j$ en el primero, segundo y cuarto términos de la Ec. 8.37 y $\lambda = j - 2$ en el ter-

[1] $k = \pm n = -\frac{1}{2}$ son excepciones.

cer término. Al requerir que el coeficiente resultante de x^{k+j} desaparezca, se obtiene

$$a_j[(n+j)(n+j-1)+(n+j)-n^2]+a_{j-2}=0.$$

Cuando j se sustituye por $j+2$, esto puede volver a indicarse en la forma

$$a_{j+2}=-a_j\frac{1}{(j+2)(2n+j+2)}, \tag{8.41}$$

lo cual constituye la relación de recurrencia deseada. La aplicación repetida de esta relación de recurrencia origina

$$a_2=-a_0\frac{1}{2(2n+2)}=-\frac{a_0 n!}{2^2 1!(n+1)!},$$

$$a_4=-a_2\frac{1}{4(2n+4)}=+\frac{a_0 n!}{2^4 2!(n+2)!},$$

$$a_6=-a_4\frac{1}{6(2n+6)}=-\frac{a_0 n!}{2^6 3!(n+3)!}, \text{ etc.,}$$

y en general

$$a_{2p}=(-1)^p\frac{a_0\, n!}{2^{2p}p!(n+p)!}. \tag{8.42}$$

Insertando estos coeficientes en nuestra solución en serie supuesta, se tiene

$$y(x)=a_0x^n\left[1-\frac{n!x^2}{2^2 1!(n+1)!}+\frac{n!x^4}{2^4 2!(n+2)!}-\cdots\right]. \tag{8.43}$$

En la forma de suma

$$y(x)=a_0\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{n!x^{n+2j}}{2^{2j}j!(n+j)!}$$

$$=a_0 2^n\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{n!}{j!(n+j)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \tag{8.44}$$

En el Capítulo 11, la suma final se identifica como la función de Bessel $J_n(x)$. Observe que esta solución $J_n(x)$ no tiene ninguna de las simetrías[1] tal como sería de esperarse a partir de la ecuación de Bessel.

Cuando $k=-n$ y n no es un número entero, se puede generar una segunda serie distinta que se denomina $J_{-n}(x)$. Sin embargo, cuando $-n$ es un número entero negativo se presentan algunos problemas. La relación de recurrencia para los coeficientes a_j aun está definida por la Ec. 8.41, pero con $2n$ sustituida por $-2n$. Siendo así, cuando $j+2=2n$ o $j=2(n-1)$, el coeficiente a_{j+2} desaparece y no se tiene una solución en serie. Esta catás-

[1] $J_n(x)$ es una función uniforme cuando n es un número entero par, y una función no uniforme cuando n es un número entero impar. Para n no entera, x^n no tiene tal simetría simple.

trofe puede remediarse en la Ec. 8.44 tal como se hace en el Capítulo 11, con el resultado de que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \qquad n \text{ es un número entero} \tag{8.45}$$

La segunda solución simplemente reproduce la primera. Hemos fallado en cuanto a construir una segunda solución independiente para la ecuación de Bessel mediante la técnica de la serie cuando n es un número entero.

Mediante la sustitución en una serie infinita, hemos obtenido dos soluciones para la ecuación del oscilador lineal y una para la ecuación de Bessel (dos cuando n no es un número entero). A las preguntas de ¿Podemos hacer siempre esto? ¿Es satisfactorio siempre este método?, la respuesta es *no,* no siempre podemos hacer esto. El método de la solución en serie no siempre es adecuado.

El éxito del método de la sustitución en serie depende de las raíces de la ecuación indicial y el grado de singularidad de los coeficientes en la ecuación diferencial. Para comprender mejor el efecto de los coeficientes de la ecuación en este procedimiento de sustitución de serie simple, considere cuatro ecuaciones simples

$$y'' - \frac{6}{x^2} y = 0, \tag{8.46a}$$

$$y'' - \frac{6}{x^3} y = 0, \tag{8.46b}$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{a^2}{x^2} y = 0, \tag{8.46c}$$

$$y'' + \frac{1}{x^2} y' - \frac{a^2}{x^2} y = 0. \tag{8.46d}$$

El lector puede demostrar fácilmente que para la Ec. 8.46*a*, la ecuación indicial es

$$k^2 - k - 6 = 0,$$

considerando que $k = 3, -2$. Ya que la ecuación es homogénea en x (contando d^2/dx^2 como x^{-2}), no existe relación de recurrencia; $a_i = 0$ para $i > 0$.

Sin embargo, se han logrado dos soluciones perfectamente satisfactorias, x^3 y x^{-2}.

La Ec. 8.46*b* difiere de la Ec. 8.46*a* tan solo por una potencia de x, pero esto transforma la ecuación indicial en

$$-6a_0 = 0,$$

la cual no tiene ninguna solución ya que se ha acordado que $a_0 \neq 0$. El método de la sustitución en serie ha funcionado para la Ec. 8.46*a*, que tan solo tenía una singularidad regular, pero ha resultado inadecuado para la Ec. 8.46*b*, la cual tiene un punto singular irregular en el origen.

Continuando con la Ec. 8.46*c*, se ha agregado el término y'/x. La ecuación indicial es

$$k^2 - a^2 = 0,$$

pero nuevamente no se tiene relación de recurrencia. Las soluciones son $y = x^a$, x^{-a}, ambas perfectamente aceptables como serie de un término.

Cuando se cambia la potencia de x en el coeficiente de y' desde -1 a -2, la Ec. 8.46*d*, se origina un cambio drástico en la solución. La ecuación indicial (en que solamente se tiene la contribución del término y', se transforma en

$$k = 0.$$

Se tiene una relación de recurrencia

$$a_{j+1} = -a_j \frac{a^2 - j(j-1)}{j+1}.$$

A menos de que se seleccione el parámetro a para lograr que termine la serie, se tendrá

$$\lim_{j\to\infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \lim_{j\to\infty} \frac{j(j-1)}{j+1}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{j^2}{j} = \infty .$$

En consecuencia, la solución en serie diverge para todas las $x \neq 0$. Nuevamente, nuestro método ha funcionado para la Ec. 8.46*c* con una singularidad regular pero ha fallado cuando se tiene la singularidad irregular de la Ec. 8.46*d*.

Teorema de Fuchs. La respuesta a la pregunta básica de cuándo puede esperarse que el método de la sustitución en serie funcione adecuadamente la proporciona el teorema de Fuchs, en que se asegura que siempre puede lograrse al menos una solución en serie de potencias, considerando para esto que se desarrolle alrededor de un punto que sea un punto ordinario o al menos un punto singular regular. Si se intenta el desarrollo alrededor de una singularidad esencial o irregular, el método puede fallar como en el caso de la Ec. 8.46*b* y la Ec. 8.46*d*. Afortunadamente, las ecuaciones más importantes de la física matemática incluidas en la Sección 8.3 no tienen singularidades irregulares en el plano finito. En la Sección 8.5 se describe adicionalmente el teorema de Fuchs.

De acuerdo con la Tabla 8.3, Sección 8.3, se observa que el infinito es un punto singular para todas las ecuaciones consideradas. A modo de una ilustración adicional del teorema de Fuchs, la ecuación de Legendre (con el infinito como singularidad regular) tiene una solución en serie convergente con potencias negativas del argumento (Sección 12.10). En contraste, la ecuación de Bessel (con una singularidad irregular en el infinito) proporciona una serie asintótica (Secciones 5.11 y 11.6). Aun cuando son de extrema utilidad, estas soluciones asintóticas son técnicamente divergentes.

Resumen. Si se desarrolla alrededor de un punto ordinario o al menos alrededor de una singularidad regular, el procedimiento de sustitución en serie proporciona al menos una solución (teorema de Fuchs).

El hecho de que se obtengan una o dos soluciones distintas dependerá de las raíces de la ecuación indicial.

1. Si dos raíces de la ecuación indicial son iguales, solamente se puede obtener una solución mediante el método de la sustitución en serie.
2. Si dos raíces difieren en un número no entero, se pueden obtener dos soluciones independientes.
3. Si las dos raíces difieren por un número entero, el mayor de los dos proporcionará una solución. El menor puede o no proporcionar una solución, dependiendo esto del comportamiento de los coeficientes. En la ecuación del oscilador lineal se obtienen dos soluciones; para la ecuación de Bessel, solamente una solución.

EJERCICIOS

8.4.1 Una solución en serie de la Ec. 8.20 se intenta establecer al desarrollar alrededor del punto $x = x_0$. Si x_0 es un punto ordinario, demuestre que la ecuación indicial tiene raíces en $k = 0, 1$.

8.4.2 En el desarrollo de una solución en serie de la ecuación del oscilador armónico simple, el segundo coeficiente de la serie a_1 se desprecia excepto en cuanto a igualar el mismo a cero. A partir del coeficiente siguiente a la potencia más baja de x, x^{k-1}, desarrolle una segunda ecuación de tipo indicial.

(a) (La ecuación SHO con $k = 0$.) Demuestre que a_1 puede ser asignado para algunos valores finitos (incluyendo cero).

(b) (La ecuación SHO con $k = 1$.) Demuestre que a_1 debe igualarse a cero.

8.4.3 Analice las soluciones en serie de las siguientes ecuaciones diferenciales para determinar cuándo *puede* a_1 igualarse a cero sin perder irrevocablemente nada y cuándo *debe* a_1 igualarse a cero.

(a) Legendre, (b) Chebyshev, (c) Bessel, (d) Hermite;

Respuesta: (a) Legendre, (b) Chebyshev y (d) Hermite: para $k = 0$, a_1 *debe* igualarse a cero; para $k = 1$, a_1 debe igualarse a cero.

(c) Bessel: a_1 debe igualarse a cero (a excepción de lo que se indica en la pie de nota, pág. 395).

8.4.4 Resuelva la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

mediante la sustitución directa de serie.

(a) Verifique que la ecuación indicial es

$$k(k - 1) = 0.$$

(b) Utilizando $k = 0$, obtenga una serie de potencias pares de x, ($a_1 = 0$).

$$y_{\text{par}} = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right]$$

en donde

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - n(n+1)}{(j+1)(j+2)}a_j.$$

(c) Utilizando $k = 1$, desarrolle una serie de potencias impares de x ($a_1 = 0$).

$$y_{\text{impar}} = a_0\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots\right]$$

en donde

$$a_{j+2} = \frac{(j+1)(j+2) - n(n+1)}{(j+2)(j+3)}a_j.$$

(d) Demuestre que ambas soluciones, y_{par} y y_{impar}, divergen para $x = \pm 1$ si *la serie continúa hasta el infinito.*

(e) Finalmente, demuestre que mediante una selección adecuada de n, una serie a la vez puede convertirse en un polinomio, evitando así la catástrofe de la divergencia.

8.4.5 (a) Desarrolle las soluciones en serie para la ecuación diferencial de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$$

Respuesta. $k(k-1) = 0$, ecuación indicial.

Para $k = 0$

$$a_{j+2} = 2a_j\frac{j-\alpha}{(j+1)(j+2)}, \qquad (j \text{ par}),$$

$$y_{\text{par}} = a_0\left[1 + \frac{2(-\alpha)x^2}{2!} + \frac{2^2(-\alpha)(2-\alpha)x^4}{4!} + \cdots\right].$$

Para $k = 1$

$$a_{j+2} = 2a_j\frac{j+1-\alpha}{(j+2)(j+3)}, \qquad (j \text{ par}),$$

$$y_{\text{impar}} = a_0\left[x + \frac{2(1-\alpha)x^3}{3!} + \frac{2^2(1-\alpha)(3-\alpha)x^5}{5!} + \cdots\right].$$

(b) Demuestre que ambas soluciones en serie son convergentes, en que la serie se comporta como el desarrollo en serie de e^{2x^2}.

(c) Demuestre que mediante la selección adecuada de α, las soluciones en serie pueden separarse y convertirse en polinomios finitos. (Estos polinomios, normalizados de manera adecuada, se transforman en los polinomios de Hermite en la Sección 13.1.)

8.4.6 La ecuación diferencial de Laguerre es $x L_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + n L_n(x) = 0$. Desarrolle una solución en serie seleccionando el parámetro n de modo que la serie sea un polinomio.

8.4.7 Resuelva la ecuación de Chebyshev $(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0$, mediante la sustitución de serie. ¿Qué restricción se impone a n si se requiere que la solución en serie sea convergente para $x = \pm 1$?

Respuesta. La serie infinita no converge para $x = \pm 1$. En consecuencia, no se tiene restricción en n (cf. Ejercicio 5.2.16).

8.4.8 Resuelva

$$(1 - x^2)U_n''(x) - 3x\, U_n'(x) + n(n+2)\, U_n(x) = 0,$$

seleccionando la raíz de la ecuación indicial para obtener una serie de potencias *impares* de x. Ya que la serie diverge para $x = 1$, seleccione n para convertir la misma en un polinomio.

$$k(k-1) = 0.$$

Para $k = 1$

$$a_{j+2} = \frac{(j+1)(j+3) - n(n+2)}{(j+2)(j+3)}\, a_j.$$

8.4.9 Obtenga una solución en serie de la ecuación hipergeométrica

$$x(x-1)y'' + [(1 + a + b)x - c]y' + aby = 0.$$

Ensaye la solución en cuanto a convergencia.

8.4.10 Obtenga dos soluciones en serie de la ecuación hipergeométrica confluente

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0.$$

Ensaye las soluciones en cuanto a convergencia.

8.4.11 Un análisis mecánico cuántico del efecto Stark (coordenadas parabólicas) origina la ecuación diferencial

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{du}{d\xi}\right) + \left(\frac{1}{2}E\xi + \alpha - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{1}{4}F\xi^2\right)u = 0.$$

Aquí, α es una constante de separación, E es la energía total y F es una constante en que Fz es la energía potencial agregada al sistema mediante la introducción de un campo eléctrico.

Utilizando la raíz mayor de la ecuación indicial, desarrolle una solución en serie de potencias alrededor de $\xi = 0$. Evalúe los tres primeros coeficientes en términos de a_0.

$$\text{Ecuación indicial} \qquad k^2 - \frac{m^2}{4} = 0,$$

$$u(\xi) = a_0\xi^{m/2}\left\{1 - \frac{\alpha}{m+1}\xi + \left[\frac{\alpha^2}{2(m+1)(m+2)} - \frac{E}{4(m+2)}\right]\xi^2 + \cdots\right\}$$

Observe que la perturbación E no aparece hasta que a_3 se incluye. [Esto no equivale a la Ec. 2.120 de la Sección 2.12 debido a que en este caso $\xi = (\xi_{2,12})^{1/2}$].

8.4.12 Para el caso especial en que no se tiene dependencia acimutal, el análisis mecánico cuántico del hidrógeno molecular origina la ecuación (Sección 2.10)

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1 - \eta^2)\frac{du}{d\eta}\right] + \alpha u + \beta\eta^2 u = 0.$$

Desarrolle una solución de serie en potencias para $u(\eta)$. Evalúe los primeros tres coeficientes no desvanecientes en términos de a_0.

$$\text{Ecuación indicial} \qquad k(k-1) = 0,$$

$$u_{k=1} = a_0\eta\left\{1 + \frac{2-\alpha}{6}\eta^2 + \left[\frac{(2-\alpha)(12-\alpha)}{120} - \frac{\beta}{20}\right]\eta^4 + \cdots\right\}.$$

8.4.13 Para el logro de una buena aproximación, la integración de dos nucleones se puede describir por medio del potencial de un mesón

$$V = \frac{Ae^{-ax}}{x},$$

atractivo para A negativa. Desarrolle una solución en serie de la ecuación de onda de Schrödinger resultante

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - V)\psi = 0,$$

mediante los tres primeros coeficientes no desvanecientes

$$\psi_{k=1} = a_0\{x + \tfrac{1}{2}A'x^2 + \tfrac{1}{6}[\tfrac{1}{2}A'^2 - E' - \alpha A']x^3 + \cdots\},$$

en donde la imprimación indica la multiplicación por $2m/\hbar^2$.

8.4.14 Cerca del núcleo de un átomo complejo, la energía potencial de un electrón está definida por

$$V = \frac{Ze^2}{r}(1 + b_1 r + b_2 r^2),$$

en donde los coeficientes b_1 y b_2 se deben a efectos de pantalla. Para el caso del momento angular cero, demuestre que los tres primeros términos de la solución a la ecuación de Schrödinger tienen la misma forma que los correspondientes al Ejercicio 8.4.13. Mediante la translación adecuada de los coeficientes o parámetros, establezca los tres primeros términos en un desarrollo en serie para la función de onda.

8.5 Una Segunda Solución

En la Sección 8.4 se desarrolló una solución para la ecuación diferencial de segundo orden mediante la sustitución de una serie de potencias. Mediante el teorema de Fuchs, existe la posibilidad de lograr lo anterior considerando que la serie de potencias es un desarrollo alrededor de un punto ordinario o una singularidad no esencial.[1] No existe ninguna garantía de que el procedimiento proporcione las dos soluciones independientes que serían de esperarse de una ecuación diferencial de segundo orden. De hecho, la técnica tan solo ha proporcionado una solución a la ecuación de Bessel (n un número entero). En esta sección procederemos a desarrollar dos métodos para la obtención de una segunda solución independiente: un método integral y una serie de potencias que contiene un término logarítmico. Sin embargo, primeramente habremos de considerar la pregunta de la independencia de un conjunto de ecuaciones.

Independencia Lineal de las Soluciones. Teniendo un conjunto de funciones, φ_λ, el criterio de la *dependencia* lineal es la existencia de una relación de la forma

$$\sum_\lambda k_\lambda \varphi_\lambda = 0, \tag{8.47}$$

en que no todos los coeficientes k_λ son cero. Por otra parte, si la única solución de la Ec. 8.47 es $k_\lambda = 0$ para todas las λ, se dice que el conjunto de funciones φ_λ es *independiente* linealmente.

[1] A esto se debe el que la clasificación de las singularidades en la Sección 8.3 sea de tanta importancia para nosotros.

Pudiera ser de utilidad pensar en la depedencia lineal de los vectores. Considere **A**, **B** y **C** en el espacio tridimensional con $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \neq 0$. Siendo así, no existe relación de la forma

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0 \tag{8.48a}$$

A, **B** y **C** son linealmente independientes. Por otra parte, cualquier cuarto vector **D** se puede expresar como una combinación lineal de **A**, **B** y **C**. Véase la Sección 4.4. Siempre puede escribirse una ecuación de la forma

$$\mathbf{D} - a\mathbf{A} - b\mathbf{B} - c\mathbf{C} = 0, \tag{8.48b}$$

y los cuatro vectores *no* son independientes linealmente. Los tres vectores no coplanares **A**, **B** y **C** se extienden sobre el espacio tridimensional.

Supongamos que las funciones φ_λ pueden diferenciarse según se requiera. Siendo así, mediante la diferenciación de la Ec. 8.47 en forma repetida se genera un conjunto de ecuaciones

$$\sum_\lambda k_\lambda \varphi'_\lambda = 0 \tag{8.49a}$$

$$\sum_\lambda k_\lambda \varphi''_\lambda = 0, \text{ etc.} \tag{8.49b}$$

Esto nos proporciona un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas en donde k_λ son las cantidades desconocidas. De acuerdo con la Sección 4.1, se tiene una solución $k_\lambda \neq 0$ solamente cuando el determinante de los coeficientes de las k_λ desaparecen. Esto significa

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0. \tag{8.50}$$

Este determinante se denomina wronskiano

1. Si el wronskiano no es igual a cero, entonces la Ec. 8.47 no tiene otra solución que $k_\lambda = 0$. En consecuencia, el conjunto de funciones φ_λ es independiente.

2. Si el wronskiano desaparece para valores aislados del argumento, esto no necesariamente demuestra la dependencia lineal. Sin embargo, si el wronskiano es cero sobre todo el intervalo de la variable, las funciones φ_λ son linealmente dependientes sobre este intervalo.[1] (cf. Ejercicio 8.5.2 para el caso más simple de dos funciones).

[1] Cf. pág. 187 de H. LASS, *Elements of Pure and Applied Mathematics*. Nueva York: McGraw-Hill (1957) para la demostración de esta afirmación. Se supone que las funciones tienen derivadas continuas y que al menos uno de los menores de la hilera inferior de la Ec. 8.50 (desarrollo de Laplace) no desaparece en $[a, b]$, el intervalo bajo consideración.

EJEMPLO 8.5.1 —INDEPENDENCIA LINEAL

Las soluciones de la ecuación del oscilador lineal, Ec. 8.21, son $\varphi_1 = \operatorname{sen} \omega x$, $\varphi_2 = \cos \omega x$. El wronskiano se transforma en

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \omega x & \cos \omega x \\ \omega \cos \omega x & -\omega \operatorname{sen} \omega x \end{vmatrix} = -\omega \neq 0.$$

Estas dos soluciones φ_1 y φ_2 son consecuentes; independientes linealmente. Para tan solo dos funciones esto significa que una es múltiplo de la otra, lo cual evidentemente es cierto para este caso.

EJEMPLO 8.5.2 —DEPENDENCIA LINEAL

Para una ilustración de la dependencia lineal, considere las soluciones de la ecuación de difusión unidimensional. Se tiene $\varphi_1 = e^x$, $\varphi_2 = e^{-x}$ y se agrega $\varphi_3 = \cosh x$, que también es una solución. El wronskiano es

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cosh x \\ e^x & -e^{-x} & \operatorname{senh} x \\ e^x & e^{-x} & \cosh x \end{vmatrix} = 0.$$

El determinante desaparece para todas las x, debido a que la primera y tercera hileras son iguales. En consecuencia, e^x, e^{-x} y $\cosh x$ son dependientes linealmente y de hecho tienen una relación de la forma equivalente a la Ec. 8.47:

$$e^x + e^{-x} - 2 \cosh x = 0 \qquad \text{con} \quad k_\lambda \neq 0.$$

Una Segunda Solución. Regresando a nuestra ecuación diferencial homogénea de segundo orden lineal de la forma general

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{8.51}$$

sea y_1 e y_2 dos soluciones independientes. Siendo así, el wronskiano, por definición, es

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 \tag{8.52}$$

Mediante la diferenciación del wronskiano se obtiene

$$\begin{aligned} W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= y_1[-P(x)y_2' - Q(x)y_2] - y_2[-P(x)y_1' - Q(x)y_1] \\ &= -P(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2). \end{aligned} \tag{8.53}$$

La expresión entre paréntesis es justamente W, el wronskiano, y se tiene

$$W' = -P(x)W. \tag{8.54}$$

Si $P(x) = 0$, es decir

$$y'' + Q(x)y = 0, \tag{8.55}$$

el wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \text{constante}. \tag{8.56}$$

Ya que nuestra ecuación diferencial original es homogénea, podemos multiplicar las soluciones y_1 e y_2 por cualquier constante deseada y proceder al arreglo para lograr que el wronskiano sea igual a la unidad (o sea -1). Este caso, $P(x) = 0$, aparece más frecuentemente de lo esperado. El lector recordará que ∇^2 en coordenadas cartesianas no contiene una primera derivada. De manera similar, la dependencia radial de $\nabla^2(r\psi)$ en las coordenadas polares esféricas adolece de una primera derivada. Finalmente, cada ecuación diferencial de segundo orden lineal se puede transformar en una ecuación de la forma correspondiente a la Ec. 8.55 (cf. Ejercicio 8.5.7).

Ahora supondremos que tenemos una solución de la Ec. 8.51 mediante la sustitución de serie (o por medio de la suposición). Ahora, procederemos a desarrollar una segunda solución independiente. Volviendo a establecer la Ec. 8.54 en la forma

$$\frac{dW}{W} = -P\, dx_1,$$

se integra desde $x_1 = a$ hasta $x_1 = x$ para obtener

$$\ln \frac{W(x)}{W(a)} = -\int_a^x P(x_1)\, dx_1,$$

o

$$W(x) = W(a) \exp\left[-\int_a^x P(x_1)\, dx_1\right].^{1} \tag{8.57}$$

Pero

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ &= y_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right). \end{aligned} \tag{8.58}$$

Mediante la combinación de las Ec. 8.57 y 8.58 se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = W(a) \frac{\exp\left[-\int_a^x P(x_1)\, dx_1\right]}{y_1^2} \tag{8.59}$$

Finalmente, mediante la integración de la Ec. 8.59 desde $x_2 = b$ hasta $x_2 = x$ se obtiene

$$y_2(x) = y_1(x)\, W(a) \int_b^x \frac{\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1)\, dx_1\right]}{[y_1(x_2)]^2}\, dx_2. \tag{8.60}$$

[1] Si $P(x_1)$ continúa siendo finita, $a \leqslant x_1 \leqslant x$, $W(x) \neq 0$ a menos de que $W(a) = 0$. Es decir, el wronskiano *de nuestras dos soluciones* es idénticamente cero o nunca es cero.

En este caso, a y b son constantes arbitrarias y un término $y_1(x)\, y_2(b)/y_1(b)$ ha sido desechado ya que no origina nada nuevo. Ya que $W(a)$, el wronskiano evaluado en $x = a$ es una constante y nuestras soluciones para la ecuación diferencial homogénea siempre contienen un factor de normalización desconocido, establecemos $W(a) = 1$ e indicamos

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp[-\int^{x_2} P(x_1)\, dx_1]}{[y_1(x_2)]^2}\, dx_2 . \tag{8.61}$$

Observe que los límites inferiores $x_1 = a$ y $x_2 = b$ han sido omitidos. En caso contrario, simplemente originan una contribución igual a una constante multiplicada por la primera solución conocida, $y_1(x)$ lo cual consecuentemente no agrega nada nuevo.

Si se tiene el caso de especial importancia: $P(x) = 0$, la Ec. 8.61 se reduce a

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{dx_2}{[y_1(x_2)]^2} . \tag{8.62}$$

Esto significa que mediante el uso de la Ec. 8.61 o la Ec. 8.62 se puede considerar una solución conocida y mediante la integración existe la posibilidad de generar una segunda solución independiente de la Ec. 8.51. Esta técnica se utiliza en la Sección 12.10 para generar una segunda solución de la ecuación diferencial de Legendre.

EJEMPLO 8.5.3

De acuerdo con la Ec. 8.21 con $P(x) = 0$, sea una solución $y_1 = \operatorname{sen} x$. Mediante la aplicación de la Ec. 8.62 se obtiene

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \operatorname{sen} x \int^x \frac{dx_2}{\operatorname{sen}^2 x_2} \\ &= \operatorname{sen} x(-\cot x) = -\cos x, \end{aligned}$$

lo cual evidentemente es independiente (y no un múltiplo lineal) de sen x.

Forma en Serie de la Segunda Solución. Un análisis más profundo de la naturaleza de la segunda solución de la ecuación diferencial se puede lograr mediante la siguiente secuencia de operaciones:

1. Exprese $P(x)$ y $Q(x)$ en la Ec. 8.51 de la siguiente forma

$$P(x) = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i, \qquad Q(x) = \sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j. \tag{8.63}$$

Los límites inferiores de la suma se seleccionan justamente para satisfacer el teorema de Fuchs y debido a que de esta manera se logra una mejor comprensión de dicho teorema.

2. Desarrolle los primeros términos de la solución en serie de potencias, tal como en la Sección 8.4.

3. Utilizando esta solución como y_1, obtenga una segunda solución de tipo serie, y_2, con la Ec. 8.61, integrando término por término.

Procediendo con la etapa 1, se tiene

$$y'' + (p_{-1}x^{-1} + p_0 + p_1 x + \cdots)y' + (q_{-2}x^{-2} + q_{-1}x^{-1} + \cdots)y = 0, \quad (8.64)$$

en donde el punto $x = 0$ es en el peor de los casos un punto singular regular. Si $p_{-1} = q_{-1} = q_{-2} = 0$, se reduce a un punto ordinario. Sustituyendo

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}$$

(Etapa 2), se obtiene

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)a_\lambda x^{k+\lambda-2} + \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i \sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)a_\lambda x^{k+\lambda-1} + \sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0. \quad (8.65)$$

Suponiendo que $p_{-1} \neq 0$, $q_{-2} \neq 0$, la ecuación indicial es

$$k(k-1) + p_{-1}k + q_{-2} = 0,$$

lo cual establece el coeficiente neto de x^{k-2} igual a cero. Esto se reduce a

$$k^2 + (p_{-1} - 1)k + q_{-2} = 0. \quad (8.66)$$

Designamos las dos raíces de la ecuación indicial por $k = \alpha$ y $k = \alpha - n$ en donde n es cero o un número positivo entero. (Si n no es un número entero, es de esperarse dos soluciones en serie independientes mediante los métodos de la Sección 8.4 y no se tiene ningún problema.) Siendo así

$$(k-\alpha)(k-\alpha+n) = 0, \quad (8.67)$$

e igualando los coeficientes de k en las Ecs. 8.66 y 8.67,

$$p_{-1} - 1 = n - 2\alpha. \quad (8.68)$$

La solución en serie correspondiente a $k = \alpha$ se puede indicar:

$$y_1 = x^\alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda.$$

Sustituyendo esta solución en serie en la Ec. 8.61 (Etapa 3), da como resultado

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp\left(-\int_a^{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i \, dx_1\right)}{x_2^{2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^2} dx_2. \quad (8.69)$$

en donde las soluciones y_1 y y_2 han sido normalizadas de modo que el wronskiano $W(a) = 1$. Abordando primeramente el factor exponencial,

$$\int_a^{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i \, dx_1 = p_{-1} \ln x_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} + f(a) \tag{8.70}$$

En consecuencia,

$$\exp\left(-\int_a^{x_2} \sum_i p_i x_1^i \, dx_1\right) = \exp[-f(a)] x_2^{-p-1} \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1}\right)$$

$$= \exp[-f(a)] x_2^{-p-1} \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} + \frac{1}{2!}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1}\right)^2 - \cdots\right] \tag{8.71}$$

Este desarrollo en serie final del exponencial ciertamente es convergente si el desarrollo original del coeficiente $P(x)$ fue convergente.

El denominador en la Ec. 8.69 puede considerarse al establecer

$$\left[x_2^{2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^2\right]^{-1} = x_2^{-2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^{-2}$$

$$= x_2^{-2\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x_2^\lambda . \tag{8.72}$$

Despreciando los factores constantes que de todos modos serán considerados según el requisito de que $W(a) = 1$, se obtiene

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x x_2^{-p-1-2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x_2^\lambda\right) dx_2 \tag{8.73}$$

Mediante la Ec. 8.68

$$x_2^{-p-1-2\alpha} = x_2^{-n-1} , \tag{8.74}$$

y hemos asumido aquí que n es un número entero. En consecuencia, la integración indicada en la Ec. 8.73 origina un coeficiente de $y_1(x)$ que consiste de dos partes:

1. Una serie de potencias que se inicia con x^{-n}.
2. Un término logarítmico procedente de la integración de x^{-1} (cuando $\lambda = n$). Este término siempre aparece cuando n es un número entero, *a menos de que* c_n fortuitamente desaparezca.

EJEMPLO 8.5.4. UNA SEGUNDA SOLUCION DE LA ECUACION DE BESSEL

De acuerdo con la ecuación de Bessel, Ec. 8.36 (dividida entre x^2 para concordar con la Ec. 8.51), se tiene

$$P(x) = x^{-1} \qquad Q(x) = 1 \qquad \text{(para el caso } n = 0\text{).}$$

En consecuencia, $p_{-1} = 1, q_0 = 1$; todas las otras p_i y q_j desaparecen. La ecuación indicial de Bessel es

$$k^2 = 0,$$

(Ec. 8.39 con $n = 0$). En consecuencia, se verifican las Ecs. 8.66-8.68 con n y $\alpha = 0$.

Nuestra primera solución queda disponible de la Ec. 8.44. Volviendo a rotular para concordar con el Capítulo 11 (y utilizando $a_0 = 1$),

$$y_1(x) = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - O(x^6). \tag{8.75a}$$

Ahora, sustituyendo todo esto en la Ec. 8.61 se tiene el caso específico correspondiente a la Ec. 8.69

$$y_2(x) = J_0(x) \int^x \frac{\exp[-\int^{x_2} x_1^{-1}\, dx_1]}{[1 - x_2^2/4 + x_2^4/64 - \cdots]^2}\, dx_2. \tag{8.75b}$$

Del numerador del *integrando*

$$\exp\left[-\int^{x_2} \frac{dx_1}{x_1}\right] = \exp[-\ln x_2] = \frac{1}{x_2}.$$

Esto corresponde a x_2^{-p-1} en la Ec. 8.71. Del denominador del *integrando*

$$\left[1 - \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_2^4}{64}\right]^{-2} = 1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{5x_2^4}{32} + \cdots$$

Correspondiente a la Ec. 8.73

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x) \int^x \frac{1}{x_2}\left[1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{5x_2^4}{32} + \cdots\right] dx_2 \\ &= J_0(x)\left\{\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \cdots\right\}. \end{aligned} \tag{8.75c}$$

Comprobemos este resultado. De la Ec. 11.63, que proporciona la forma estándar de la segunda solución

$$\begin{aligned} N_0(x) &= \frac{2}{\pi}[\ln x - \ln 2 + \gamma]J_0(x) \\ &+ \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \cdots\right\}. \end{aligned} \tag{8.75d}$$

Se originan dos conceptos: (1) ya que la ecuación de Bessel es homogénea, podemos multiplicar $y_2(x)$ por cualquier constante. Para igualar con $N_0(x)$,

simplemente se multiplica $y_2(x)$ por $2/\pi$. (2) Para la segunda solución $(2/\pi)$ $y_2(x)$, se puede agregar cualquier constante múltiplo de la primera solución. Nuevamente, para igualar $N_0(x)$ se agrega

$$\frac{2}{\pi}[-\ln 2 + \gamma]J_0(x),$$

en donde γ es la constante de Euler-Mascheroni usual (Sección 5.2)[1]. Nuestra segunda solución modificada es

$$y_2(x) = \frac{2}{\pi}[\ln x - \ln 2 + \gamma]J_0(x) + \frac{2}{\pi}J_0(x)\left\{\frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \cdots\right\}. \tag{8.75e}$$

Ahora, la comparación con $N_0(x)$ se transforma en una multiplicación simple de $J_0(x)$ de la Ec. 8.75*a* y el paréntesis curvado de la Ec. 8.75*c*. La multiplicación comprueba a través de los términos del orden x^2 y x^4, la cual llevamos para todo. Nuestra segunda solución de las Ecs. 8.61 y 8.69 concuerda con la segunda solución estándar, la función de Neumann, $N_0(x)$.

De acuerdo con el análisis precedente, la segunda solución de la Ec. 8.51, $y_2(x)$, se puede indicar en la forma

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{j=-n}^{\infty} d_j x^{j+\alpha}, \tag{8.75f}$$

es decir la primera solución multiplicada por $\ln x$ y otra serie de potencias, esta última comenzando con $x^{\alpha-n}$, lo cual significa que podemos buscar un término logarítmico cuando la ecuación indicial de la Sección 8.4 proporciona tan solo una solución en serie. Con la forma de la segunda solución especificada por medio de la Ec. 8.75*f*, podemos sustituir la Ec. 8.75*f* en la ecuación diferencial original y determinar los coeficientes d_j exactamente como en la Sección 8.4.

La segunda solución normalmente será divergente en el origen debido al factor logarítmico y las potencias negativas de x en la serie. Debido a esto es que $y_2(x)$ se denomina frecuentemente solución irregular. La primera solución en serie, $y_1(x)$, que normalmente converge en el origen, se denomina solución regular. El aspecto relacionado con el comportamiento en el origen se describe con mayor detalle en los Capítulos 11 y 12, en que se consideran las funciones de Bessel, las funciones de Bessel modificadas y las funciones de Legendre.

Resumen. Estas dos secciones (conjuntamente con los ejercicios) proporcionan una solución completa de la ecuación diferencial de segundo orden, homogénea y lineal, suponiendo que el punto de desarrollo no es

[1] La función de Neumann N_0 se define como el orden para lograr las propiedades asintóticas adecuadas, Sección 11.6.

peor que una singularidad regular. Al menos siempre se puede obtener una solución mediante la sustitución de serie (Sección 8.4). Una segunda solución independiente linealmente se puede construir por medio de la integral doble wronskiana, Ec. 8.61. Esto es todo lo que tiene posibilidad: no hay una tercera solución independiente linealmente (cf. Ejercicio 8.5.6).

La ecuación diferencial de segundo orden, lineal y *no homogénea* tendrá una solución adicional: la solución particular. Esta solución particular se puede obtener mediante el método de la variación de los parámetros, Ejercicio 8.5.19, o por medio de las técnicas tales como las funciones de Green, Sección 8.6.

EJERCICIOS

8.5.1 El criterio para la *independencia* lineal de tres vectores **A**, **B** y **C** es que la ecuación

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0$$

(análoga a la Ec. 8.47) no tenga otra solución que la trivial $a = b = c = 0$. Utilizando los componentes $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, etc. establezca el criterio determinante para la existencia o no existencia de una solución no trivial de los coeficientes a, b y c. Demuestre que este criterio es equivalente al producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.

8.5.2 Si el wronskiano de dos funciones y_1 e y_2 es igual a cero, demuestre mediante la integración directa que

$$y_1 = cy_2,$$

es decir que y_1 e y_2 son dependientes. Suponga que las funciones tienen derivadas continuas y que al menos una de las funciones no desaparece en el intervalo bajo consideración.

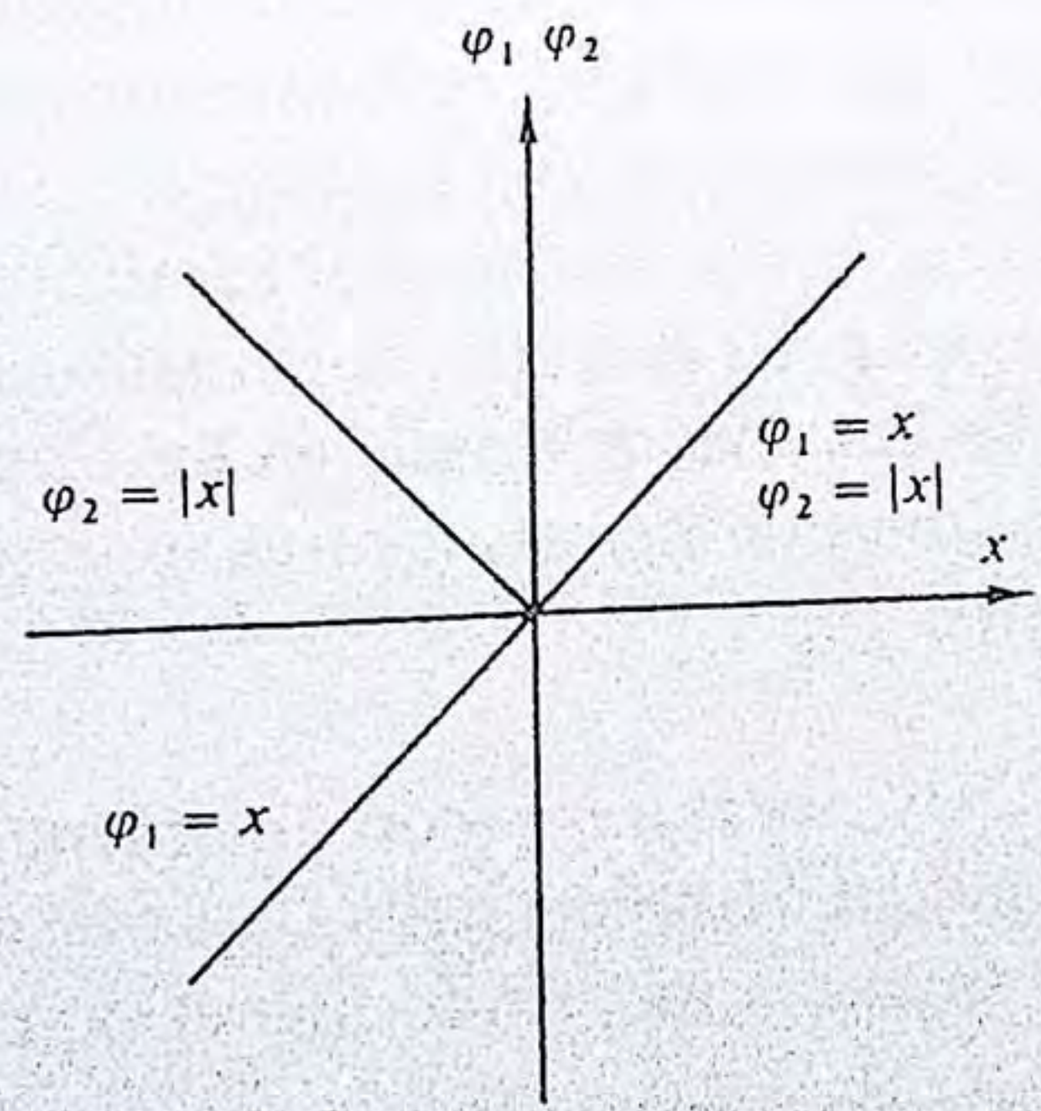


FIG. 8.2 x y $|x|$

8.5.3 Considere dos funciones, $\varphi_1 = x$ y $\varphi_2 = |x| = x \operatorname{sgn} x$. La función sgn x es justamente el signo de x. Ya que $\varphi_1' = 1$ y $\varphi_2' = \operatorname{sgn} x$, $W(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ para cualquier intervalo incluyendo $[-1, +1]$. Indique si la desaparición del wronskiano sobre $[-1, +1]$ demuestra que φ_1 y φ_2 son linealmente dependientes. Evidentemente que no lo son. ¿En dónde está el error?

8.5.4 Explique por qué la *independencia lineal* no significa la ausencia de cualquier dependencia. Ilustre su argumento con $\cosh x$ y e^x.

8.5.5 La ecuación diferencial de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

tiene una solución regular $P_n(x)$ y una solución irregular $Q_n(x)$. Demuestre que el wronskiano de P_n y Q_n está definido por

$$P_n(x)\, Q_n'(x) - P_n'(x)\, Q_n(x) = \frac{A_n}{1 - x^2}$$

con A_n *independiente* de x.

8.5.6 Demuestre, mediante el wronskiano, que una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea y lineal de la forma

$$y''(x) + P(x)\, y'(x) + Q(x)\, y(x) = 0$$

no puede tener tres soluciones independientes. (Suponga una tercera solución y demuestre que el wronskiano desaparece para todas las x.)

8.5.7 Transforme la ecuación diferencial de segundo orden lineal

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

mediante la sustitución

$$y = z \exp[-\tfrac{1}{2}\textstyle\int^x P(t)dt]$$

y demuestre que la ecuación diferencial resultante para z es

$$z'' + q(x)z = 0,$$

en donde

$$q(x) = Q(x) - \tfrac{1}{2}P'(x) - \tfrac{1}{4}P^2(x).$$

Nota. Esta sustitución se puede *derivar* mediante la técnica del Ejercicio 8.5.18.

8.5.8 Utilice el resultado del Ejercicio 8.57 para demostrar que la sustitución de $\varphi(r)$ por $r\,\varphi(r)$ probablemente elimine la primera derivada del laplaciano en coordenadas polares esféricas.

8.5.9 Mediante la diferenciación directa y sustitución demuestre que

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp[-\int^s P(t)dt]}{[y_1(s)]^2}\, ds$$

satisface

$$y_2''(x) + P(x)\, y_2'(x) + Q(x)\, y_2(x) = 0.$$

Nota. La fórmula de Leibnitz para la derivada de una integral es

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx + f[h(\alpha), \alpha]\frac{dh(\alpha)}{d\alpha} - f[g(\alpha), \alpha]\frac{dg(\alpha)}{d\alpha}.$$

8.5.10 En la ecuación

$$y_2(x) = y_1(x)\int^x \frac{\exp[-\int^s P(t)dt]}{[y_1(s)]^2}\,ds$$

$y_1(x)$ satisface

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0.$$

La función $y_2(x)$ es una segunda solución *independiente* linealmente de la misma ecuación. Demuestre que la incorporación de los límites inferiores en las integrales no proporciona nada nuevo; es decir, solamente introduce factores totales y/o un múltiplo de la solución conocida de $y_1(x)$.

8.5.11 Considerando que una solución de

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{m^2}{r^2}R = 0$$

es $R = r^m$, demuestre que la Ec. 8.61 predice una segunda solución, $R = r^{-m}$.

8.5.12 Utilizando $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ como una solución de la ecuación del oscilador lineal, prosiga con el análisis que culmina en la Ec. 8.75*f* y demuestre que $c_1 = 0$ de modo que la segunda solución en ningún caso contiene un término logarítmico.

8.5.13 Demuestre que cuando n *no* es un número entero, la segunda solución de la ecuación de Bessel, obtenida de la Ec. 8.61, *no* contiene un término logarítmico.

8.5.14 (a) Una solución de la ecuación diferencial de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

para $\alpha = 0$ es $y_1(x) = 1$. Encuentre una segunda solución $y_2(x)$, utilizando la Ec. 8.61. Demuestre que la segunda solución es equivalente a y_{impar} (Ejercicio 8.4.5).

(b) Encuentre una segunda solución para $\alpha = 1$, en donde $y_1(x) = x$, utilizando la Ec. 8.61. Demuestre que la segunda solución es equivalente a y_{par} (Ejercicio 8.4.5).

8.5.15 Una solución de la ecuacion diferencial de Laguerre

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$$

para $n = 0$ es $y_1(x) = 1$. Utilizando la Ec. 8.61, desarrolle una segunda solución independiente linealmente. Manifieste explícitamente el término logarítmico.

8.5.16 Una solución de la ecuación de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

para $n = 0$ es $y_1 = 1$.

(a) Utilizando la Ec. 8.61 desarrolle una segunda solución independiente linealmente.

(b) Encuentre una segunda solución mediante la integración directa de la ecuación de Chebyshev.

Sugerencia. Sea $v = y'$ y proceda a integrar. Compare el resultado con la segunda solución indicada en la Sección 13.3.

Respuesta. (a) $y_2 = \operatorname{sen}^{-1}x$.

(b) La segunda solución, $V_n(x)$, no está definida para $n = 0$.

8.5.17 La ecuación de onda de Schrödinger radial tiene la forma

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + l(l+1)\frac{\hbar^2}{2mr^2} + V(r)\right]y(r) = Ey(r).$$

La energía potencial $V(r)$ puede desarrollarse alrededor del origen en la forma

$$V(r) = \frac{b_{-1}}{r} + b_0 + b_1 r + \ldots$$

(a) Demuestre que solamente se tiene una solución (regular) que se inicia en r^{l+1}.
(b) A partir de la Ec. 8.62, demuestre que la solución irregular diverge en el origen a modo de r^{-l}.

8.5.18 Demuestre que si una segunda solución, y_2, se supone que tiene la forma $y_2(x) = y_1(x)f(x)$ sustituida nuevamente en la ecuación original

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

origina

$$f(x) = \int^x \frac{\exp[-\int^s P(t)dt]}{[y_1(s)]^2} ds$$

en concordancia con la Ec. 8.61.

8.5.19 Si la ecuación diferencial de segundo orden lineal no es homogénea, es decir tiene la forma de la Ec. 8.20*b*, la solución más general es

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_p(x).$$

(y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea.)
Demuestre que

$$y_p(x) = y_2(x) \int^x \frac{y_1(s)F(s)\,ds}{W\{y_1(s), y_2(s)\}} - y_1(x) \int^x \frac{y_2(s)F(s)\,ds}{W\{y_1(s), y_2(s)\}}$$

con $W\{y_1(s), y_2(s)\}$ el Wronskiano de $y_1(s)$ e $y_2(s)$.
Sugerencia: Del mismo modo que en el Ejercicio 8.5.18, sea $y_p(x) = y_1(x)\,v(x)$ y desarrolle la ecuación diferencial de primer orden para $v'(x)$.

8.6 Ecuación No Homogénea. Función de Green

La sustitución de serie de la Sección 8.4 y la integral doble wronskiana de la Sección 8.5 proporcionan la solución más general de la ecuación diferencial de segundo orden, lineal *homogénea*. La solución específica, y_p, dependiente linealmente del término de suministro ($F(x)$ de la Ec. 8.20*b*) puede obtenerse mediante la variación de los parámetros, Ejercicio 8.5.19. En esta sección se aplicará un método diferente para obtener la solución: las funciones de Green.

Para una breve introducción del método de la función de Green, tal como se aplica a la solución de una ecuación diferencial parcial no homogénea, es de utilidad el uso del análogo electrostático. En presencia de las cargas del potencial electrostático ψ satisface la ecuación no homogénea de Poisson (cf. Sección 1.14).

$$\nabla^2\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad \text{(unidades mks)} \tag{8.76}$$

y la ecuación homogénea de Laplace

$$\nabla^2\psi = 0, \tag{8.77}$$

en ausencia de una carga eléctrica ($\rho = 0$). Cuando las cargas son cargas de punto q_i, se conoce que la solución es

$$\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \tag{8.78}$$

es decir la sobreposición de las soluciones de carga de punto simple obtenidas de la ley de Coulomb para la fuerza entre dos cargas de punto, q_1 y q_2,

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{8.79}$$

Mediante la sustitución de las cargas de punto discreto con la densidad de carga distribuida ρ, la Ec. 8.78 se transforma en

$$\psi(r = 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r})}{r}\, d\tau \tag{8.80}$$

o, para el potencial en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ lejos del origen y la carga en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$,

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\, d\tau_2 \tag{8.81}$$

Función Delta de Dirac. Una derivación y generalización formal de este resultado se facilita mediante el uso de $\delta(x)$, la función delta de Dirac, del mismo modo que en la Sección 1.15. Para el caso unidimensional, la función delta de Dirac frecuentemente se define por medio de las siguientes propiedades:

$$\delta(x) = 0, \qquad x \neq 0, \tag{8.82a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1, \tag{8.82b}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\, dx = f(0). \tag{8.82c}$$

En este caso, se supone que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

De acuerdo con estas ecuaciones de definición, $\delta(x)$ debe ser una espiga infinitamente alta, infinitamente delgada, tal como en la descripción de una fuerza impulsora (Sección 15.8) o la densidad de carga para una carga de punto.[1] El problema es que *no existe una función de este tipo* en el sentido usual de la función. Existe la posibilidad de aproximar la función del-

[1] La función delta que frecuentemente se implica para describir fuerzas de muy bajo intervalo tal como las fuerzas nucleares.

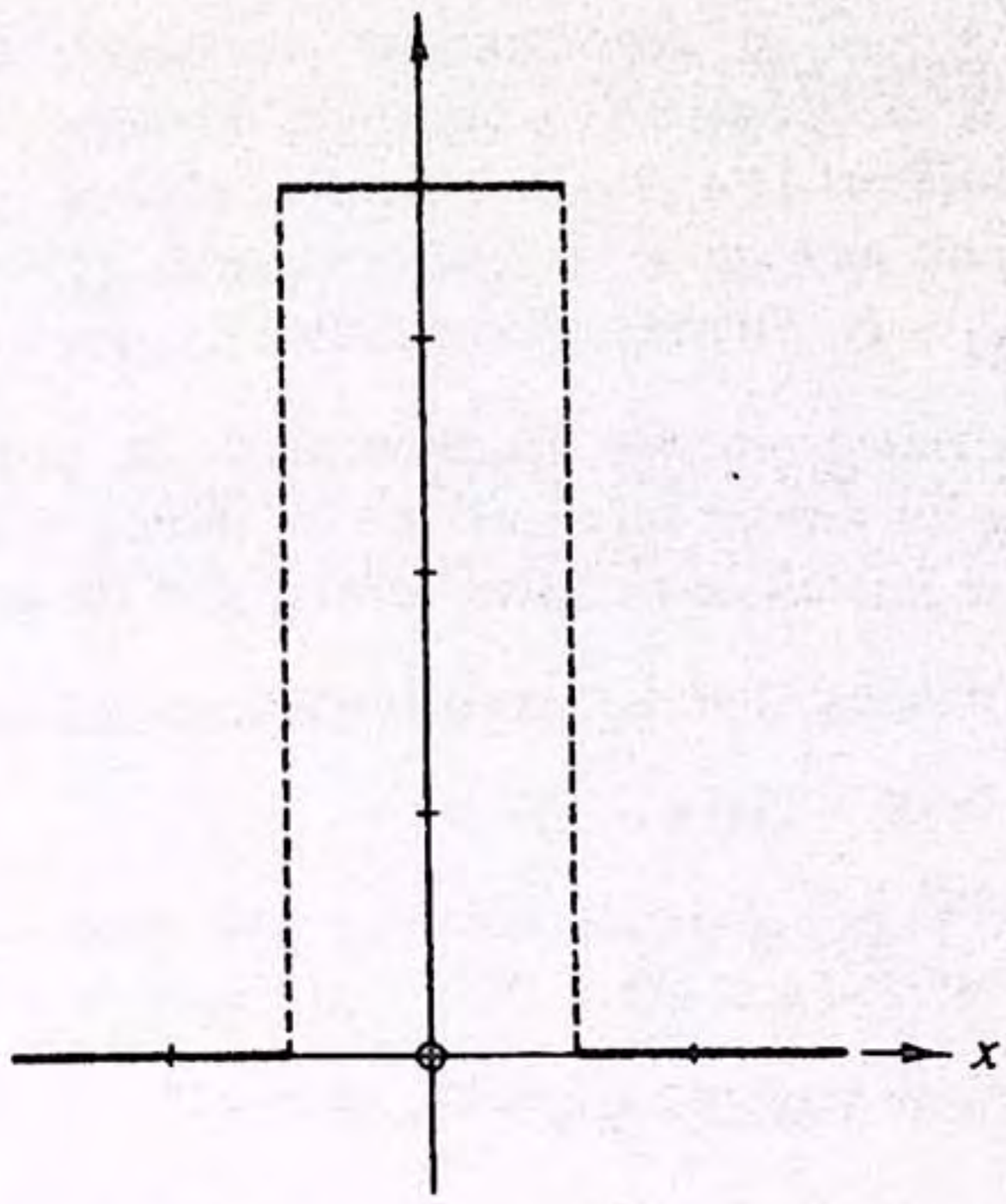


Fig. 8.3*a*. Función de secuencia δ.

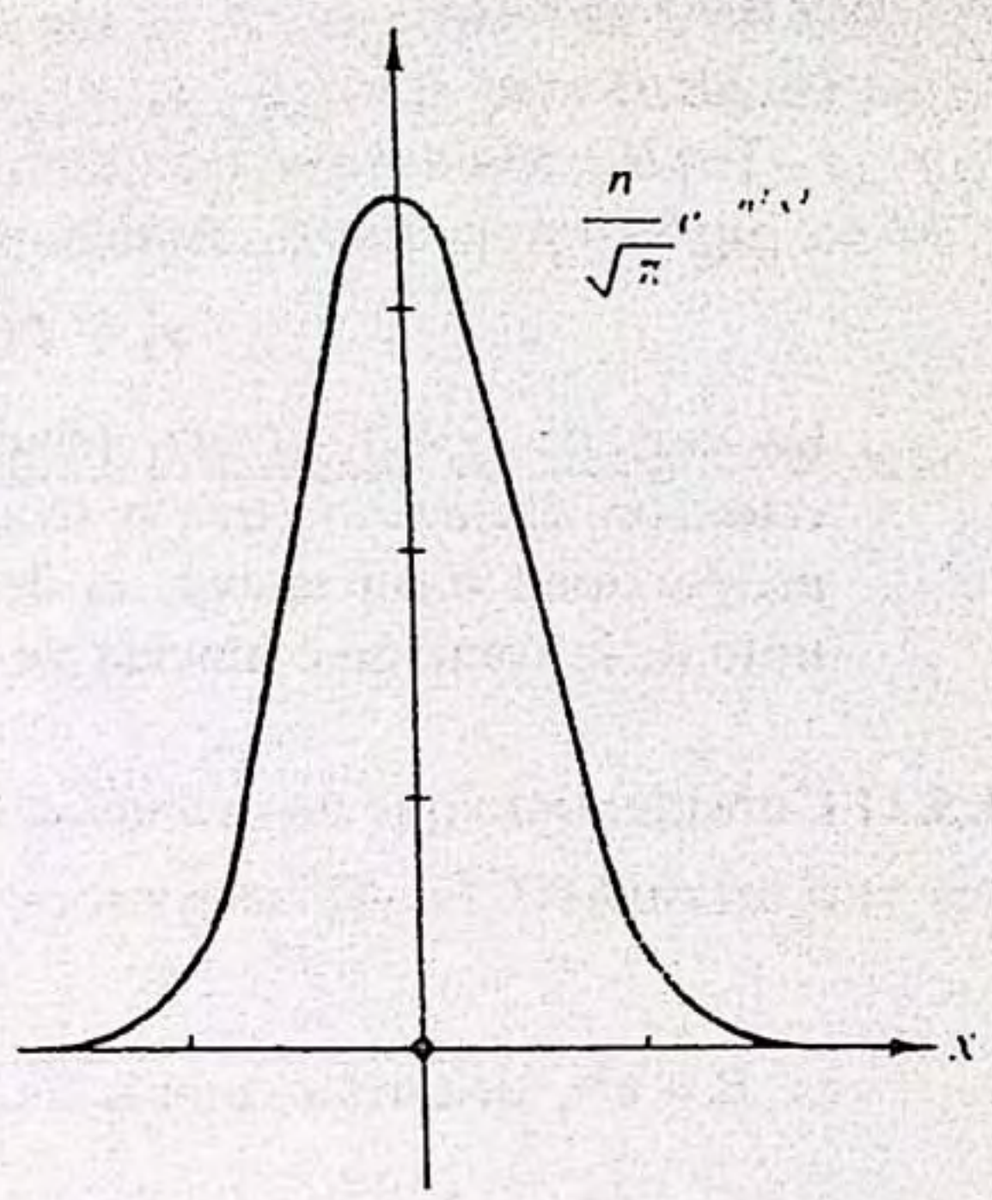


Fig. 8.3*b*. Función de secuencia δ.

ta mediante una variedad de funciones, Ecs. 8.83*a*-8.83*d* y las figuras 8.3*a*-8.3*d*:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\dfrac{1}{2n} \\ n, & -\dfrac{1}{2n} < x < \dfrac{1}{2n} \\ 0, & x > \dfrac{1}{2n} \end{cases} \tag{8.83a}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \tag{8.83b}$$

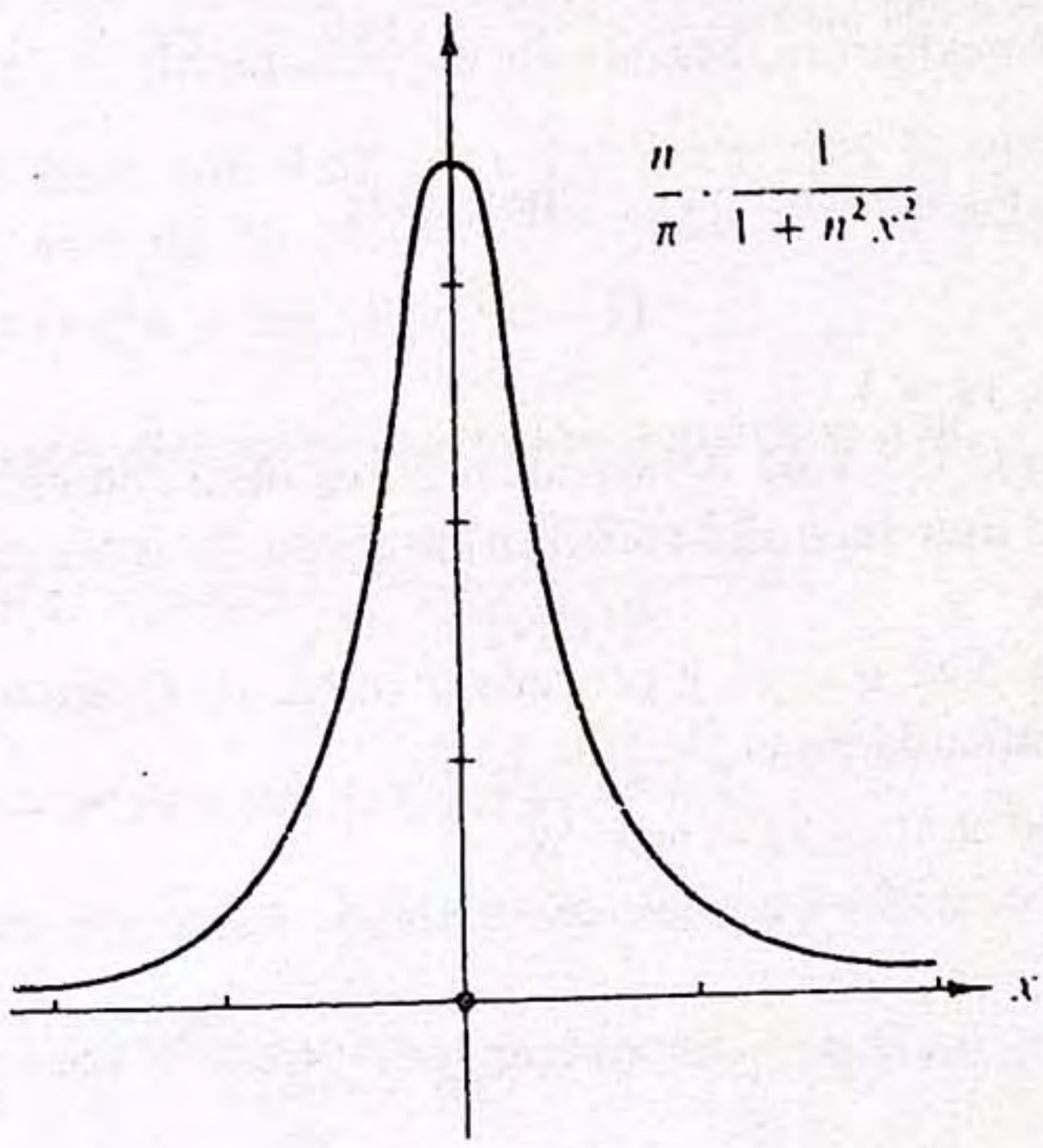


Fig. 8.3*c*. Función de secuencia δ

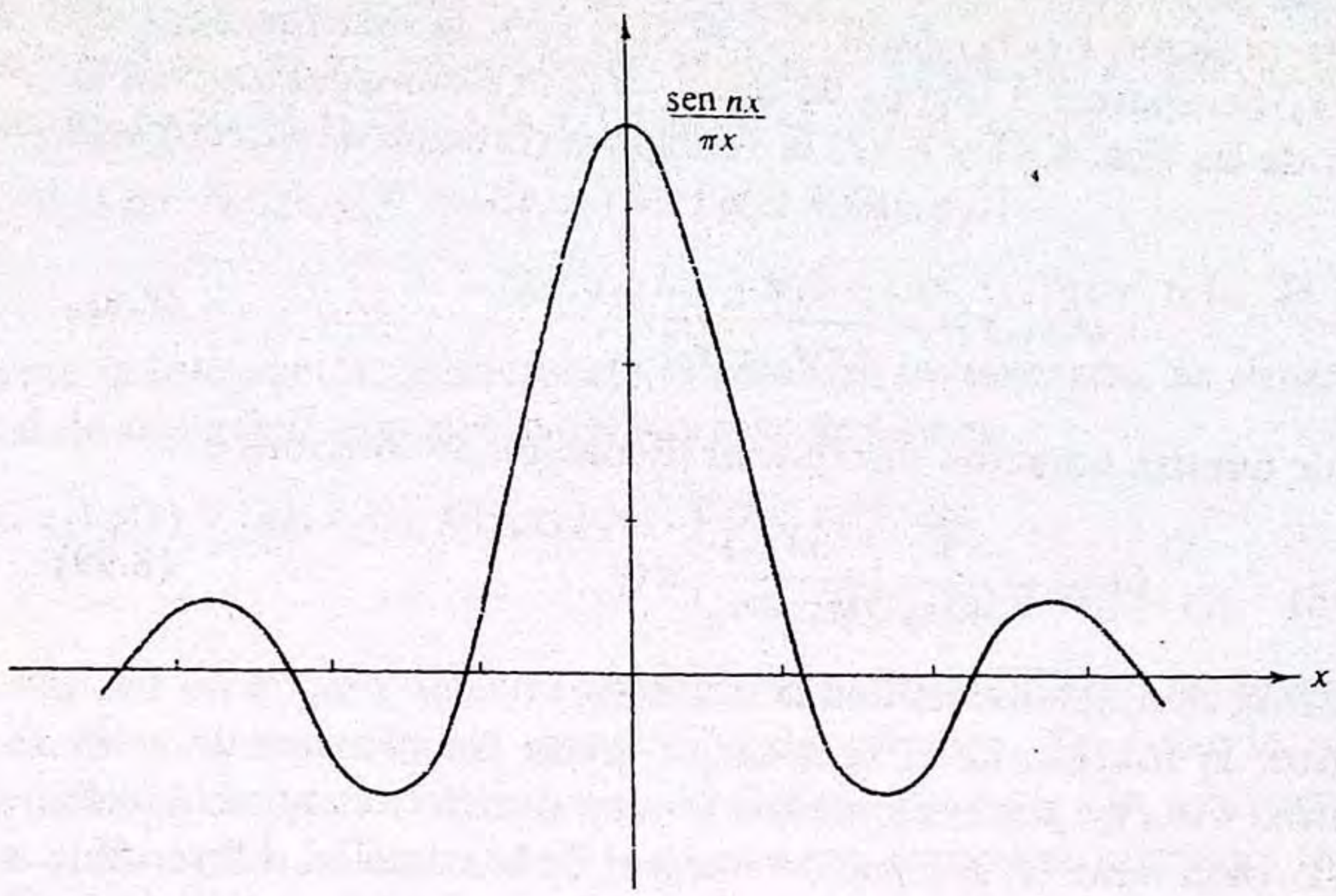


Fig. 8.3*d*. Función de secuencia δ.

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + n^2x^2} \tag{8.83c}$$

$$\delta_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} e^{ixt}\, dt \tag{8.83d}$$

Estas aproximaciones tienen diversos grados de utilidad. La Ec. 8.83*a* es de utilidad para proporcionar una derivación simple de la propiedad integral, Ec. 8.82*c*. La Ec. 8.83*b* es conveniente para la diferenciación. Sus derivadas originan los polinomios de Hermite, Ec. 13.7. La Ec. 8.83*d* es de particular utilidad en el análisis de Fourier y en sus aplicaciones a la mecánica cuántica.

Para la mayoría de los propósitos físicos, tales aproximaciones son bastante adecuadas. Desde el punto de vista matemático, la situación aún no es satisfactoria: los límites

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n(x)$$

no existen.

La eliminación de esta dificultad la proporciona la teoría de las distribuciones. Reconociendo que la Ec. 8.82*c* es la propiedad fundamental, enfocamos nuestra atención en la misma más bien que en la propia $\delta(x)$. Las Ecs. 8.83*a*-8.83*d* con $n = 1, 2, 3, \ldots$ pueden interpretarse como *secuencias* de las funciones normalizadas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, dx = 1. \tag{8.84}$$

La secuencia de las integrales tiene el límite

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)f(x)\,dx = f(0). \tag{8.85a}$$

Observe cuidadosamente que la Ec. 8.85*a* es el límite de la secuencia de las integrales. Nuevamente, el límite de $\delta_n(x)$, $n\to\infty$ no existe. (Los límites de las cuatro formas de $\delta_n(x)$ divergen en $x = 0$).

Existe la posibilidad de tratar consistentemente a $\delta(x)$ en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)f(x)\,dx. \tag{8.85b}$$

en que $\delta(x)$ se ha rotulado como una distribución (y no una función) definida por las secuencias $\delta_n(x)$ tal como se indica en la Ec. 8.85*b*. Es de hacerse notar que la integral en el lado izquierdo de la Ec. 8.85*b* no es una integral de Riemann.[1] Es un límite.

Esta distribución $\delta(x)$ es una de la infinidad de distribuciones posibles, pero es en la que estamos interesados debido a la Ec. 8.82*c*.

Utilizaremos $\delta(x)$ frecuentemente y la denominaremos función delta de Dirac, por razones históricas. Recuerde que de hecho no es una función. Esencialmente es una notación breve, definida implícitamente como el límite de las integrales de una secuencia, $\delta_n(x)$, de acuerdo con la Ec. 8.85*b*. Es de entenderse que la función delta de Dirac tiene significado solamente como parte de un *integrando* y nunca del resultado final.

Desplazando la singularidad al punto $x = x'$, la función delta de Dirac se indica en la forma $\delta(x - x')$. La Ec. 8.82*c* se transforma en

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x')\,dx = f(x'), \tag{8.86}$$

Como descripción de una singularidad en $x = x'$, la función delta de Dirac puede indicarse en la forma $\delta(x - x')$ o como $\delta(x' - x)$. Pasando a las tres dimensiones y utilizando las coordenadas polares esféricas, se obtiene

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\delta(\mathbf{r})r^2\,dr\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi = \iiint_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\delta(y)\delta(z)\,dx\,dy\,dz = 1. \tag{8.87}$$

Esto corresponde a una singularidad (o fuente) en el origen. Nuevamente, cuando la fuente se encuentra en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, la Ec. 8.87 se transforma en

$$\iiint\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)r_2^2\,dr_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,d\theta_2\,d\varphi_2 = 1. \tag{8.88}$$

Tal como se ha mencionado antes,

$$\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{8.89}$$

[1] Puede tratarse como una integral de Stieltjes si se desea. $\delta(x)\,dx$ se sustituye por $dS(x)$, en donde $S(x)$ es la función de etapa de Heaviside (cf. Ejercicio 8.6.3).

Ecuación de Poisson. Solución de la Función de Green. Regresando a nuestro problema electrostático, se utiliza ψ como el potencial correspondiente a cierta distribución de carga y consecuentemente que satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{8.90}$$

mientras que la función φ, que puede designarse como la función de Green, debe satisfacer la ecuación de Poisson con una fuente de punto en el punto definido por $\mathbf{r}_2$:

$$\nabla^2\varphi = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{8.91}$$

Siendo así, físicamente φ es el potencial en $\mathbf{r}_1$ correspondiente a la fuente unitaria (ε_0) en $\mathbf{r}_2$. Mediante el teorema de Green (Sección 1.11)

$$\int(\psi\,\nabla^2\varphi - \varphi\,\nabla^2\psi)\,d\tau_2 = \int(\psi\,\nabla\varphi - \varphi\,\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.92}$$

Suponiendo que el *integrando* disminuye con mayor rapidez que r^{-2}, se puede simplificar el problema al considerar un volumen tan grande que la integral de superficie desaparece, dejando así

$$\int\psi\,\nabla^2\varphi\,d\tau_2 = \int\varphi\,\nabla^2\psi\,d\tau_2 \tag{8.93}$$

o mediante la sustitución en las Ecs. 8.90 y 8.91,

$$-\int\psi(\mathbf{r}_2)\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,d\tau_2 = -\int\frac{\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\,\rho(\mathbf{r}_2)}{\varepsilon_0}\,d\tau_2. \tag{8.94}$$

La integración por medio del uso de la propiedad de definición de la función delta de Dirac (Ec. 8.82*c*) produce

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\,\rho(\mathbf{r}_2)\,d\tau_2. \tag{8.95}$$

Observe que se ha utilizado la Ec. 8.91 para eliminar $\nabla^2\varphi$, pero que la propia función φ aún es desconocida. En la Sección 1.14, ley de Gauss, se había establecido que

$$\int\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = \begin{cases} 0, \\ -4\pi, \end{cases} \tag{8.96}$$

0 si el volumen no incluye el origen y -4π si se incluye el origen. Este resultado de la Sección 1.14 se puede volver a establecer en la forma

$$\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = -\delta(\mathbf{r}), \quad \text{o} \quad \nabla^2\left(\frac{1}{4\pi r_{12}}\right) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{8.97}$$

correspondiente al desplazamiento de la carga electrostática con respecto al origen a la posición $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$. Aquí, $r_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y la función delta de Dirac $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ desaparece a menos de que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. En consecuencia, en la comparación de las Ecs. 8.91 y 8.97, la función φ (función de Green) está definida por

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \tag{8.98}$$

La solución de nuestra ecuación diferencial (Ecuación de Poisson) es

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\tau_2 \tag{8.99}$$

lo cual concuerda completamente con la Ec. 8.81.

En resumen, la función de Green, $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, que frecuentemente se indica en la forma $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ como recordatorio a su nombre, es una solución de la Ec. 8.91. Interviene en la solución integral de la ecuación diferencial, tal como en la Ec. 8.81. Para el caso electrostático simple pero importante, la función de Green $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ se obtiene mediante la ley de Gauss comparando las Ecs. 8.91 y 8.97. Finalmente, a partir de la solución final (Ec. 8.99) existe la posibilidad de desarrollar una interpretación física de la función de Green. Se presenta como función ponderada o función de influencia que mejora o reduce el efecto del elemento carga $\rho(\mathbf{r}_2)\, d\tau_2$ de acuerdo con su distancia desde el punto de campo $\mathbf{r}_1$. La función de Green, $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, proporciona el efecto de una fuente de punto unitario en $\mathbf{r}_2$ que produce el potencial en $\mathbf{r}_1$. Esta es la forma en que se ha introducido en la Ec. 8.91; a esto se debe que aparezca en la Ec. 8.99.

Una propiedad importante de la función de Green es la simetría de sus dos variables, es decir

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \tag{8.100}$$

Aun cuando esto es evidente en el caso electrostático considerado antes, se puede demostrar bajo condiciones más generales. En lugar de la Ec. 8.91, habremos de requerir que $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ satisfaga[1]

$$\nabla \cdot [p(\mathbf{r})\, \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] + \lambda q(\mathbf{r})\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \tag{8.101}$$

correspondiente a la fuente de punto matemática en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$. En este caso, las funciones $p(\mathbf{r})$ y $q(\mathbf{r})$ son funciones de $\mathbf{r}$ de comportamiento adecuado pero aún así arbitrarias. La función de Green, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$, satisface la misma ecuación pero el subíndice 1 se sustituye por el subíndice 2.

$$\nabla \cdot [p(\mathbf{r})\, \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] + \lambda\, q(\mathbf{r})\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \tag{8.102}$$

[1] La Ec. 8.101 es una versión tridimensional de la ecuación de valor propio *autoindependiente*, Ec. 9.4.

Siendo así, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ es cierta clase de potencial en $\mathbf{r}$ originado por la fuente de punto unitario en $\mathbf{r}_2$. Se multiplica la ecuación para $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ por $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ y la ecuación para $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ por $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ y luego se restan las dos

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\nabla \cdot [p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla \cdot [p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)]$$
$$= -G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (8.103)$$

Mediante la integración con respecto al volumen involucrado, se obtiene la integral de superficie por medio del teorema de Green:

$$\int_S [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\, p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\, p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)] \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$
$$= -G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (8.104)$$

Los términos en el lado derecho aparecen cuando se utilizan las funciones delta de Dirac y se realiza la integración de volumen. De acuerdo con el requerimiento de que las funciones de Green, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ y $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$, tengan el mismo valor sobre la superficie S y de que sus derivadas normales tengan los mismos valores sobre la superficie S, o de que las funciones de Green desaparezcan (condiciones limitantes de Dirichlet, Sección 9.1)[1] sobre la superficie S, la integral de superficie desaparece y

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (8.105)$$

lo cual demuestra que la función de Green es simétrica. Si las funciones propias son complejas, las condiciones limitantes correspondientes a las Ecs. 8.20-9.22 son apropiadas. La Ec. 8.105 se transforma en

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (8.106)$$

Observe que esta propiedad de simetría es consistente para la función de Green en cada ecuación en la forma de la Ec. 8.101. En el Capítulo 9 las ecuaciones de esta forma se denominan ecuaciones de unión independiente. La simetría es la base de los diversos teoremas de reciprocidad; el efecto de una carga en $\mathbf{r}_2$ sobre el potencial en $\mathbf{r}_1$ es el mismo que el efecto de una carga en $\mathbf{r}_1$ sobre el potencial en $\mathbf{r}_2$.

Este uso de las funciones de Green constituye una técnica poderosa para la resolución de muchos de los problemas más dificultosos de la física matemática. Regresaremos a las mismas cuando se consideren las ecuaciones integrales en el Capítulo 16.

[1] Cualquier intento de requerir que las derivadas normales desaparezcan en la superficie (condiciones de Neumann, Sección 9.1) origina problemas con la ley de Gauss. Es como si se requiriera que $\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$ cuando se sabe perfectamente bien que se tiene una carga eléctrica en el interior de la superficie.

8.6.1 Sea

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\dfrac{1}{2n}, \\ n, & -\dfrac{1}{2n} < x < \dfrac{1}{2n}, \\ 0, & \dfrac{1}{2n} < x. \end{cases}$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta_n(x)\, dx = f(0)$$

suponiendo que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

8.6.2 Verifique que la secuencia $\delta_n(x)$, basada en la función

$$\delta_n = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ne^{-nx}, & x > 0, \end{cases}$$

es una secuencia delta (que satisface la Ec. 8.85*a*). Observe que la singularidad se encuentra en $+0$, el lado positivo del origen.

8.6.3 (a) Si se define la secuencia $\delta_n(x) = n/(2\cosh^2 nx)$, demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, dx = 1, \qquad \text{independent of } n.$$

(b) Continuando este análisis, demuestre que

$$\int_{-\infty}^{x} \delta_n(x)\, dx = \frac{1}{2}\,[1 + \tanh nx] \equiv S_n(x)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Esta es la función de etapa unitaria de Heaviside.

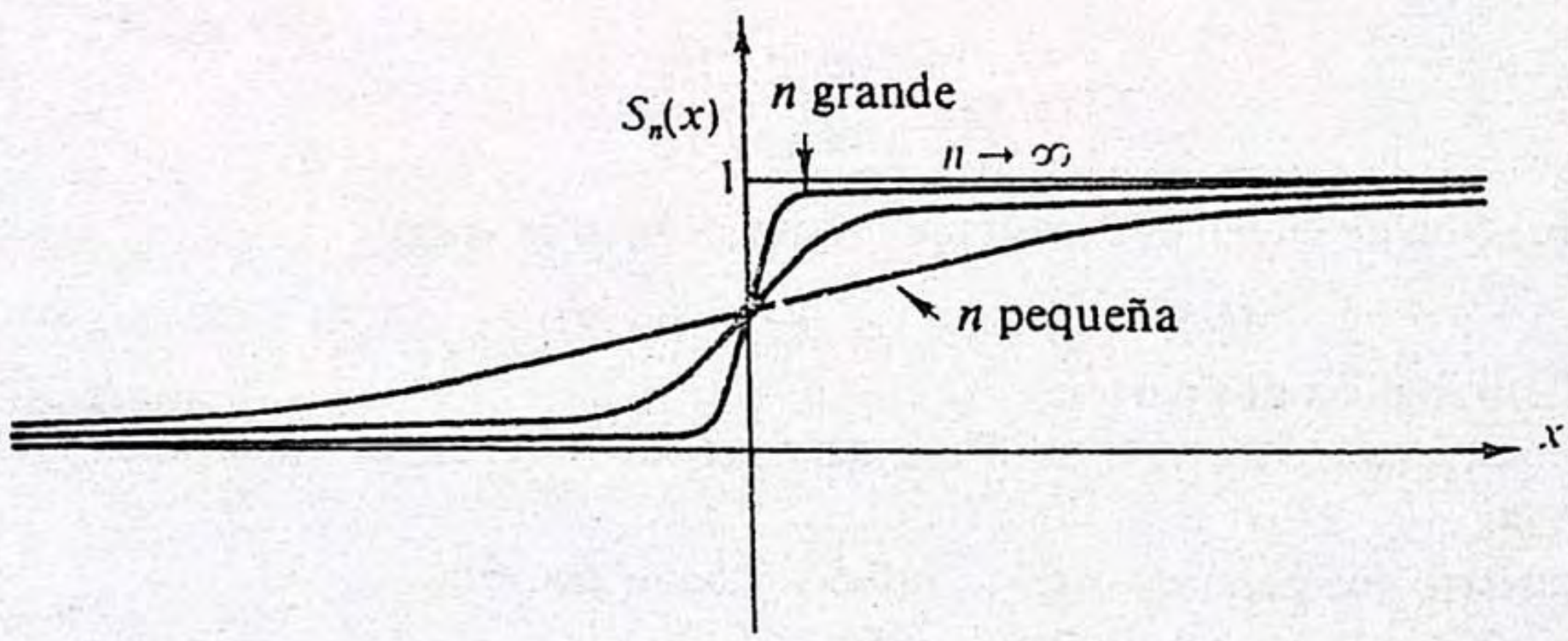


Fig. 8.4 $\frac{1}{2}[1 + \tanh nx]$ y la función de etapa unitaria de Heaviside

8.6.4 Utilizando la secuencia delta de la curva de error de Gauss (δ_n) demuestre que

$$x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x)$$

tratando $\delta(x)$ y su derivada como en la Ec. 8.85*b*.

8.6.5 Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x)\, dx = -f'(0).$$

En este caso se supone que $f'(x)$ es continua en $x = 0$.

8.6.6 Demuestre que

$$\delta(f(x)) = \left| \frac{df(x)}{dx} \right|^{-1} \delta(x - x_0),$$

en donde x_0 se selecciona de tal forma que $f(x_0) = 0$.
Sugerencia. Observe que $\delta(f)\, df = \delta(x)\, dx$.

8.6.7 Demuestre que en coordenadas polares esféricas $(r, \cos\theta, \varphi)$ la función delta $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ se transforma en

$$\frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2)\, \delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\, \delta(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Generalice esto para las coordenadas curvilíneas (q_1, q_2, q_3) de la Sección 2.1 con los factores de escala h_1, h_2 y h_3.

8.6.8 El desarrollo riguroso de las transformadas de Fourier (Sneddon, *Fourier Transforms*) incluye como teorema las relaciones

$$\lim_{a \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} f(u + x) \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \begin{cases} f(u+0) + f(u-0), & x_1 < 0 < x_2 \\ f(u+0), & x_1 = 0 < x_2 \\ f(u-0), & x_1 < 0 = x_2 \\ 0 & x_1 < x_2 < 0 \\ & 0 < x_1 < x_2 \end{cases} \quad \text{o}$$

Verifique estos resultados utilizando la función delta de Dirac.

8.6.9 Demuestre que

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

es una función de Green que satisface la ecuación diferencial

$$(\nabla_1^2 + k^2)\, G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Esto implica dos partes:

(a) Demuestre que $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ satisface la ecuación diferencial homogénea lejos de $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.

(b) Demuestre que para $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ lo suficientemente pequeño

$$\int (\nabla_1^2 + k^2)\, G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, d\tau_1 = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}_2 \neq \mathbf{r}_1, \\ -1, & \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1. \end{cases}$$

8.7 Soluciones Numéricas

Las soluciones analíticas y las soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales en este capítulo y los subsecuentes pueden ser suficientes para resolver el problema en particular, particularmente cuando existe cierta simetría presente. Las soluciones de serie de potencias indican la forma en que se comporta la solución para valores pequeños de x. Las soluciones asintóticas (cf. Secciones 11.6 y 12.10) indican el comportamiento de la solución para valores altos de x. Los casos limitantes y también la posible semejanza de la ecuación diferencial con respecto a las formas estándar de soluciones conocidas (Capítulos 11-13) son de suma utilidad para lograr comprender el comportamiento general de nuestra solución.

Sin embargo, la situación general es que se tiene una ecuación *diferente,* posiblemente un potencial diferente en la ecuación de onda de Schrödinger y que se desea una solución razonablemente precisa. Siendo así, es conveniente considerar las técnicas numéricas.

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden. La ecuación diferencial implica una continuidad de puntos. La variable independiente x es continua. La variable dependiente (desconocida) $y(x)$ se supone continua. El concepto de la diferenciación requiere de la continuidad. El proceso numérico sustituye esta continuidad por los conjuntos discretos. Se considera a x en

$$x_0, \qquad x_0 + h, \qquad x_0 + 2h, \qquad x_0 + 3h, \qquad \text{etc.},$$

en donde h es cualquier intervalo pequeño. Cuanto menor sea h mejor la aproximación, al menos en principio. Sin embargo, cuando h es demasiado pequeño, las demandas que se aplican al tiempo de la máquina son excesivas y la precisión de hecho puede disminuir debido a los errores de redondeo acumulados. Habremos de referirnos a los valores discretos sucesivos de x como x_n, x_{n+1}, etc., y a los valores correspondientes de $y(x)$ como $y(x_n) = y_n$. Disponiendo de x_0 e y_0, el problema consiste en encontrar y_1, luego encontrar y_2 y así sucesivamente.

Método de Runge-Kutta. Considere la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d}{dx} y(x) = f(x, y) \tag{8.107}$$

en donde la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Utilizando el desarrollo de Taylor, y_1 podría aproximarse en la forma

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h\, y_0' \\ &= y_0 + h f(x_0, y_0), \end{aligned} \tag{8.108}$$

despreciando los términos de orden h^2.

El método de Runge-Kutta es un refinamiento de esto, con un error del orden de h^5. Las fórmulas de importancia son

$$y_{n+1} = y_n + [k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3]/6, \tag{8.109}$$

en donde

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(x_n, y_n), \\ k_1 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_0), \\ k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + h, y_n + k_2). \end{aligned} \tag{8.110}$$

Una derivación de estas ecuaciones aparece en el texto de Ralston y Wilf[1] (Capítulo 9 por M. J. Romanelli).

El método de Runge-Kutta es estable, significando con esto que los pequeños errores no se amplifican. Es de funcionamiento automático, significando con esto que una vez considerado x_0 e y_0 se puede proceder sin problemas. Sin embargo tiene sus desventajas. Se requiere de cuatro cálculos separados de $f(x, y)$ en cada etapa. Los errores, aun cuando son del orden de h^5 por etapa, son desconocidos. La solución numérica se comprueba separando h a la mitad y repitiendo el cálculo. Si el segundo resultado concuerda con el primero, entonces h fue lo suficientemente pequeño.

Finalmente, el método de Runge-Kutta puede ampliarse a un conjunto de ecuaciones de primer orden *acopladas:*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= f_1(x, u, v) \\ \frac{dv}{dx} &= f_2(x, u, v), \qquad \text{etc.,} \end{aligned} \tag{8.111}$$

con tantas variables *dependientes* como se requiera.

Métodos del Predictor-Corrector. A modo de un ataque alternativo de la Ec. 8.107, podríamos estimar o *predecir* un valor tentativo para y_{n+1} mediante

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= y_{n-1} + 2h\, y'_n \\ &= y_{n-1} + 2h\, f(x_n, y_n). \end{aligned} \tag{8.112}$$

Esto no es exactamente lo mismo que la Ec. 8.108. Más bien podría interpretarse como

$$y'_n \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}, \tag{8.113}$$

[1] *Mathematical Methods for Digital Computers,* A. Ralston, H. S. Wilf, eds. Nueva York: Wiley (1860).

la derivada como una tangente sustituida por una cuerda. A continuación *se calcula*

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}). \tag{8.114}$$

Luego, para *corregir* por la crudeza de la Ec. 8.112, se considera

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(\bar{y}'_{n+1} + y'_n). \tag{8.115}$$

En este caso, la relación de diferencia finita $\Delta y/h$ se aproxima por medio del promedio de dos derivadas. Esta técnica —una predicción seguida por una corrección (y la repetición hasta lograr la concordancia)— constituye el corazón del método del predictor-corrector. Es de hacerse notar que el conjunto de ecuaciones anteriores solamente se ha establecido como ilustración del método del predictor-corrector. La precisión de este conjunto (hasta el orden h^3) normalmente es inadecuada.

La repetición (sustitución de y_{n+1} de la Ec. 8.115 de nuevo en la Ec. 8.114 y la reutilización hasta que y_{n+1} adquiere cierto límite) requiere de tiempo en una operación de máquina computadora. En consecuencia, la repetición normalmente se sustituye por una etapa intermedia (el *modificador*) entre las Ecs. 8.112 y 8.114.

Este método del predictor-corrector modificado tiene la ventaja principal con respecto al método de Runge-Kutta de que solo requiere de dos cómputos de $f(x, y)$ por etapa en lugar de cuatro. Desafortunadamente, el método desarrollado originalmente no era estable: los errores pequeños (de redondeo y de truncamiento) tendían a propagarse y amplificarse.

Este problema bastante serio de inestabilidad ha sido eliminado en una versión del método del predictor-corrector establecido por Hamming. Las fórmulas (que se implican en una forma moderada), una derivación parcial, y las instrucciones detalladas para obtener las soluciones se pueden encontrar en la obra de Ralston (Capítulo 8, Ralston y Wilf). El método de Hamming es preciso hasta el orden de h^4. Es estable para todos los valores razonables de h y proporciona un estimado del error. A diferencia del método de Runge-Kutta, *no* es de funcionamiento automático. Por ejemplo, la Ec. 8.112 requiere tanto de y_{n-1} como de y_n. Los valores de partida (y_0, y_1, y_2, y_3) para el método del predictor-corrector de Hamming pueden calcularse mediante la solución en forma de serie (serie de potencias para x pequeña, serie asintótica para x grande) o mediante el método de Runge-Kutta.

El método del predictor-corrector de Hamming puede emplearse para abarcar un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas, es decir la Ec. 8.111.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden. Cualquier ecuación diferencial de segundo orden

$$y''(x) + P(x)\,y'(x) + Q(x)\,y(x) = F(x), \tag{8.116}$$

se puede separar en dos ecuaciones diferenciales de primer orden al establecer

$$y'(x) = z(x), \tag{8.117}$$

y luego

$$z'(x) + P(x)\,z(x) + Q(x)\,y(x) = F(x). \tag{8.118}$$

Estas ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas se pueden resolver ya sea mediante la técnica del predictor-corrector de Runge-Kutta o de Hamming descritas antes.

Cuando la ecuación diferencial de segundo orden se puede establecer en la forma[1]

$$y''(x) + f(x)\,y(x) = g(x), \tag{8.119}$$

se dispone de una gran diversidad de métodos para la integración numérica. El método de Numerov es de particular utilidad.[2]

REFERENCIAS

BATEMAN, H., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics.* Nueva York: Dover (1944; primera edición, 1932). Una gran diversidad de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales en la física clásica. Excelentes ejemplos acerca del uso de los distintos sistemas coordenados —elipsoidales, paraboidales, toroidales, coordenados— y así sucesivamente.

HAMMING, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers.* Nueva York: McGraw-Hill (1962).

INCE, E. L., *Ordinary Differential Equations.* Nueva York: Dover (1926). Un trabajo clásico relacionado con la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

MURPHY, G. M., *Ordinary Differential Equations and Their Solutions.* Princeton, Nueva Jersey: Van Nostrand (1960). Un tratado completo y de lectura relativamente sencilla de las ecuaciones diferenciales ordinarias, tanto lineales como no lineales.

RALSTON, A. y H. WILF, Eds., *Mathematical Methods for Digital Computers.* Nueva York: Wiley (1960).

[1] La ecuación de onda de Schrödinger se puede establecer en esta forma (cf. Ejercicio 8.5.7).

[2] D. R. Hartree, *The Calculation of Atomic Structures,* Capítulo 4, Nueva York: Wiley (1957).

$$\mathscr{L}u = \mathscr{L}u = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)\,u(x)$$

$$\mathscr{L}u(x) + \lambda\, w(x)\, u(x) = 0.$$

CAPITULO 9

TEORIA DE STURM-LIOUVILLE. FUNCIONES ORTOGONALES

9.1 Ecuaciones Diferenciales de Unión Independiente o Autoadjuntas

En el Capítulo 8 se estudiaron, clasificaron y resolvieron las ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales correspondientes a los operadores diferenciales de segundo orden lineales de la forma general

$$\mathscr{L}\, u(x) = p_0(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x) + p_1(x)\frac{d}{dx}u(x) + p_2(x)\,u(x). \tag{9.1}$$

Las *funciones* $p_0(x)$, $p_1(x)$, y $p_2(x)$ no deben confundirse con las constantes p_i de la Sección 8.5. De acuerdo con la Ec. 8.51, esta indica que $P(x) = p_1(x)/p_0(x)$ y $Q(x) = p_2(x)/p_0(x)$.

Estos coeficientes, $p_0(x)$, $p_1(x)$, y $p_2(x)$ son funciones reales de x y sobre la región de interés, $a \le x \le b$, las primeras $2 - i$ derivadas de $p_i(x)$ son continuas. Asimismo, $p_0(x)$ no desaparece para $a < x < b$. Ahora bien, los ceros para $p_0(x)$ son puntos singulares (Sección 8.3) y el establecimiento anterior simplemente significa que el intervalo se selecciona de tal modo que el intervalo $[a, b]$ no tenga puntos singulares en el interior del intervalo. Pueden y frecuentemente se tienen puntos singulares en los límites.

En la teoría matemática de las ecuaciones diferenciales es conveniente definir un *operador adjunto*[1] $\bar{\mathscr{L}}$ por medio de

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{L}}u &= \frac{d^2}{dx^2}[p_0u] - \frac{d}{dx}[p_1u] + p_2u \\ &= p_0\frac{d^2u}{dx^2} + (2p_0' - p_1)\frac{du}{dx} + (p_0'' - p_1' + p_2)u.\end{aligned} \tag{9.2}$$

[1] El operador *adjunto* tiene cierta relación más o menos forzosa con la matriz *adjunta*. Una mejor justificación para esta nomenclatura se puede encontrar en la comparación del operador *autoadjunto* (además de las condiciones limitantes apropiadas) con la matriz *autoadjunta*. Las propiedades significativas se desarrollan en la Sección 9.2. Es justamente debido a estas propiedades que estamos interesados en los operadores *autoadjuntos*.

En una comparación de las Ecs. 9.1 y 9.2, la condición necesaria y suficiente de que $\mathscr{L} = \bar{\mathscr{L}}$ es que

$$p_0'(x) = \frac{dp_0(x)}{dx} = p_1(x). \tag{9.3}$$

Cuando esta condición se satisface

$$\bar{\mathscr{L}}u = \mathscr{L}u = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + q(x)\,u(x) \tag{9.4}$$

y se dice que el operador $\mathscr{L}$ es *autoadjunto*. Aquí, para el caso autoadjunto, $p_0(x)$ se sustituye por $p(x)$ y $p_2(x)$ por $q(x)$ para evitar los subíndices innecesarios.

Mediante el estudio de las ecuaciones diferenciales introducidas en la Sección 8.2, la ecuación de Legendre y la ecuación del oscilador lineal son autoadjuntas, pero otras tal como las ecuaciones de Laguerre y Hermite no lo son. Sin embargo, la teoría de las ecuaciones diferenciales autoadjuntas de segundo orden lineales es perfectamente general debido a que *siempre* se puede transformar el operador no autoadjunto en la forma autoadjunta requerida. Considere la Ec. 9.1 con $p_0' \neq p_1$. Si se multiplica por $\mathscr{L}$[1]

$$\frac{1}{p_0(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]$$

se obtiene

$$\frac{1}{p_0(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]\mathscr{L}\,u(x) = \frac{d}{dx}\left\{\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]\frac{du(x)}{dx}\right\}$$
$$+\frac{p_2(x)}{p_0(x)}\cdot\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]u, \tag{9.5}$$

lo cual evidentemente es autoadjunto. Observe el término $p_0(x)$ en el denominador. A esto se debe el requerimiento de que $p_0(x) \neq 0$, $a < x < b$. En el siguiente desarrollo, se supone que $\mathscr{L}$ ha sido establecida en la forma autoadjunta.

Funciones de Valor Propio, Valores Propios. Formemos la ecuación diferencial

$$\mathscr{L}u(x) + \lambda\, w(x)\, u(x) = 0. \tag{9.6}$$

[1] Si se multiplica $\mathscr{L}$ por $f(x)/p_0(x)$ y luego se requiere que

$$f'(x) = \frac{fp_1}{p_0},$$

de modo que el nuevo operador sea autoadjunto, se obtiene

$$f(x) = \exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right]$$

Aquí, λ es una constante y $w(x)$ es una función conocida de x, denominada función ponderada o de densidad. El significado de estas denominaciones aparecerá en secciones subsecuentes. Se requiere que $w(x) > 0$ excepto, posiblemente, en puntos aislados en que $w(x) = 0$. Para una determinada selección del parámetro λ, la función $u_\lambda(x)$, que satisface la Ec. 9.6 *y las condiciones limitantes impuestas* se denomina *función propia* correspondiente a λ. La constante λ se denomina *valor propio.* No existe ninguna garantía de que una función propia $u_\lambda(x)$ exista para una selección arbitraria del parámetro λ. De hecho, el requisito de que sea una función propia restringe los valores aceptables de λ a un conjunto discreto. En este caso, se tiene un procedimiento matemático de aproximación al proceso de cuantificación en la mecánica cuántica.

EJEMPLO 9.1.1. ECUACION DE LEGENDRE

La ecuación de Legendre está dada por

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0. \tag{9.7}$$

De acuerdo con las Ecs. 9.1 y 9.6

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 - x^2 = p \qquad & w(x) &= 1, \\ p_1(x) &= -2x = p' \qquad & \lambda &= n(n + 1), \\ p_2(x) &= 0 = q. \end{aligned} \tag{9.8}$$

TABLA 9.1

Ecuación	$p(x)$	$q(x)$	λ	$w(x)$
Legendre	$1 - x^2$	0	$l(l + 1)$	1
Asociada de Legendre	$1 - x^2$	$-m^2/(1 - x^2)$	$l(l + 1)$	1
Chebyshev I	$(1 - x^2)^{1/2}$	0	n^2	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Chebyshev II	$(1 - x^2)^{3/2}$	0	$n(n + 2)$	$(1 - x^2)^{1/2}$
Bessel	x	$-\dfrac{n^2}{x}$	a^2	x
Laguerre	xe^{-x}	0	α	e^{-x}
Asociada de Laguerre	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$\alpha - k$	$x^k e^{-x}$
Hermite	e^{-x^2}	0	2α	e^{-x^2}
Oscilador armónico simple[a]	1	0	ω^2	1

[a]Esto forma la base del Capítulo 14, Series de Fourier.

El lector recordará que las soluciones en serie de la ecuación de Legendre (Sección 8.4)[1] divergen a menos de que n se restrinja a uno de los números enteros. Esto representa una cuantificación del parámetro λ.

Cuando las ecuaciones del Capítulo 8 se transforman al modelo autoadjunto, se encuentran los siguientes valores de los coeficientes y parámetros (Tabla 9.1).

El coeficiente $p(x)$ es el coeficiente de la segunda derivada de la función de valor propio y afortunadamente puede identificarse sin ninguna dificultad. El valor propio λ es el parámetro o función del parámetro que se encuentra disponible [en un término de la forma $\lambda\, w(x)\, y(x)$]. Cualquier dependencia de x aparte de la función propia se transforma en la función ponderatriz de $w(x)$. Si se tiene otro término que contiene la función propia (no las derivadas), el coeficiente de la función propia en el término adicional se identifica como $q(x)$. En caso de que no se tenga la presencia de tal término, $q(x)$ es simplemente cero.

EJEMPLO 9.1.2. DEUTERON

El conocimiento más profundo de los conceptos de la función propia y los valores propios lo puede proporcionar el modelo extremadamente simple del deuterón. La interacción nuclear neutrón-protón se representa por medio de un potencial en pozo cuadrado: $V = V_0 < 0$ para $0 \leqslant r < a$, $V = 0$ para $r > a$. La ecuación de onda de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi. \tag{9.9}$$

Con $\psi = \psi(r)$, se puede indicar $u(r) = r\psi(r)$, y utilizando el Ejercicio 2.4.15, la ecuación de onda se transforma en

$$\frac{d^2u}{dr^2} + k_1^2 u = 0, \tag{9.10}$$

con

$$k_1^2 = \frac{2M}{\hbar^2}(E - V_0) > 0 \tag{9.11}$$

para el intervalo interior, $0 \leqslant r < a$. Para $a < r < \infty$, se tiene

$$\frac{d^2u}{dr^2} - k_2^2 u = 0 \tag{9.12}$$

con

$$k_2^2 = -\frac{2ME}{\hbar^2} > 0. \tag{9.13}$$

[1] Cf. también las Secciones 5.2 y 12.10.

De acuerdo con la condición limitante de que ψ permanezca finito, $u(0) = 0$ y

$$u_1(r) = \operatorname{sen} k_1 r, \qquad 0 \leqslant r < a. \tag{9.14}$$

En el intervalo fuera del pozo de potencial, se tiene una combinación lineal de dos exponenciales,

$$u_2(r) = A \exp k_2 r + B \exp(-k_2 r), \qquad a < r < \infty. \tag{9.15}$$

La continuidad de la densidad de partícula y la corriente requieren que $u_1(a) = u_2(a)$ y que $u_1'(a) = u_2'(a)$. Las *condiciones de acoplamiento* proporcionan

$$\operatorname{sen} k_1 a = A \exp k_2 a + B \exp(-k_2 a), \tag{9.16}$$

$$k_1 \cos k_1 a = k_2 A \exp k_2 a - k_2 B \exp(-k_2 a).$$

La condición de que realmente se tiene una combinación protón-neutrón es que $\int \psi^* \psi \, d\tau = 1$. Esta limitación puede satisfacerse si se impone la condición limitante de que $\psi(r)$ permanece finita a medida que $r \to \infty$. A su vez, esto significa que $A = 0$. Dividiendo el par anterior de ecuaciones

$$\tan k_1 a = -\frac{k_1}{k_2} = -\sqrt{\frac{E - V_0}{-E}}, \tag{9.17}$$

una ecuación de gran importancia para la energía E que solamente tiene soluciones *discretas*. Si E es tal que la Ec. 9.17 puede satisfacerse, nuestras soluciones $u_1(r)$ y $u_2(r)$ pueden satisfacer las condiciones limitantes. Si la Ec. 9.17 no se satisface, *no existe una solución aceptable*. Los valores de E para los cuales la Ec. 9.17 se satisface son los valores propios; las fun-

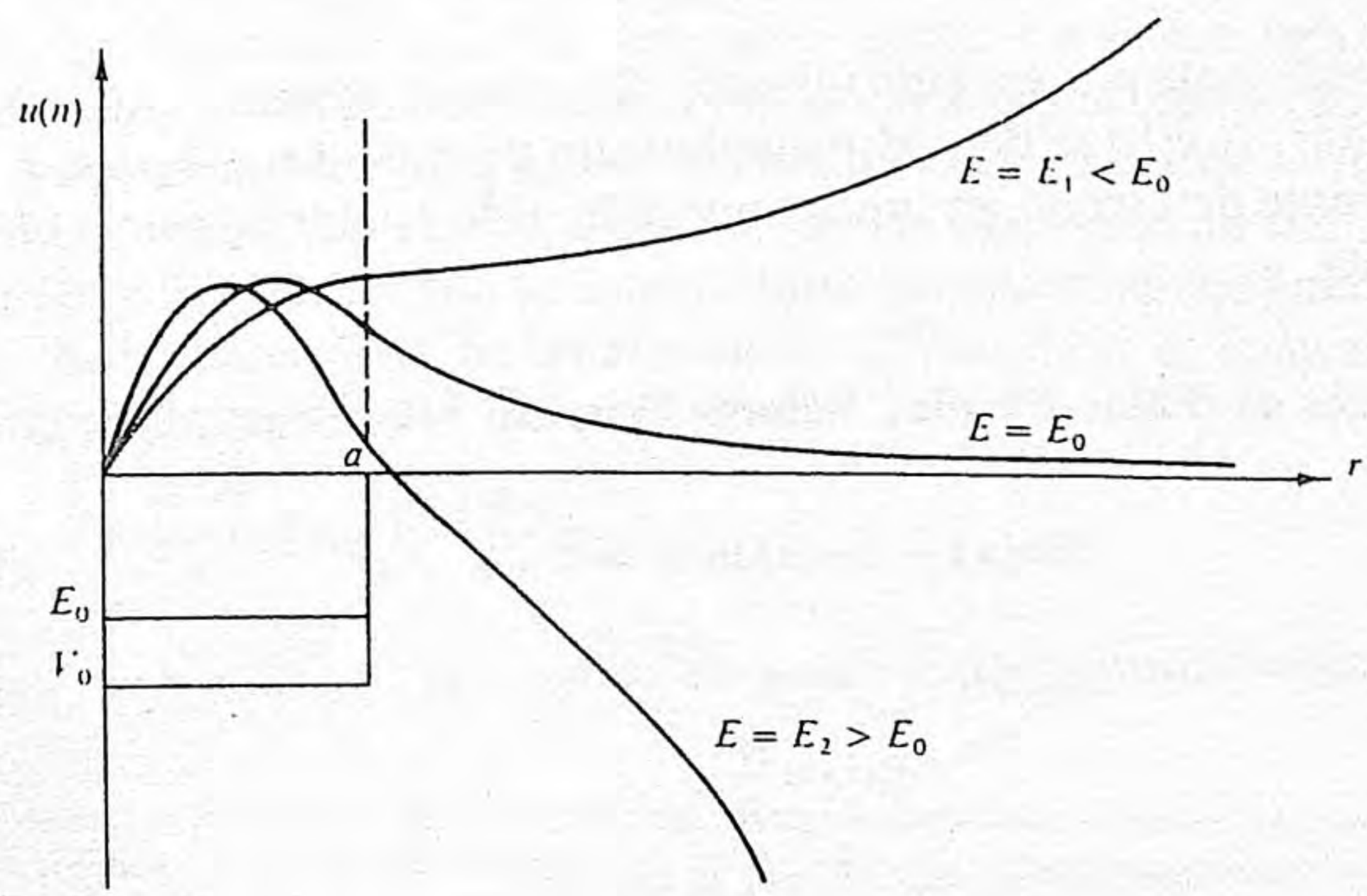


Fig. 9.1 Función propia del deuterón.

ciones correspondientes u_1 y u_2 (o ψ) son las funciones propias. Para el problema real del deuterón, solamente existe un (y tan solo uno) valor propio de E que satisface la Ec. 9.17, es decir el deuterón solamente tiene un estado ligado.

Ahora bien, ¿qué sucede si E *no* satisface la Ec. 9.17, si E no es un valor propio? En forma gráfica, imagine que E y consecuentemente k_1 se hacen variar ligeramente.

Para $E = E_1 < E_0$, k_1 se reduce y sen $k_1 a$ no ha disminuido tanto. Las condiciones de acoplamiento, Ecs. 9.16, requieren que $A > 0$ y que la función de onda pase a $+\infty$, exponencialmente. Para $E = E_2 > E_0$, k_1 es mayor, sen $k_1 a$ alcanza un máximo más pronto y desciende con mayor rapidez a $r = a$. Las condiciones de acoplamiento requieren que $A < 0$, y la función de onda pasa a $-\infty$, exponencialmente. Solamente para $E = E_0$, un valor popio, la función de onda tiene el comportamiento asintótico exponencial negativo que se requiere.

Condiciones Limitantes. En la definición anterior de la función propia, se hizo notar que la función propia $u_\lambda(x)$ se requería para satisfacer ciertas condiciones limitantes impuestas. Estas condiciones limitantes pueden tomar tres formas:

1. Condiciones limitantes de Cauchy. El valor de una función y la derivada normal especificada en los límites. En electrostática, esto significaría φ, el potencial, y E_n los componentes normales del campo eléctrico.

2. Condiciones limitantes de Dirichlet. El valor de una función especificada en los límites.

3. Condiciones limitantes de Neumann. La derivada normal (gradiente normal) de una función especificada en los límites. En el caso electrostático, esto correspondería a E_n y consecuentemente σ, la densidad de carga superficial.

En la Tabla 9.2 se proporciona un resumen de la relación entre los tres tipos de ecuación diferencial parcial bidimensional. Para una descripción más detallada de las ecuaciones diferenciales parciales, el lector puede consultar la obra de Sommerfeld, Capítulo 2, o la obra de Morse y Feshbach, Capítulo 6.

Partes de la Tabla 9.2 constituyen solamente un asunto de mantener la consistencia interna con sentido común. Por ejemplo, para la ecuación de Poisson con una superficie cerrada, las condiciones de Dirichlet originan una solución única, estable. Las condiciones de Neumann, independientemente de las condiciones de Dirichlet, originan de manera similar una solución estable única independiente de la solución de Dirichlet. En consecuencia, las condiciones limitantes de Cauchy (significando con esto Dirichlet más Neumann) pueden dar lugar a una inconsistencia.

El término condiciones limitantes incluye como caso especial el concepto de las condiciones iniciales. Por ejemplo, al especificar la posición

TABLA 9.2

Condiciones limitantes	Tipo de ecuación diferencial parcial		
	Elíptica	Hiperbólica	Parabólica
	Laplace, Poisson en (x, y)	Ecuación de onda en (x, t)	Ecuación de difusión en (x, t)
Cauchy			
Superficie abierta	Resultados no físicos (inestabilidad)	*Solución única, estable*	Demasiado limitante
Superficie cerrada	Demasiado limitante	Demasiado limitante	Demasiado limitante
Dirichlet			
Superficie abierta	Insuficiente	Insuficiente	*Solución única, estable en* una dirección
Superficie cerrada	*Solución única, estable*	Solución no única	Demasiado limitante
Neumann			
Superficie abierta	Insuficiente	Insuficiente	*Solución única, estable* en una dirección
Superficie cerrada	*Solución unica, estable*	Solución no única	Demasiado limitante

inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 en algún problema dinámico esto correspondería a las condiciones limitantes de Cauchy. La única diferencia en el uso actual de las condiciones limitantes en estos problemas unidimensionales es que se aplican las condiciones en *ambos* extremos del intervalo permisible de la variable.

Normalmente, las condiciones limitantes en una de las tres formas garantizan que en los extremos de nuestro intervalo (es decir, en los límites) desaparezcan los siguientes productos:

$$p(x)\,u(x)\,\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=a} = 0$$

y

$$p(x)\,u(x)\,\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=b} = 0\,. \tag{9.18}$$

Aquí $u(x)$ es una solución de la ecuación diferencial particular (9.6) considerada. Sin embargo, existe la posibilidad de trabajar con un conjunto menos restrictivo de las condiciones limitantes,

$$vpu'|_{x=a} = vpu'|_{x=b}\,, \tag{9.19}$$

en donde $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial correspondiente a los mismos o a diferentes valores propios.

De modo anticipado a las aplicaciones en la mecánica cuántica, consideremos la posibilidad de que la Ec. 9.6 pueda tener soluciones complejas, $u(x)$ y $v(x)$. Se sustituye la Ec. 9.19 con la condición limitante compleja

$$v^* pu'|_{x=a} = v^* pu'|_{x=b}, \tag{9.20}$$

en donde v^* es el conjugado complejo de $v(x)$. Evidentemente, si $v(x)$ es real, $v = v^*$ y la Ec. 9.20 se reduce a la Ec. 9.19. Antes de considerar que el coeficiente $p_0(x)$ es real, la condición limitante igualmente podría establecerse como el conjugado complejo de la Ec. 9.20

$$vpu^{*\prime}|_{x=a} = vpu^{*\prime}|_{x=b}. \tag{9.21}$$

Finalmente, ya que $u(x)$ y $v(x)$ se van a considerar como dos soluciones cualesquiera, se intercambian u y v y se obtiene

$$v^{*\prime} pu|_{x=a} = v^{*\prime} pu|_{x=b} \tag{9.22}$$

y su conjugado complejo.

Operadores Hermitianos. Ahora podemos demostrar una propiedad importante de la combinación operador diferencial de segundo orden autoadjunto (Ec. 9.6) más las soluciones que satisfacen las condiciones limitantes establecidas por las Ecs. 9.20 y 9.22.

Mediante la integración en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ se obtiene

$$\int_a^b v^* \mathscr{L} u \, dx = \int_a^b v^*(pu')' \, dx + \int_a^b v^* qu \, dx \tag{9.23}$$

utilizando la Ec. 9.4. Por medio de la integración por partes se tiene

$$\int_a^b v^*(pu')' \, dx = v^* pu' \Big|_a^b - \int_a^b v^{*\prime} pu' \, dx. \tag{9.24}$$

La parte integrada desaparece por aplicación de las condiciones limitantes (Ec. 9.20). La integración de la parte restante, por partes, una segunda vez da como resultado

$$-\int_a^b v^{*\prime} pu' \, dx = -v^{*\prime} pu \Big|_a^b + \int_a^b u(pv^{*\prime})' \, dx. \tag{9.25}$$

Nuevamente, la parte integrada desaparece por aplicación de la Ec. 9.22. La combinación de las Ecs. 9.23-9.25 origina

$$\int_a^b v^* \mathscr{L} u \, dx = \int_a^b u \mathscr{L} v^* \, dx. \tag{9.26}$$

Esta propiedad, establecida por la Ec. 9.26, se expresa diciendo que el operador $\mathscr{L}$ es un hermitiano con respecto a las funciones $u(x)$ y $v(x)$ que satisfacen las condiciones limitantes especificadas por la Ec. 9.20.

EJEMPLO 9.1.3. SELECCIÓN DEL INTERVALO DE INTEGRACION, $[a,b]$

Para $\mathscr{L} = d^2/dx^2$ una ecuación de valor propio posible es

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + n^2 y(x) = 0, \tag{9.27}$$

con las funciones propias

$$u_n = \cos nx$$
$$v_m = \operatorname{sen} mx.$$

La Ec. 9.19 se transforma en

$$-n \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \,|_a^b = 0$$

o

$$m \cos mx \cos nx \,|_a^b = 0,$$

intercambiando u_n y v_m. Ya que sen mx y cos nx son periódicos con el período 2π (para n y m integral), la Ec. 9.19 se satisface evidentemente si $a = x_0$ y $b = x_0 + 2\pi$.

EJERCICIOS

9.1.1 Demuestre que la ecuación de Laguerre puede establecerse en la forma autoadjunta al multiplicar por e^{-x} y que $w(x) = e^{-x}$ es la función ponderatriz.

9.1.2 Demuestre que la ecuación de Hermite puede establecerse en la forma autoadjunta al multiplicar por e^{-x^2} y que esto proporciona $w(x) = e^{-x^2}$ con la función de densidad apropiada.

9.1.3 Demuestre que la ecuación de Chebyshev (tipo I) puede establecerse en la forma autoadjunta al multiplicar por $(1 - x^2)^{-1/2}$ y que esto proporciona $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ como la función de densidad adecuada.

9.1.4 Demuestre lo siguiente cuando la ecuación diferencial de segundo orden se expresa en la forma autoadjunta:

(a) El wronskiano es igual a una constante dividida entre el coeficiente inicial p.

$$W = \frac{C}{p}$$

(b) Una segunda solución está dada por

$$y_2(x) = C\, y_1(x) \int^x \frac{dt}{p[y_1(t)]^2}.$$

9.1.5 $U_n(x)$, el polinomio de Chebyshev (tipo II) satisface la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)\, U''_n(x) - 3x\, U'_n(x) + n(n + 2)\, U_n(x) = 0.$$

(a) Localice los puntos singulares que aparecen en el plano *finito* y demuestre el que sean regulares o irregulares.
(b) Establezca esta ecuación en la forma autoadjunta.
(c) Identifique el valor propio completo.
(d) Identifique la función ponderatriz.
(e) Establezca una integral de ortogonalidad para $U_n(x)$ y $U_m(x)$, $n \neq m$.

9.1.6 Para el caso muy especial $\lambda = 0$ y $q(x) = 0$, la ecuación de valor propio autoadjunta se transforma en

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] = 0,$$

satisfecha por

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{p(x)}.$$

Utilice esto para obtener una segunda solución de lo siguiente:
(a) ecuación de Legendre
(b) ecuación de Laguerre
(c) ecuación de Hermite

Respuesta. (a) $u_2(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,

(b) $u_2(x) - u_2(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^t \frac{dt}{t}$,

(c) $u_2(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$:

Esta segunda solución ilustra el comportamiento divergente que normalmente se encuentra en la segunda solución.

9.1.7 Considerando que $\mathscr{L}u = 0$ y que $g\mathscr{L}u$ es autoadjunta, demuestre que para el operador adjunto $\overline{\mathscr{L}}$, $\overline{\mathscr{L}}(gu) = 0$.

9.1.8 Demuestre que si una función ψ se requiere para satisfacer la ecuación de Laplace en una región finita del espacio y para satisfacer las condiciones limitantes de Dirichlet sobre toda la superficie limitante cerrada, entonces ψ es única.
Sugerencia: Una de las formas del teorema de Green, Sección 1.11 es de utilidad.

9.2 Operadores Hermitianos (Autoadjuntos)

Los operadores hermitianos o autoadjuntos tienen tres propiedades que son de suma importancia en la física, tanto clásica como cuántica.

1. Los valores propios de un operador hermitiano son reales.
2. Las funciones propias de un operador hermitiano son ortogonales.
3. Las funciones propias de un operador hermitiano forman un conjunto completo.[1]

[1] Esta tercera propiedad no es universal. *No* es consistente para nuestros operadores lineales diferenciales de segundo orden en la forma de Sturm-Liouville (autoadjunta).

Valores Propios Reales. Procederemos a demostrar las dos primeras propiedades. Sea

$$\mathscr{L}u_i + \lambda_i w u_i = 0, \tag{9.28}$$

Asumiendo la existencia de un segundo valor propio

$$\mathscr{L}u_j + \lambda_j w u_j = 0, \tag{9.29}$$

complejo conjugado

$$\mathscr{L}u_j^* + \lambda_j^* w u_j^* = 0. \tag{9.30}$$

Aquí, $\mathscr{L}$ es un operador real (p y q son funciones reales de x) y $w(x)$ es una función real. Sin embargo, se permite que λ_k, los valores propios, y u_k, las funciones propias, sean complejos. Multiplicando la Ec. 9.28 por u_j^* y la Ec. 9.30 por u_i y luego restando, se tiene

$$u_j^* \mathscr{L} u_i - u_i \mathscr{L} u_j^* = (\lambda_j^* - \lambda_i) w u_i u_j^* \tag{9.31}$$

Se integra en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\int_a^b u_j^* \mathscr{L} u_i \, dx - \int_a^b u_i \mathscr{L} u_j^* \, dx = (\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b u_i u_j^* w \, dx. \tag{9.32}$$

Ya que $\mathscr{L}$ es hermitiano, el lado izquierdo desaparece mediante la Ec. 9.26 y

$$(\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b u_i u_j^* w \, dx = 0. \tag{9.33}$$

Si $i = j$, la integral no puede desaparecer [$w(x) > 0$, aparte de los puntos aislados], excepto en el caso trivial $u_i = 0$. En consecuencia, el coeficiente $(\lambda_i^* - \lambda_i)$ debe ser cero,

$$\lambda_i^* = \lambda_i, \tag{9.34}$$

lo cual es un enunciado matemático de que el valor propio es real. Ya que λ_i puede representar cualquiera de los valores propios, esto demuestra la primera propiedad. Esto constituye un análogo exacto de la naturaleza de los valores propios de las matrices simétricas (y hermitianas) reales o verdaderas (cf. Sección 4.6).

Esta realidad de los valores propios de los operadores hermitianos tiene un significado fundamental en la mecánica cuántica. En la mecánica cuántica, los valores propios corresponden a cantidades que pueden medirse con precisión, tal como el momento angular y la energía. Con la teoría formulada en términos de los operadores hermitianos, esta demostración de la realidad de los valores propios garantiza que la teoría puede predecir los números reales para estas cantidades medibles físicamente.

Funciones Propias Ortogonales. Si consideramos $i \neq j$ y si $\lambda_i \neq \lambda_j$, la integral del producto de dos funciones propias diferentes debe desaparecer.

$$\int_a^b u_i u_j^* w \, dx = 0. \tag{9.35}$$

Esta condición, denominada ortogonalidad, es el análogo continuo de la desaparición de un producto escalar de dos vectores.[1] Se dice que las funciones propias $u_i(x)$ y $u_j(x)$ son ortogonales con respecto a la función ponderatriz $w(x)$ en el intervalo $[a, b]$. La Ec. 9.35 constituye una demostración parcial de la segunda propiedad de los operadores hermitianos. Nuevamente, es de hacerse notar la analogía precisa con el análisis de matrices. De hecho, se puede establecer una correspondencia uno a uno entre esta teoría de Sturm-Liouville de las ecuaciones diferenciales y el tratamiento de las matrices hermitianas. Históricamente, esta correspondencia ha sido significativa en el establecimiento de la equivalencia matemática de la mecánica de las matrices desarrollada por Heisenberg y la mecáncica de las ondas desarrollada por Schrödinger. Actualmente, los dos procedimientos diversos han emergido en la teoría de la mecánica cuántica y la formulación matemática que es más conveniente para un problema particular se utiliza para dicho problema. De hecho, las alternativas matemáticas no terminan aquí. Las ecuaciones integrales, Capítulo 16, forman un tercer procedimiento equivalente y algunas veces más conveniente y poderoso.

Esta demostración de la ortogonalidad no es lo suficientemente completa: Hay escapatoria, debido a que se puede tener $i \neq j$ pero aún tenemos $\lambda_i = \lambda_j$. Tal caso se denomina degenerado. Algunas ilustraciones de esta degeneración se indican al final de esta sección. Si $\lambda_i = \lambda_j$, la integral en la Ec. 9.33 no necesariamente desaparece. Esto significa que las funciones propias linealmente independientes correspondientes al mismo valor propio no son automáticamente ortogonales y que debe buscarse algún otro método para obtener un conjunto ortogonal. Aun cuando las funciones propias en este caso degenerado pudieran no ser ortogonales, siempre se puede lograr que sean ortogonales. En la siguiente sección se desarrolla un método para tal efecto.

En los capítulos posteriores se podrá observar que es justamente conveniente disponer de un conjunto de funciones ortogonales como lo es el hecho de disponer de un sistema coordenado ortogonal. Se puede trabajar con funciones que no sean ortogonales, pero es bastante probable que demuestren ser tan desordenadas como un sistema coordenado oblicuo.

La tercera propiedad, la plenitud, se define y describe en la Sección 9.4. La demostración formal, que implica el cálculo de las variaciones (cf. Capítulo 17), no se proporciona aquí. Para mayores detalles, el lector debe consultar la obra de Courant y Hilbert, Vol. I, o la obra de Titchmarsh.

[1] A partir de la definición de la integral de Riemann

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, g(x_i) \right) \Delta x,$$

en donde $x_0 = a$, $x_N = b$; y $x_i - x_{i-1} = \Delta x$. Si se interpreta $f(x_i)$ y $g(x_i)$ como los componentes i de un vector de N componentes, entonces esta suma (y consecuentemente su integral) corresponde directamente al producto escalar de vectores, Ec. 1.22. La desaparición del producto escalar es la condición de *ortogonalidad* de los vectores, o funciones.

EJEMPLO 9.2.1 SERIE DE FOURIER: ORTOGONALIDAD

Continuando el Ejemplo 9.1.3, la ecuación de valor propio, Ec. 9.27,

$$\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + n^2\, y(x) = 0,$$

probablemente describe una partícula mecánica cuántica en una caja, posiblemente una cuerda de violín vibrante con funciones propias (degeneradas), con nx, sen nx. eigenfunctions

Con n real (que aquí se considera integral), las integrales de ortogonalidad se transforman en

(a) $$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = C_n\, \delta_{nm},$$

(b) $$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = D_n\, \delta_{nm},$$

(c) $$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0.$$

Para un intervalo de 2π, el análisis anterior garantiza la delta de Kronecker en (a) y (b) pero no el cero en (c) debido a que (c) implica las funciones propias degeneradas. Sin embargo, la inspección demuestra que (c) siempre desaparece para todos los valores enteros de n y m.

La teoría de Sturm-Liouville no dice nada acerca de los valores de C_n y D_n. El cálculo verdadero proporciona

$$C_n = \begin{cases} \pi, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

$$D_n = \begin{cases} \pi, & n \neq 0, \\ 2\pi, & n = 0. \end{cases}$$

Estas integrales de ortogonalidad forman la base de la serie de Fourier desarrollada en el Capítulo 14.

EJEMPLO 9.2.2 DESARROLLO EN FUNCIONES PROPIAS ORTOGONALES: ONDA CUADRADA

La propiedad de la plenitud significa que ciertas clases de funciones (es decir, seccional o parcialmente continua) se pueden representar por medio de una serie de funciones propias ortogonales con cualquier grado de precisión deseado. Considere la onda cuadrada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{2}, & 0 < x < \pi, \\ -\dfrac{h}{2}, & -\pi < x < 0. \end{cases} \tag{9.36}$$

Esta función puede desarrollarse en cualquiera de una variedad de funciones propias: Lengendre, Hermite, Chebyshev, etcétera. La selección de la función propia se realiza con base en la conveniencia. Para ilustrar la técnica de desarrollo, seleccionemos las funciones propias del Ejemplo 9.2.1 anterior, cos nx y sen nx.

La serie de la función propia se establece convenientemente (y de manera convencional) en la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

De acuerdo con las integrales de ortogonalidad del Ejemplo 9.2.1, los coeficientes están definidos por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

La sustitución directa de $\pm h/2$ por $f(t)$ da como resultado

$$a_n = 0,$$

lo cual era de esperarse aquí debido a la antisimetría, y

$$b_n = \frac{h}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ \dfrac{2h}{n\pi}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

En este caso, el desarrollo de la función propia (Fourier) de la onda cuadrada es

$$f(x) = \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{(2n+1)}. \tag{9.37}$$

Ejemplos adicionales en que se utilizan otras funciones propias aparecen en los Capítulos 11 y 12.

El concepto de la degeneración ha sido introducido antes. Si N funciones propias linealmente independientes corresponden al mismo valor propio, se dice que este último es N-veces degenerado. Una ilustración particularmente simple la proporcionan los valores propios y las funciones propias de la ecuación del oscilador lineal, Ejemplo 9.2.1. Para cada valor del valor propio n, se tiene dos soluciones posibles: sen nx y cos nx (y cualquier combinación lineal). Se dice que las funciones propias son degeneradas o que el valor propio es degenerado.

Un ejemplo más involucrado lo proporciona el sistema físico de un electrón en un átomo (tratamiento no relativístico, se desprecia el spin). De acuerdo con la ecuación de Schrödinger, Ec. 13.53 para el hidrógeno, la energía total del electrón es el valor propio. Se puede designar E_{nLM} utilizando los números cuánticos n, L y M como subíndices. Para cada con-

junto distinto de números cuánticos (n, L, M) se tiene una función propia linealmente independiente distinta $\psi_{nLM}(r, \theta, \varphi)$. Para el hidrógeno, la energía E_{nLM} es independiente de L y M. Con $0 \leqslant L \leqslant n-1$ y $-L \leqslant M \leqslant L$, el valor propio es n^2 veces degenerado. (La incorporación del spin electrónico aumentaría esto a $2n^2$). En los átomos con más de un electrón, el potencial electrostático ya no es un potencial r^{-1} simple. La energía depende tanto de L como de n, aun cuando *no* de M. E_{nLM} es aun $(2L+1)$ veces degenerado. Esta degeneración se puede eliminar mediante la aplicación de un campo magnético externo, originando así el efecto de Zeeman.

EJERCICIOS

9.2.1 Las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son funciones propias del mismo operador hermitiano pero para valores propios distintos λ_1 y λ_2. Demuestre que $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son linealmente independientes.

9.2.2 (a) Demuestre que las primeras derivadas de los polinomios de Legendre satisfacen una ecuación diferencial autoadjunta con el valor propio $\lambda = n(n+1) - 2$.

(b) Demuestre que estas derivadas del polinomio de Legendre satisfacen una relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_m'(x)P_n'(x)(1-x^2)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Nota. En la Sección 12.5, $(1-x^2)^{1/2}P_n'(x)$ se denominará polinomio de Legendre asociado, $P_n^1(x)$.

9.2.3 Un conjunto de funciones $u_n(x)$ satisface la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u_n(x)\right] + \lambda_n w(x)u_n(x) = 0.$$

También satisfacen las condiciones limitantes apropiadas y tienen diferentes valores propios. En consecuencia, $u_m(x)$ y $u_n(x)$ son ortogonales. Demuestre que $du_m(x)/dx$ y $du_n(x)/dx$ también son ortogonales con $p(x)$ como función ponderatriz.

9.2.4 Una solución de la ecuación de Legendre, Ec. 9.7, es el polinomio $P_n(x)$. Una segunda solución, desarrollada en la Sección 12.10, se designa $Q_n(x)$. La integral del producto $P_n(x)Q_l(x)(n \neq l)$ sobre el intervalo de ortogonalidad $[-1, 1]$ *no* desaparece. Explique por qué la teoría de Sturm-Liouville no garántiza un valor de cero en este caso.

9.2.5 *No* siendo $\mathscr{L}$ autoadjunto

$$\mathscr{L}u_i + \lambda_i w u_i = 0$$

y

$$\overline{\mathscr{L}}v_j + \lambda_j w v_j = 0.$$

(a) Demuestre que

$$\int_a^b v_j \mathscr{L} u_i\,dx = \int_a^b u_i \overline{\mathscr{L}} v_j\,dx$$

considerando que

$$u_i p_0 v_j' \Big|_a^b = v_j p_0 u_i' \Big|_a^b$$

y

$$u_i (p_1 - p_0') v_j \Big|_a^b = 0.$$

(b) Demuestre que la integral de ortogonalidad para las funciones propias u_i y v_j se transforma en

$$\int_a^b u_i v_j w \, dx = 0 \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j).$$

9.3 Ortogonalización de Schmidt

Este método consiste en tomar un conjunto no ortogonal de funciones linealmente independientes[1] y literalmente construir un conjunto ortogonal en un intervalo arbitrario y con relación a un factor de densidad o de peso arbitrario. Aquí, por conveniencia, se supone que las funciones son reales. La generalización para el caso complejo no debe presentar grandes dificultades.

Hasta ahora no se ha especificado ninguna normalización. Esto significa que

$$\int_a^b \varphi_i^2 w \, dx = N_i^2,$$

pero no se ha dado ninguna atención al valor de N_i. Ya que nuestra ecuación básica (9.6) es lineal y homogénea, la solución se puede multiplicar por cualquier constante y aun así ser una solución. Ahora habremos de requerir que cada solución $\varphi_i(x)$ sea multiplicada por N_i^{-1} de modo que la nueva φ_i (normalizada) satisfaga

$$\int_a^b \varphi_i^2(x) \, w(x) \, dx = 1 \tag{9.38}$$

o

$$\int_a^b \varphi_i(x) \, \varphi_j(x) \, w(x) \, dx = \delta_{ij}. \tag{9.39}$$

La Ec. 9.38 indica que hemos normalizado a la unidad. Incluyendo la propiedad de la ortogonalidad, se tiene la Ec. 9.39. Se dice que las funciones que satisfacen esta ecuación son ortonormales (ortogonales más la normalización unitaria). Es de hacerse notar la posibilidad de otras nor-

[1] Tal conjunto de funciones se puede originar a partir de las soluciones de una ecuación diferencial (parcial) en que el valor propio es independiente de una o más constantes de separación. Como ejemplo, se tiene el problema del átomo de hidrógeno (Secciones 9.2 y 13.2). El valor propio (energía) es independiente tanto del momento angular orbital del electrón como de su proyección en el eje z, m. Sin embargo, el estudiante debe notar que el origen del conjunto de funciones no es de importancia para el procedimiento de ortogonalización de Schmidt.

malizaciones y de hecho, por convención histórica, ¡cada una de las funciones especiales de la física matemática que se tratan en los Capítulos 12 y 13 se normaliza de modo diferente!

Se consideran tres conjuntos de funciones: un conjunto original definido $u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; un conjunto ortogonalizado $\psi_n(x)$ por construir, y un conjunto final de funciones $\varphi_n(x)$ que son las ψ_n normalizadas. Las u_n originales pueden ser funciones propias degeneradas, aunque esto no es necesario. Se tendrá

$u_n(x)$	$\psi_n(x)$	$\varphi_n(x)$
linealmente independiente no ortogonal, sin normalizar	*linealmente independiente, ortogonal,* sin normalizar	*linealmente independiente, ortogonal, normalizada* (ortonormal)

El procedimiento de Schmidt consiste en considerar la enésima ψ función (ψ_n) para que sea $u_n(x)$ más una combinación lineal desconocida de las φ anteriores. La presencia de la nueva $u_n(x)$ garantiza la independencia lineal. El requisito de que $\psi_n(x)$ sea ortogonal para cada una de las φ anteriores proporciona las suficientes restricciones para determinar cada uno de los coeficientes desconocidos. Luego, los términos ψ_n totalmente determinados se pueden normalizar a la unidad, proporcionando $\varphi_n(x)$. Posteriormente se repite la secuencia de etapas para $\psi_{n+1}(x)$.

Comenzando con $n = 0$, sea

$$\psi_0(x) = u_0(x) \tag{9.40}$$

sin que existan términos φ anteriores de los cuales preocuparse. Normalizando,

$$\varphi_0(x) = \frac{\psi_0(x)}{[\int \psi_0^2 w\, dx]^{1/2}}. \tag{9.41}$$

Para $n = 1$, sea

$$\psi_1(x) = u_1(x) + a_{10}\varphi_0(x). \tag{9.42}$$

Se requiere que $\psi_1(x)$ sea ortogonal respecto a $\varphi_0(x)$. (En esta etapa, la normalización de $\psi_1(x)$ no es de importancia.) Este requerimiento origina

$$\begin{aligned}\int \psi_1 \varphi_0 w\, dx &= \int u_1 \varphi_0 w\, dx + a_{10} \int \varphi_0^2 w\, dx \\ &= 0.\end{aligned} \tag{9.43}$$

Ya que φ_0 se normaliza a la unidad (Ec. 9.41), se tiene

$$a_{10} = -\int u_1 \varphi_0 w\, dx, \tag{9.44}$$

fijando el valor de a_{10}. Normalizando, se define

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{(\int \psi_1^2 w\, dx)^{1/2}}. \tag{9.45}$$

Generalizando, se tiene

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{(\int \psi_i^2(x)\, w(x)\, dx)^{1/2}} \tag{9.46}$$

en donde

$$\psi_i(x) = u_i + a_{i0}\varphi_0 + a_{i,1}\varphi_1 + \cdots + a_{i,i-1}\varphi_{i-1}. \tag{9.47}$$

Los coeficientes a_{ij} están definidos por

$$a_{ij} = -\int u_i \varphi_j w\, dx. \tag{9.48}$$

Es de hacerse notar que aun cuando esta es una forma posible de construir un conjunto ortogonal u ortonormal, las funciones $\varphi_i(x)$ no son únicas. Existe un número infinito de conjuntos ortonormales posibles para cierto intervalo y una función de densidad establecida. Como ilustración de la libertad involucrada, considere dos vectores (no paralelos) $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ en el plano xy. Se puede normalizar $\mathbb{A}$ a la magnitud unitaria y luego formar $\mathbb{B}' = a\mathbb{A} + \mathbb{B}$ de modo que $\mathbb{B}'$ sea perpendicular a $\mathbb{A}$. Mediante la normalización de $\mathbb{B}'$ se ha completado la ortogonalización de Schmidt para dos vectores. Sin embargo, dos vectores unitarios perpendiculares cualesquiera tal como $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ podrían haberse seleccionado como el conjunto ortonormal. Nuevamente, con un número infinito de rotaciones posibles de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ alrededor del eje z, se tiene un número infinito de conjuntos ortonormales posibles.

EJEMPLO 9.3.1 POLINOMIOS DE LEGENDRE MEDIANTE LA ORTOGONALIZACION DE SCHMIDT

Procedamos a formar un conjunto ortornormal a partir de un conjunto de funciones $u_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ El intervalo es $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y la función de densidad es $w(x) = 1$.

De acuerdo con el procedimiento de ortogonalización de Schmidt descrito antes,

$$u_0 = 1 \qquad \text{y} \qquad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{9.49}$$

Siendo así,

$$\psi_1(x) = x + a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{9.50}$$

y

$$a_{10} = -\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{2}}\, dx = 0 \tag{9.51}$$

mediante simetría. Normalizando, se obtiene

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x. \tag{9.52}$$

Continuando con el procedimiento de Schmidt, se define

$$\psi_2(x) = x^2 + a_{20}\frac{1}{\sqrt{2}} + a_{21}\sqrt{\frac{3}{2}}\, x \tag{9.53}$$

en donde

$$a_{20} = -\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2}}\, dx = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \tag{9.54}$$

$$a_{21} = -\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, x^3\, dx = 0, \tag{9.55}$$

nuevamente por simetría. En consecuencia,

$$\psi_2(x) = x^2 - \tfrac{1}{3}, \tag{9.56}$$

y al normalizar a la unidad,

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \cdot \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1). \tag{9.57}$$

La siguiente función $\varphi_3(x)$ es

$$\varphi_3(x) = \sqrt{\tfrac{7}{2}} \cdot \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x). \tag{9.58}$$

Considerando como referencia el Capítulo 12, se tiene que

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x), \tag{9.59}$$

en donde $P_n(x)$ es el polinomio de Legendre de orden n. El procedimiento de Schmidt proporciona un método posible pero dificultoso de generar los polinomios de Legendre.

Polinomios Ortogonales. Este ejemplo particular ha sido seleccionado estrictamente para ilustrar el procedimiento de Schmidt. Aun cuando tiene la ventaja de introducir los polinomios de Legendre, las funciones iniciales $u_n = x^n$ no son funciones propias degeneradas y no constituyen soluciones de la ecuación de Legendre. Simplemente constituyen un conjunto de funciones que aquí han sido readaptadas para originar un conjunto ortonormal para el intervalo definido y la función ponderatriz definida. El hecho de que hayamos obtenido los polinomios de Legendre

no es precisamente magia negra sino más bien una consecuencia directa de la selección del intervalo y la función ponderatriz. El uso de $u_n(x) = x^n$ pero con otras selecciones del intervalo y la función ponderatriz origina otros conjuntos de polinomios ortogonales como se muestra en la Tabla 9.3. Estos polinomios se consideran en detalle en los Capítulos 12 y 13 como soluciones de las ecuaciones diferenciales particulares.

TABLA 9.3

Polinomios ortogonales generados por la ortogonalización de Schmidt de $u_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Polinomios	Intervalo	Función ponderatriz $w(x)$	Normalización estándar
Legendre	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	1	$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$
Chebyshev I	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\int_{-1}^{1} [T_n(x)]^2 (1-x^2)^{-1/2}\, dx = \begin{cases} \pi/2, & n \neq 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$
Chebyshev II	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$(1-x^2)^{1/2}$	$\int_{-1}^{1} [U_n(x)]^2 (1-x^2)^{1/2}\, dx = \frac{\pi}{2}$
Laguerre	$0 \leqslant x < \infty$	e^{-x}	$\int_{0}^{\infty} [L_n(x)]^2 e^{-x}\, dx = 1$
Laguerre asociada	$0 \leqslant x < \infty$	$x^k e^{-x}$	$\int_{0}^{\infty} [L_n^k(x)]^2 x^k e^{-x}\, dx = \frac{(n+k)!}{n!}$
Hermite	$-\infty < x < \infty$	e^{-x^2}	$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2}\, dx = 2^n \pi^{1/2} n!$

El examen de este procedimiento de ortogonalización revela dos características arbitrarias. Primeramente, como se ha hecho notar antes, no es necesaria la normalización de las funciones a la unidad. En el ejemplo anterior se podría haber requerido

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{nm}, \tag{9.60}$$

y el conjunto resultante habrían sido los polinomios de Lengendre verdaderos. En segundo lugar, el signo de φ_n siempre es indeterminante. En el ejemplo seleccionado, el signo ha sido seleccionado al requerir que el coeficiente de la potencia mayor de x en el polinomio fuera positivo. Para los polinomios de Laguerre, por otra parte, se habría de requerir que el coeficiente de la potencia mayor fuera $(-1)^n/n!$

EJERCICIOS

9.3.1 Aplique el procedimiento de Schmidt para formar los tres primeros polinomios de Laguerre

$$u_n(x) = x^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$0 \leqslant x < \infty,$$
$$w(x) = e^{-x}.$$

La normalización convencional es

$$\int_0^\infty L_m(x)\, L_n(x)\, e^{-x}\, dx = \delta_{mn}$$

Respuesta. $L_0 = 1,$
$L_1 = 1 - x,$
$L_2 = \dfrac{(2 - 4x + x^2)}{2}.$

9.3.2 Utilizando el procedimiento de ortogonalización de Schmidt, construya los tres polinomios de Hermite inferiores:

$$u_n(x) = x^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad -\infty < x < \infty, \qquad w(x) = e^{-x^2}.$$

Para este conjunto de polinomios, la normalización usual es

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\, H_n(x)\, w(x)\, dx = \delta_{mn} 2^m m! \pi^{1/2}.$$

Respuesta. $H_0 = 1,$
$H_1 = 2x,$
$H_2 = 4x^2 - 2.$

9.3.3 Utilice el esquema de ortogonalización de Schmidt para construir los tres primeros polinomios de Chebyshev (tipo I).

$$u_n(x) = x^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}.$$

Considere la normalización

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\, T_n(x)\, w(x)\, dx = \delta_{mn} \begin{cases} \pi, & m = n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \geqslant 1. \end{cases}$$

Sugerencia. Las integrales necesarias se proporcionan en el Ejercicio 10.4.3.

Respuesta. $T_0 = 1,$
$T_1 = x,$
$T_2 = 2x^2 - 1,$
$(T_3 = 4x^3 - 3x).$

9.3.4 Utilice el esquema de ortogonalización de Schmidt para construir los tres primeros polinomios de Chebyshev (tipo II).

$$u_n(x) = x^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad w(x) = (1 - x^2)^{+1/2}.$$

Considere que la normalización es

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)\, U_n(x)\, w(x)\, dx = \delta_{mn} \frac{\pi}{2}.$$

Sugerencia.

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}x^{2n}\,dx = \frac{\pi}{2}\times\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+2)}, \qquad n=1,2,3\cdots$$

$$=\frac{\pi}{2}, \qquad n=0.$$

Respuesta. $U_0 = 1, \qquad U_1 = 2x, \qquad U_2 = 4x^2 - 1.$

9.3.5 Como una modificación del Ejercicio 9.3.2, aplique el procedimiento de ortogonalización de Schmidt al conjunto $u_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \leq x < \infty$. Considere que $w(x)$ es $\exp[-x^2]$. Encuentre los dos primeros polinomios que no desaparecen. Normalice de modo que el coeficiente de la potencia mayor de x sea la unidad. En el Ejercicio 9.3.2, el intervalo $(-\infty, \infty)$ origina los polinomios de Hermite. Estos ciertamente no son los polinomios de Hermite.

Respuesta. $\varphi_0 = 1.$
$\varphi_1 = x - \pi^{-1/2}$

9.3.6 Forme un conjunto ortogonal sobre el intervalo $0 \leqslant x < \infty$, utilizando $u_n(x) = e^{-nx}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Considere que el factor ponderatriz, $w(x)$, es la unidad. Estas funciones son soluciones de $u_n'' - n^2 u_n = 0$, lo cual evidentemente ya se encuentra en la forma de Sturm-Liouville (autoadjunta). ¿Por qué no garantiza la teoría de Sturm-Liouville la ortogonalidad de estas funciones?

9.4 Plenitud de las Funciones Propias

La tercera propiedad importante de un operador hermitiano consiste en que sus funciones propias forman un conjunto completo. Esta plenitud significa que cualquier función de comportamiento adecuado (al menos continua parcialmente) $F(x)$ se puede aproximar mediante una serie

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\varphi_n(x) \tag{9.61}$$

con cualquier grado deseado de precisión.[1] Es decir, el conjunto $\varphi_n(x)$ se denomina completo[2] cuando el límite del error medio cuadrático desaparece:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\left[F(x) - \sum_{n=0}^{m} a_n\,\varphi_n(x)\right]^2 w(x)\,dx = 0. \tag{9.62}$$

La demostración de que esto puede realizarse de hecho con las funciones propias del operador hermitiano la proporciona Titchmarsh así como Courant y Hilbert (Vol. I). Es de hacerse notar que nuestros operadores hermitianos en este caso son operadores lineales de segundo orden diferenciales en la forma autoadjunta.

[1] Si se tiene un conjunto finito, como en el caso de los vectores, la suma es sobre el número de miembros linealmente independientes del conjunto.

[2] Muchos autores utilizan el término cerrado en este caso.

En el lenguaje del álgebra lineal, se tiene un espacio lineal, un espacio de función. Las funciones ortogonales linealmente independientes $\varphi_n(x)$, forman la base de este espacio (de dimensiones infinitas). La Ec. 9.61 constituye un enunciado de que las funciones $\varphi_n(x)$ amplían este espacio lineal. Con el producto interior definido por la Ec. 9.64, nuestro espacio es el espacio de Hilbert.

La pregunta de la plenitud de un conjunto de funciones frecuentemente se determina mediante la comparación con una serie de Laurent, Sección 6.5. En la Sección 14.1 esto se realiza para la serie de Fourier, estableciendo así, la plenitud de la serie de Fourier. Para todos los polinomios ortogonales mencionados en la Sección 9.3, existe la posibilidad de encontrar un desarrollo de polinomio para cada potencia de z,

$$z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(z), \tag{9.63}$$

en donde $P_i(z)$ es el polinomio iésimo. Los Ejercicios 12.4.6, 13.1.6, 13.2.5 y 13.3.15 son ejemplos específicos de la Ec. 9.63. Utilizando la Ec. 9.63, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ se puede volver a expresar en términos de los polinomios en que se muestra la existencia del desarrollo polinomial. (Y existente, en su unicidad, Ejercicio 9.4.1.)

En la Ec. 9.61 los coeficientes de desarrollo a_m se pueden determinar mediante

$$a_m = \int_a^b F(x)\varphi_m(x)w(x)\,dx. \tag{9.64}$$

Esto se deriva de la multiplicación de la Ec. 9.61 por $\varphi_m(x)\,w(x)$ y la integración. De acuerdo con la ortogonalidad de las funciones propias, $\varphi_n(x)$, solamente queda el término emésimo. En este caso, se puede observar el valor de la ortogonalidad. La Ec. 9.64 se puede comparar con el producto escalar o interior de los vectores, Sección 1.3, y a_m interpretarse como la proyección emésima de la función $F(x)$.

Para una función conocida, $F(x)$, la Ec. 9.64 proporciona a_m como una integral *definida* que siempre puede evaluarse mediante una computadora si no es que analíticamente.

Para algunos ejemplos de los desarrollos de funciones propias particulares, véanse los siguientes: serie de Fourier, Sección 9.2 y Capítulo 14; desarrollos de Bessel y Fourier-Bessel, Sección 11.2; serie de Legendre, Sección 12.3; serie de Laplace, Sección 12.6; serie de Hermite, Sección 13.1; serie de Laguerre, Sección 13.2; y serie de Chebyshev, Sección 13.3.

Desigualdad de Bessel. Si el conjunto de funciones $\varphi_n(x)$ no forma un conjunto completo, debido posiblemente a que simplemente no se ha incluido el número infinito requerido de miembros de un conjunto infinito,

se origina la desigualdad de Bessel. Primeramente, considere el caso finito. Sea A un vector de n componentes,

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 a_1 + \mathbf{e}_2 a_2 + \cdots + \mathbf{e}_n a_n, \tag{9.65}$$

en donde $\mathbf{e}_i$ es un vector unitario y a_i es el componente correspondiente (proyección) de $\mathbf{A}$, es decir,

$$a_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{9.66}$$

Siendo así

$$\left(\mathbf{A} - \sum_i \mathbf{e}_i a_i\right)^2 \geqslant 0. \tag{9.67}$$

Si se procede a la suma sobre todos los componentes n, evidentemente la suma iguala a $\mathbf{A}$ por medio de la Ec. 9.65 y la igualdad es consistente. Sin embargo, cuando la suma no incluye todos los n componentes resulta la desigualdad. Mediante el desarrollo de la Ec. 9.67 y recordando que los vectores unitarios satisfacen una relación de ortogonalidad,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \tag{9.68}$$

se tiene

$$A^2 \geqslant \sum_i a_i^2. \tag{9.69}$$

Esta es la desigualdad de Bessel.

Para el caso de las funciones, se considera la integral

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_i a_i \varphi_i(x) \right]^2 w(x)\, dx \geqslant 0. \tag{9.70}$$

Este es el análogo continuo de la Ec. 9.67, permitiendo que $n \to \infty$ y sustituyendo la suma por la integración. Nuevamente, con el factor ponderador $w(x) > 0$ el integrando no es negativo. La integral desaparece mediante la Ec. 9.61 si se tiene un conjunto completo. De otro modo es positivo. Desarrollando el término al cuadrado se obtiene

$$\int_a^b [f(x)]^2 w(x)\, dx - 2 \sum_i a_i \int_a^b f(x)\, \varphi_i(x)\, w(x)\, dx + \sum_i a_i^2 \geqslant 0. \tag{9.71}$$

Aplicando la Ec. 9.64 se tiene

$$\int_a^b [f(x)]^2 w(x)\, dx \geqslant \sum_i a_i^2. \tag{9.72}$$

En consecuencia, la suma de los cuadrados de los coeficientes de desarrollo a_i es menor o igual que la integral ponderada de $[f(x)]^2$, siendo consistente la igualdad si y solamente cuando el desarrollo es exacto, es decir si el conjunto de funciones $\varphi_n(x)$ es un conjunto completo.

La desigualdad de Bessel tiene una diversidad de aplicaciones, incluyendo la demostración de la convergencia de la serie de Fourier.

Desigualdad de Schwarz. La desigualdad de Schwarz de uso frecuente es similar a la desigualdad de Bessel. Considere la ecuación cuadrática

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2(x + b_i/a_i)^2 = 0. \tag{9.73}$$

Si b_i/a_i = constante, c, entonces la solución es $x = -c$. Si b_i/a_i *no* es constante, todos los términos no pueden desaparecer simultáneamente para x real. Siendo así, la solución debe ser compleja. Desarrollando se encuentra que

$$x^2 \sum_i^n a_i^2 + 2x \sum_i^n a_i b_i + \sum_i^n b_i^2 = 0, \tag{9.74}$$

y ya que x es compleja (o $= -b_i/a_i$) la fórmula cuadrática para x[1] origina

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{9.75}$$

en que la igualdad es consistente cuando b_i/a_i es igual a una constante.

Una vez más, en términos de vectores se tiene

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 \cos^2 \theta \leqslant a^2 b^2, \tag{9.76}$$

en donde θ es el ángulo incluido.

La desigualdad de Schwarz para las funciones tiene la forma

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\, dx \int_a^b [g(x)]^2\, dx, \tag{9.77}$$

en que la igualdad es consistente si y solamente cuando $g(x) = \alpha f(x)$, en que α es una constante.

En la mecánica cuántica, $f(x)$ y $g(x)$ pudieran representar individualmente un estado o configuración de un sistema físico. Siendo así, la desigualdad de Schwarz garantiza que el producto interior $\int f(x)\, g(x)\, dx$ *existe*.

En la literatura de física avanzada, $\int f(x)\, g(x)\, dx$ normalmente se indica en la forma $\langle f, g\rangle$. Siendo así, la Ec. 9.77 aparece como

$$\langle f, g\rangle^2 \leqslant \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle.$$

[1] Con el discriminante $b^2 - 4ac$ negativo (o cero).

La Ec. 9.77 se puede derivar al considerar la ecuación

$$\int [\lambda f(x) + g(x)]^2 \, dx = 0 \tag{9.78}$$

y procediendo como en la Ec. 9.73 para un vector de n componentes.

Si $g(x)$ es una función propia normalizada, $\varphi_i(x)$, la Ec. 9.77 proporciona [aquí $w(x) = 1$]

$$a_i^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 \, dx, \tag{9.79}$$

un resultado que también se deriva de la Ec. 9.72.

Función Delta de Dirac. Nuestro conjunto ortonormal de funciones propias, $\varphi_n(x)$, proporciona otra representación interesante de la función delta de Dirac. Considere la suma

$$K(x, t) = K(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(t). \tag{9.80}$$

(Por conveniencia, se supone que $\varphi_n(x)$ ha sido vuelta a definir para incluir $[w(x)]^{1/2}$ si $w(x) \neq 1$.) Esta serie en la Ec. 9.80 de hecho no es convergente uniformemente, pero puede utilizarse como parte de un *integrando* en donde la integración subsecuente la convierte en convergente (cf. Sección 5.5).

Suponga que se forma la integral

$$\int F(t)K(x, t) \, dt,$$

en donde se supone que $F(t)$ se puede desarrollar en serie de funciones propias, $\varphi_p(t)$. Se obtiene

$$\begin{aligned} \int F(t)K(x, t) \, dt &= \int \sum_{p=0}^{\infty} a_p \, \varphi_p(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \, \varphi_n(t) \, dt \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} a_p \, \varphi_p(x) = F(x), \end{aligned} \tag{9.81}$$

en que los productos opuestos $\varphi_p\varphi_n$ $(n \neq p)$ desaparecen por ortogonalidad (Ec. 9.39). Considerando como referencia nuevamente la definición de la función delta de Dirac (Secciones 1.15 y 8.6), el resultado de la Ec. 9.81 significa que

$$K(x, t) = \delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \, \varphi_n(t). \tag{9.82}$$

Fácilmente se puede demostrar que

$$\int K(x, t) \, dt = 1 \tag{9.83}$$

permitiendo que $F(t) = \varphi_0$, una constante. La confirmación del comportamiento en $x = t$ se puede encontrar al utilizar la desigualdad de Bessel. Se tiene

$$K(t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n(t)]^2. \tag{9.84}$$

Utilizando la Ec. 9.72, se obtiene

$$\int [K(t, t)]^2 \, dt \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty. \tag{9.85}$$

En consecuencia, $K(x, t)$ diverge de $x = t$, tal como era de esperarse.

Función de Green. Una serie algo similar a la representada por $K(x, t)$ resulta cuando se desarrolla la función de Green en funciones propias de la ecuación homogénea correspondiente. En la ecuación de Helmholtz no homogénea se tiene

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}). \tag{9.86}$$

La ecuación de Helmholtz homogénea se satisface con sus funciones propias φ_n.

$$\nabla^2 \varphi_n(\mathbf{r}) + k_n^2 \, \varphi_n(\mathbf{r}) = 0. \tag{9.87}$$

Tal como se ha descrito en la Sección 8.6, la función de Green $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ satisface la ecuación de la fuente de punto

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + k^2 \, G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{9.88}$$

Se desarrolla la función de Green en la forma de serie de funciones propias de la ecuación homogénea (9.87), es decir

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2) \, \varphi_n(\mathbf{r}_1), \tag{9.89}$$

y mediante la sustitución en la Ec. 9.88, se obtiene

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2) \, k_n^2 \, \varphi_n(\mathbf{r}_1) + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2) \, \varphi_n(\mathbf{r}_1) = -\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{r}_1) \, \varphi_n(\mathbf{r}_2). \tag{9.90}$$

Aquí, $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ha sido sustituido por su desarrollo de función propia, Ec. 9.82. Cuando se utiliza la ortogonalidad de $\varphi_n(\mathbf{r}_1)$ para aislar a_n y luego se sustituye en la Ec. 9.89, la función de Green se transforma en

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1) \, \varphi_n(\mathbf{r}_2)}{k_n^2 - k^2}, \tag{9.91}$$

un desarrollo bilineal, simétrico con respecto a $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ como era de esperarse. Finalmente, $\psi(\mathbf{r}_1)$, la solución deseada para la ecuación no ho-

mogénea está definida por

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\rho(\mathbf{r}_2)\, d\tau_2 \tag{9.92}$$

Si se generaliza la ecuación diferencial no homogénea a

$$\mathscr{L}\psi + \lambda\psi = -\rho, \tag{9.93}$$

en donde $\mathscr{L}$ es el operador hermitiano, se encuentra que

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1)\, \varphi_n(\mathbf{r}_2)}{\lambda_n - \lambda}, \tag{9.94}$$

en donde λ_n es el enésimo valor propio de φ_n, la función propia ortonormal correspondiente de la ecuación diferencial homogénea

$$\mathscr{L}\psi + \lambda\psi = 0. \tag{9.95}$$

La función de Green se encontrará nuevamente en la Sección 16.5, en donde se investiga con más detalle y se relaciona con las ecuaciones integrales.

EJERCICIOS

9.4.1 Una función $f(x)$ se desarrolla en una serie de funciones propias ortonormales

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \varphi_n(x).$$

Demuestre que el desarrollo en serie es único para un conjunto dado de $\varphi_n(x)$. Las funciones $\varphi_n(x)$ deben considerarse aquí como los vectores *básicos* en un espacio de Hilbert infinitamente dimensional.

9.4.2 En lugar del desarrollo de una función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \varphi_n(x)$$

con

$$a_n = \int_a^b F(x)\, \varphi_n(x)\, w(x)\, dx,$$

considere la aproximación de serie *finita*

$$F(x) \approx \sum_{n=0}^{m} c_n\, \varphi_n(x).$$

Demuestre que el error medio cuadrático

$$\int_a^b \left[F(x) - \sum_{n=0}^{m} c_n\, \varphi_n(x)\right]^2 w(x)\, dx$$

se reduce al mínimo al considerar $c_n = a_n$.

9.4.3 Derive la desigualdad de Schwarz a partir de la identidad

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 = \int_a^b [f(x)]^2\,dx \int_a^b [g(x)]^2\,dx - \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b [f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)]^2\,dx\,dy.$$

9.4.4 Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de la desigualdad de Schwarz, Ec. 9.77, pueden desarrollarse en una serie de funciones propias $\varphi_i(x)$, demuestre que la Ec. 9.77 se reduce a la Ec. 9.75 (con n posiblemente infinita).
Observe la notación de $f(x)$ como un vector en un espacio de función donde $\varphi_i(x)$ corresponde al vector unitario $\mathbf{e}_i$.

9.4.5 El operador H es hermitiano y positivo, es decir

$$\int_a^b f^* H f\,dx > 0.$$

Demuestre la desigualdad de Schawrz generalizada:

$$\left|\int_a^b f^* H g\,dx\right|^2 \leqslant \int_a^b f^* H f\,dx \int_a^b g^* H g\,dx.$$

9.4.6 La representación de la función delta de Dirac proporcionada por la Ec. 9.82

$$\delta(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\,\varphi_n(t)$$

frecuentemente se denomina *relación de cierre.* Para un conjunto ortonormal de funciones, φ_n, demuestre que el cierre implica la plenitud, es decir que la Ec. 9.61 se deriva de la Ec. 9.82.
Sugerencia. Se puede considerar

$$F(x) = \int F(t)\,\delta(x-t)\,dt.$$

9.4.7 Sustituya la Ec. 9.91, el desarrollo de función propia de la función de Green, en la Ec. 9.92 y luego demuestre que la Ec. 9.92 es de hecho una solución de la ecuación de Helmholtz no homogénea (9.86).

9.4.8 (a) Comenzando con una ecuación diferencial no homogénea unidimensional, (Ec. 9.93), suponga que $\psi(x)$ y $\rho(x)$ se pueden representar por medio de desarrollos de funciones propias. Sin el uso de la función delta de Dirac o de su representación, demuestre que

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_a^b \rho(t)\varphi_n(t)\,dt}{\lambda_n - \lambda}\,\varphi_n(x).$$

Observe que (1) si $\rho = 0$, no existe solución a menos de que $\lambda = \lambda_n$ y (2) si $\lambda = \lambda_n$, no existe solución a menos de que ρ sea ortogonal con respecto a φ_n. Este mismo comportamiento vuelve a aparecer en las ecuaciones integrales de la Sección 16.4.
(b) Intercambiando la suma y la integración, demuestre que se ha construido la función de Green correspondiente a la Ec. 9.94.

9.4.9 Las funciones propias de la ecuación de Schrödinger frecuentemente son complejas. En este caso, la integral de ortogonalidad, Ec. 9.39, se sustituye por

$$\int_a^b \varphi_i^*(x)\varphi_j(x)w(x)\,dx = \delta_{ij}.$$

En lugar de la Ec. 9.82, se tiene

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_n^*(\mathbf{r}_2).$$

Demuestre que la función de Green, Ec. 9.91, se transforma en

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_n^*(\mathbf{r}_2)}{k_n^2 - k^2}$$

$$= G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1).$$

9.4.10 Una función de onda normalizada $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$. Los coeficientes de desarrollo a_n son conocidos como amplitudes de probabilidad. Se puede definir una matriz de densidad ρ con los elementos $\rho_{ij} = a_i a_j^*$. Demuestre que

$$(\rho^2)_{ij} = \rho_{ij}$$

o

$$\rho^2 = \rho.$$

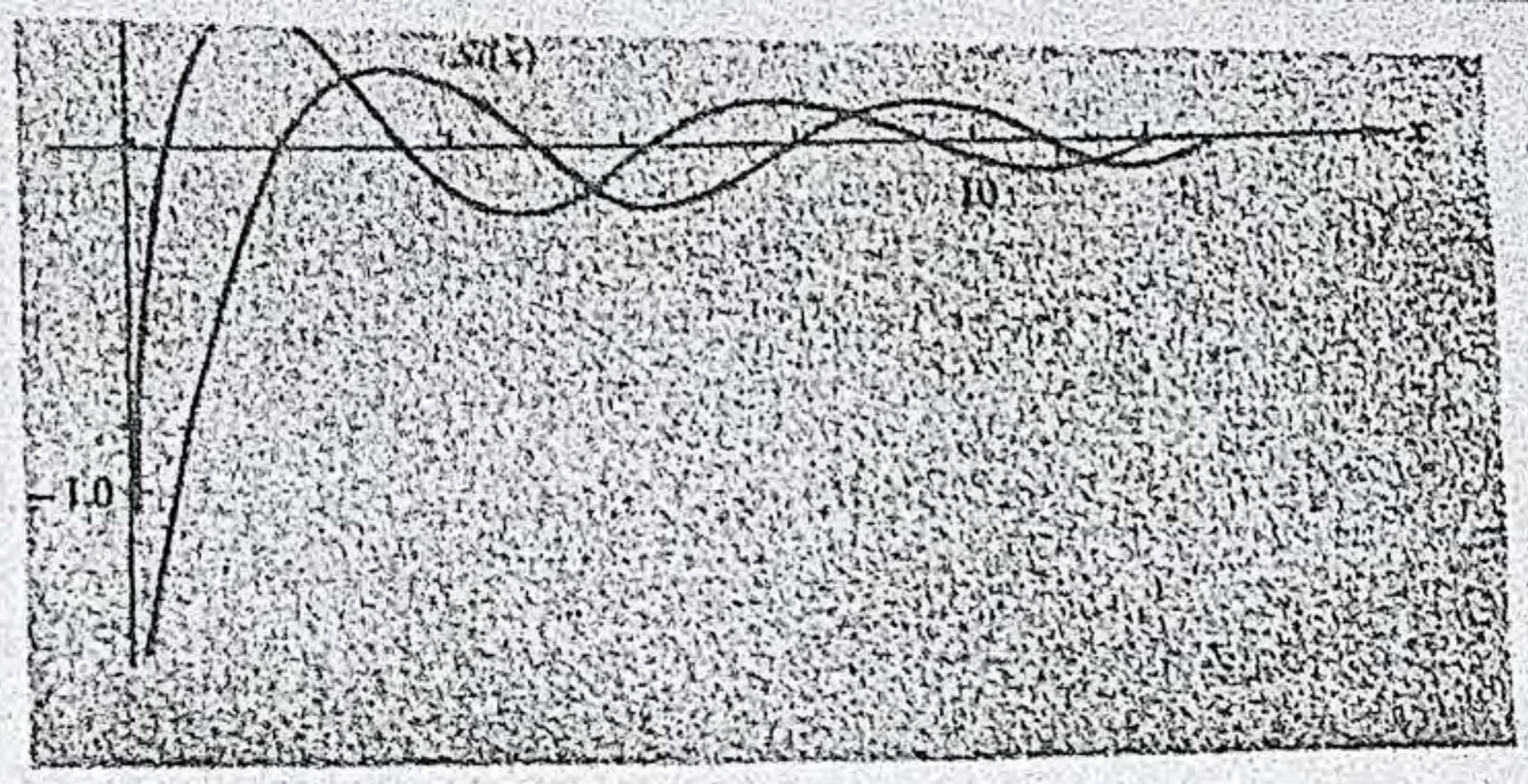
Este resultado, por definición, hace de ρ un operador de proyección.

Sugerencia. $\int \psi^* \psi \, dx = 1.$

REFERENCIAS

MILLER, K. S., *Linear Differential Equations in the Real Domain.* Nueva York: Norton (1963).

TITCHMARSH, E. C., *Eigenfunction Expansion Associated with Second Order Differential Equations.* Londres: Oxford University Press, Vol. I, Segunda edición (1962), Vol. II (1958).



CAPITULO 10

LA FUNCION GAMMA (FUNCION FACTORIAL)

La función gamma aparece ocasionalmente en los problemas físicos tal como la normalización de las funciones de onda de Coulomb y en el cómputo de las probabilidades en la mecánica estadística. Sin embargo, por lo general, tiene una menor aplicación física directa e interpretación que, por ejemplo, las funciones de Legendre y Bessel de los Capítulos 11 y 12. Más bien su importancia se encuentra en su utilidad para el desarrollo de otras funciones que tienen una aplicación física directa. En consecuencia, la función gamma se incluye aquí. En la Sección 10.3 se incluye una descripción de la evaluación numérica de la función gamma.

10.1 Definiciones, Propiedades Simples

Al menos existen tres definiciones diferentes y convenientes de la función gamma de uso común. Nuestra primera tarea consiste en establecer estas definiciones, desarrollar algunas consecuencias directas y simples, y demostrar la equivalencia de las tres formas.

Límite Infinito (Euler). La primera definición, designada después de Euler es

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\, n^z. \tag{10.1}$$

Aquí y en toda parte subsecuente de este capítulo, z puede ser real o compleja. Sustituyendo z por $z+1$, se tiene

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^{z}$$
$$= z\,\Gamma(z). \tag{10.2}$$

Esta es la relación funcional básica para la función gamma. Es de hacerse notar que representa una ecuación de *diferencia*. Se ha demostrado que la función gamma es una de la clase general de funciones que no satisfacen ninguna ecuación diferencial con coeficientes racionales. También de acuerdo con la definición

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)} n$$
$$= 1. \tag{10.3}$$

Ahora, la aplicación de la Ec. 10.2 proporciona

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1, \\ \Gamma(3) &= 2\,\Gamma(2) = 2, \\ \Gamma(n) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1) \end{aligned} \tag{10.4}$$

Integral Definida (Euler). Una segunda definición, también denominada frecuentemente forma de Euler, es

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad \mathscr{R}(z) > 0. \tag{10.5}$$

La restricción en z es necesaria para evitar la divergencia de la integral. Cuando la función gamma aparece en los problemas físicos, frecuentemente se encuentra en esta forma o alguna variación tal como

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1}\, dt, \qquad \mathscr{R}(z) > 0, \tag{10.6}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt, \qquad \mathscr{R}(z) > 0. \tag{10.7}$$

Cuando $z = \frac{1}{2}$, la Ec. 10.6 es justamente la función de error de Gauss y se obtiene el interesante resultado

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{10.8}$$

Para mostrar la equivalencia de estas dos definiciones, Ecs. 10.1 y 10.5, considere la función de dos variables

$$F(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt, \qquad \mathscr{R}(z) > 0 \tag{10.9}$$

con n un número entero positivo.[1] Ya que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \equiv e^{-t}, \tag{10.10}$$

de acuerdo con la definición del exponencial

$$\lim_{n \to \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$
$$\equiv \Gamma(z) \tag{10.11}$$

mediante la Ec. 10.5.

Regresando a $F(z, n)$, se procede a evaluar la misma en una integración sucesiva por partes. Por conveniencia, sea $u = t/n$. Siendo así,

$$F(z, n) = n^z \int_0^1 (1 - u)^n u^{z-1}\, du. \tag{10.12}$$

Integrando por partes

$$\frac{F(z, n)}{n^z} = (1 - u)^n \frac{u^z}{z}\bigg|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1 - u)^{n-1} u^z\, du. \tag{10.13}$$

Repitiendo esto con la parte integrada que desaparece en ambos puntos extremos cada vez, se obtiene finalmente

$$F(z, n) = n^z \frac{n(n-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1}\, du$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\, n^z \tag{10.14}$$

Esto es igual a la expresión que se encuentra del lado derecho de la Ec. 10.1. En consecuencia,

$$\lim_{n \to \infty} F(z, n) = F(z, \infty) \equiv \Gamma(z), \tag{10.15}$$

mediante la Ec. 10.1, completando así la demostración.

Producto Infinito (Weierstrass). La tercera definición (forma de Weierstrass) es

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \tag{10.16}$$

[1] La forma $F(z, n)$ se sugiere por la función beta (cf. Ec. 10.60).

en donde γ es la constante de Euler-Mascheroni usual,

$$\gamma = 0.577\,216 \cdots \tag{10.17}$$

Esta forma se puede derivar de la definición original (Ec. 10.1) al volver a establecerla en la forma

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)}\, n^z$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} n^z. \tag{10.18}$$

Invirtiendo y utilizando

$$n^{-z} = e^{(-\ln n)z}, \tag{10.19}$$

se obtiene

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} e^{(-\ln n)z} \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right). \tag{10.20}$$

Multiplicando y dividiendo por

$$\exp\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)z\right] = \prod_{m=1}^{n} e^{z/m}, \tag{10.21}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left\{\lim_{n\to\infty} \exp\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)z\right]\right\}$$
$$\times \left[\lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m}\right]. \tag{10.22}$$

Tal como se ha demostrado en la la Sección 5.2, la serie infinita en el exponente converge y define γ, la constante de Euler-Mascheroni. En consecuencia, resulta la Ec. 10.16.

También se ha demostrado en la Sección 5.10 que la definición de producto infinito de Weierstrass de $\Gamma(z)$ origina directamente una identidad importante,

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}. \tag{10.23}$$

Nuevamente, permitiendo que $z = \frac{1}{2}$, se obtiene

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{10.24}$$

(considerando la raíz cuadrada positiva) en concordancia con la Ec. 10.8.

La definición de Weierstrass demuestra de inmediato que $\Gamma(z)$ tiene polos simples en $z = 0, -1, -2, -3 \cdots$ y que $[\Gamma(z)]^{-1}$ no tiene polos en el plano complejo finito, lo cual significa que $\Gamma(z)$ no tiene ceros. Este comportamiento también puede observarse en la Ec. 10.23, en donde se puede observar que $\pi/(\operatorname{sen} \pi z)$ nunca es igual a cero.

Notación Factorial. Hasta ahora, nuestra descripción ha sido presentada en términos de la notación clásica. Tal como ha sido establecido por Jeffreys y otros, el -1 del exponente $z-1$ en nuestra segunda definición (Ec. 10.5) constituye una incomodidad continua. De acuerdo con lo anterior, la Ec. 10.5 puede volver a establecerse en la forma

$$\int_0^\infty e^{-t} t^z \, dt \equiv z!, \qquad \mathscr{R}(z) > -1, \tag{10.25}$$

para *definir* una función factorial $z!$ Ocasionalmente, se puede encontrar la notación de Gauss, $\Pi(z)$, para la función factorial

$$\prod(z) = z! \tag{10.26}$$

La notación Γ se debe a Legendre. La función factorial de la Ec. 10.25 evidentemente está relacionada con la función gamma por medio de

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= (z-1)! \\ \Gamma(z+1) &= z! \end{aligned} \tag{10.27}$$

Si $z = n$, un número entero positivo (Ec. 10.4) demuestra que

$$z! = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \tag{10.28}$$

el factorial familiar. Sin embargo, es de hacerse notar cuidadosamente que ya $z!$ se ha definido ahora por medio de la Ec. 10.25 (o equivalentemente por medio de la Ec. 10.27), *la función factorial ya no queda limitada a valores enteros positivos del argumento.* La relación de diferencia (Ec. 10.2) se transforma en

$$(z-1)! = \frac{z!}{z}. \tag{10.29}$$

Esto demuestra de inmediato que

$$0! = 1 \tag{10.30}$$

y

$$n! = \pm\infty \quad \text{para } n, \text{ un número entero negativo.} \tag{10.31}$$

En términos de la función factorial (Ec. 10.23) se transforma en

$$z!(-z)! = \frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z}. \tag{10.32}$$

Al limitarnos a los valores reales del argumento, $x!$ define la curva mostrada en la Figura 10.1. El mínimo de la curva es

$$x! = (0.461{,}63\cdots)! = 0.885{,}60\ldots \tag{10.33}$$

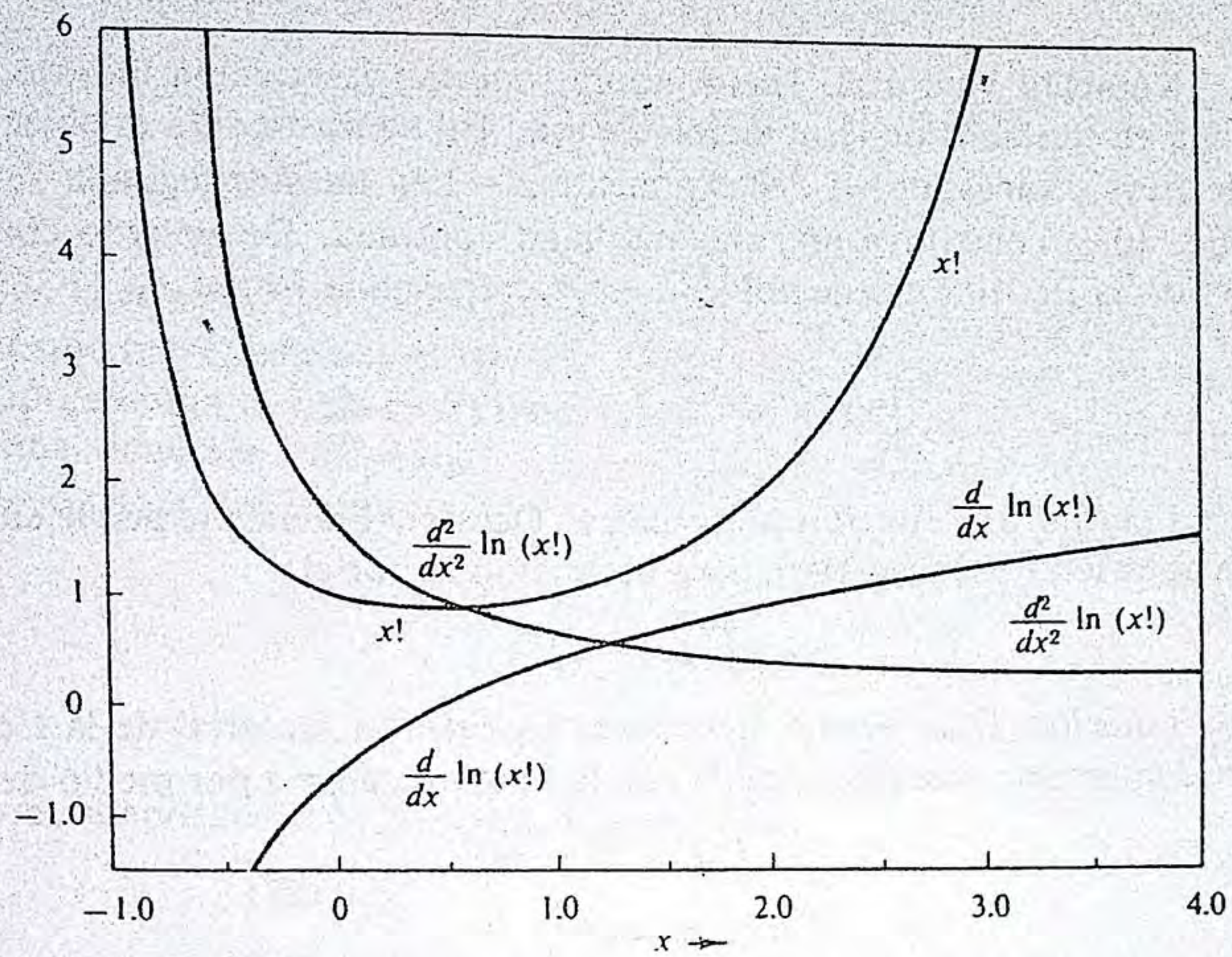


Fig. 10.1 La función factorial y las dos primeras derivadas de los ln(x!)

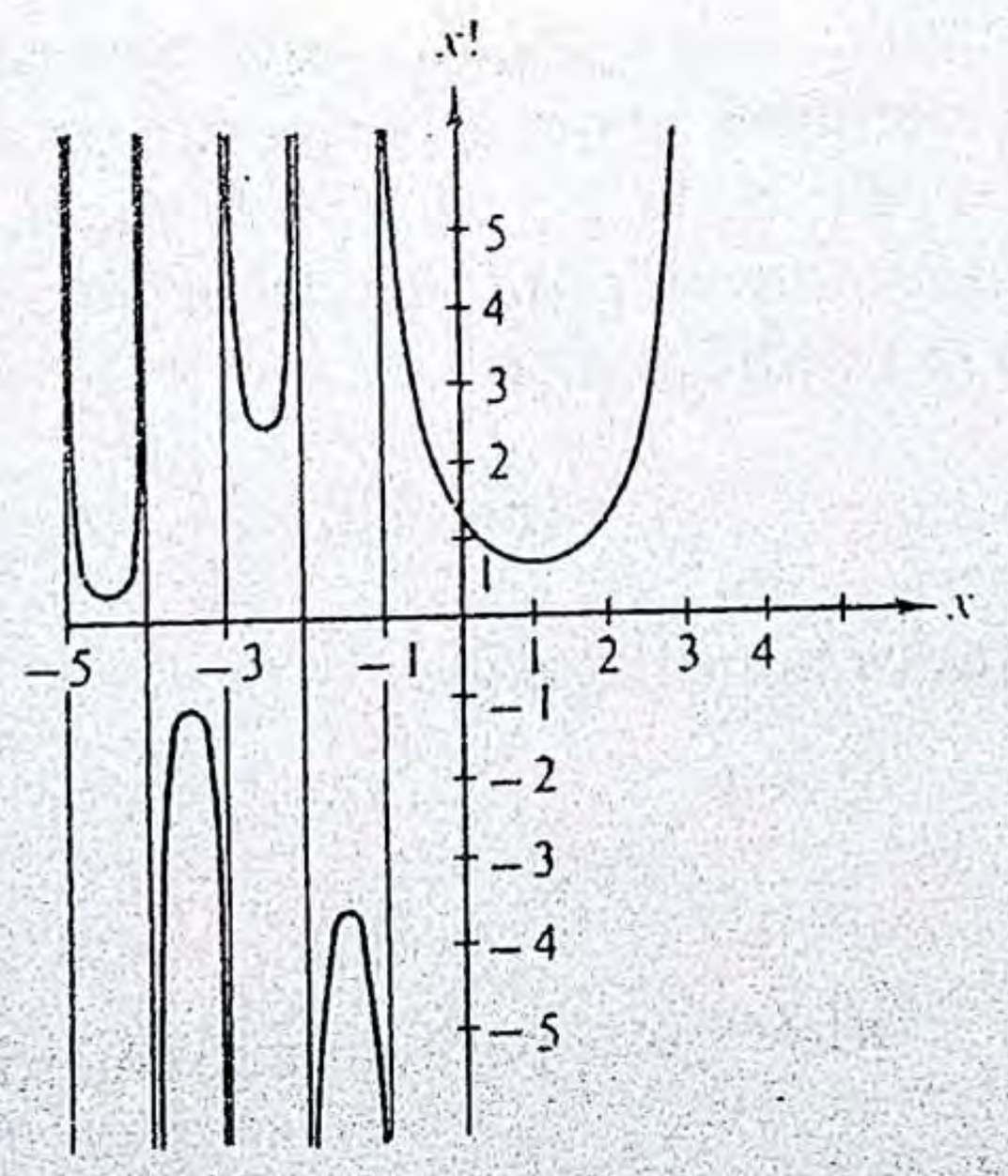
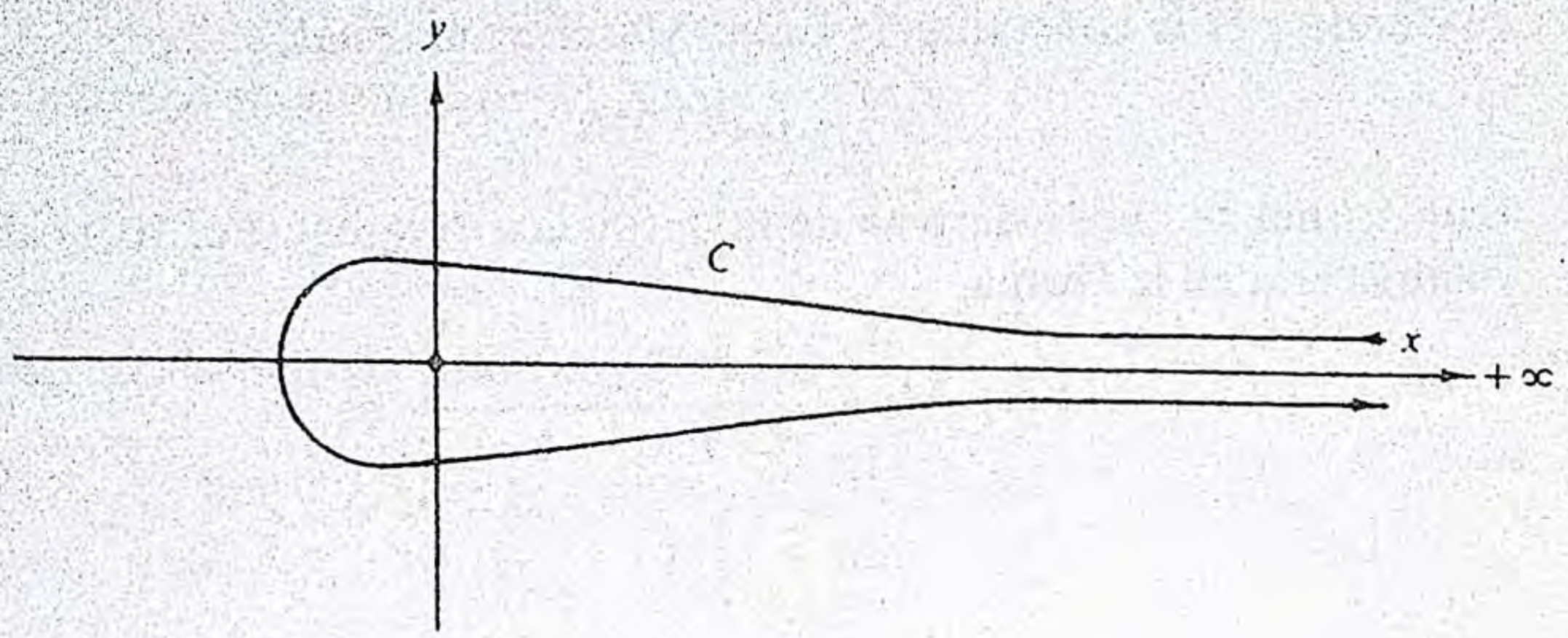


Fig. 10.2 La función factorial. Extensión a los argumentos negativos.

Representación Integral. Una representación de integral que es de utilidad para el desarrollo de la serie asintótica para la función de Bessel en

$$\int_C e^{-z} z^{\nu}\, dz = (e^{2\pi i\nu} - 1)\nu! \tag{10.34}$$



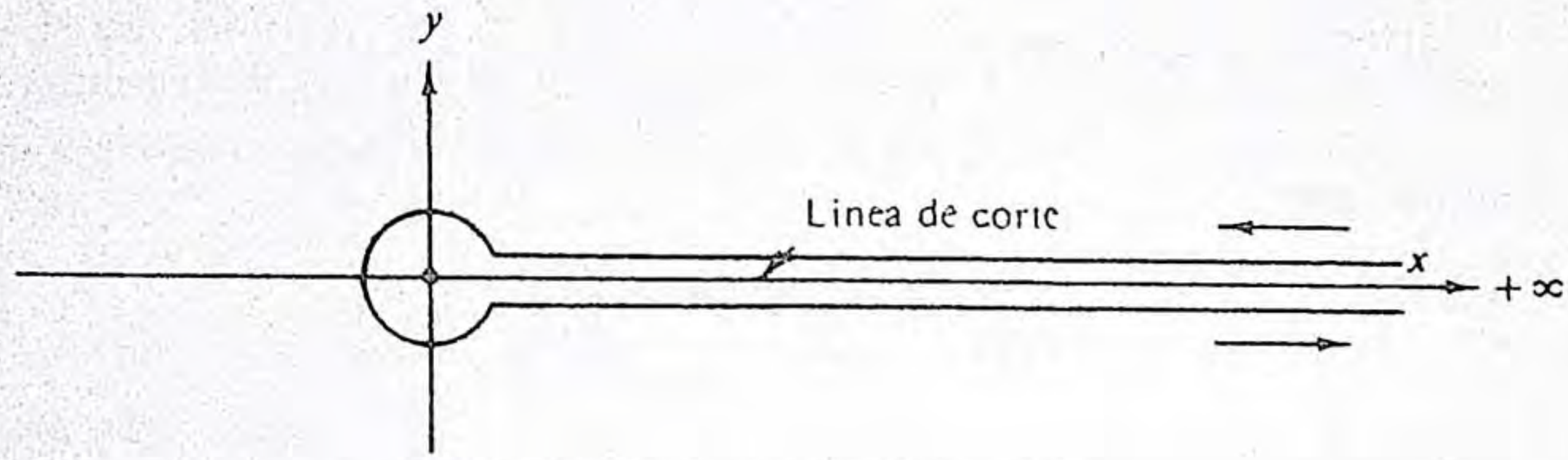


Fig. 10.3 Contorno de la función factorial.

Fig. 10.4 El contorno de la Fig. 10.3 deformado

donde C es el contorno mostrado en la Fig. 10.3. Esta representación de la integral de contorno es de particular utilidad cuando ν no es un número entero, $z = 0$ siendo entonces el *punto de ramificación*.

La Ec. 10.34 se verifica fácilmente para $\nu > -1$ mediante la deformación del contorno como se muestra en la Fig. 10.4. La integral desde ∞ hasta el origen proporciona $-(\nu!)$, colocando la fase de z en 0. La integral fuera de ∞ (en el cuarto cuadrante) proporciona así $e^{2\pi i\nu}\nu!$, de modo que la fase de z se ha incrementado a 2π. Ya que el círculo alrededor del origen contribuye en nada cuando $\nu > -1$, la Ec. 10.34 es lo resultante.

Frecuentemente es conveniente transformar este resultado en una forma más simétrica

$$\int_C e^{-z}(-z)^\nu \, dz = 2i \operatorname{sen} \nu\pi \; \nu! \tag{10.35}$$

Esto corresponde al hecho de seleccionar la fase de z de modo que tenga el intervalo de $-\pi$ a $+\pi$ en la Ec. 10.34.

Este análisis establece las Ecs. 10.34 y 10.35 para $\nu > -1$. Es relativamente simple extender el intervalo para incluir todas las ν no integrales. Primeramente, se observa que la integral existe para $\nu < -1$ mientras se considere la permanencia lejos del origen. En segundo lugar, mediante la integración por partes se encuentra que la Ec. 10.35 proporciona la relación de diferencia ya conocida (Ec. 10.29). Si se considera que la relación de diferencia define la función factorial de $\nu < -1$, entonces las Ecs. 10.34 y 10.35 se verifican para todas las ν (excepto los números enteros negativos).

EJERCICIOS

10.1.1 Derive las relaciones de recurrencia

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

a partir de la forma integral de Euler (Ec. 10.5),

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

10.1.2 En una solución de serie de potencias para las funciones de Legendre de segunda clase se encuentra la expresión

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+2s-1)(n+2s)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2s-2)(2s)\cdot(2n+3)(2n+5)(2n+7)\cdots(2n+2s+1)},$$

en donde s es un número entero positivo. Vuelva a establecer esta expresión en términos de factoriales.

10.1.3 Demuestre que

$$\frac{(s-n)!}{(2s-2n)!} = \frac{(-1)^{n-s}(2n-2s)!}{(n-s)!}$$

Aquí s y n son números enteros con $s < n$. Este resultado se puede utilizar para evitar los factoriales negativos, tal como en la representación de tipo serie de las funciones esféricas de Neumann y las funciones de Legendre de segunda clase.

10.1.4 Demuestre que $\Gamma(z)$ puede establecerse en la forma

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1}\, dt, \qquad \mathscr{R}(z) > 0,$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt, \; \mathscr{R}(z) > 0.$$

10.1.5 En una distribución de tipo Maxwell, la fracción de partículas entre la velocidad v y $v + dv$ es

$$\frac{dN}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-mv^2/2kT\right) v^2\, dv,$$

en donde N es el número total de partículas. El valor promedio de duración de v^n está definido por $\langle v^n \rangle = N^{-1}\int v^n\, dN$. Demuestre que

$$\langle v^n \rangle = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \left(\frac{n+1}{2}\right)! \Big/ \frac{1}{2}!$$

10.1.6 Mediante la transformación de la función integral a la función gamma demuestre que

$$-\int_0^1 x^k \ln x\, dx = \frac{1}{(k+1)^2} \qquad k > -1.$$

 10.1.7 Demuestre que

$$\int_0^\infty e^{-x^4}\,dx = (\tfrac{1}{4})!$$

10.1.8 Demuestre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(ax-1)!}{(x-1)!} = \frac{1}{a}.$$

10.1.9 Verifique

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r}\ln r\,dr = -\gamma.$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty re^{-r}\ln r\,dr = 1-\gamma.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty r^n e^{-r}\ln r\,dr = (n-1)! + n\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r}\ln r\,dr, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$

Sugerencia: Esto puede verificarse por medio de la integración por partes, tres partes, o la diferenciación de la forma integral de $n!$ con respecto a n.

10.1.10 Localice los polos de $\Gamma(z)$. Demuestre que son polos simples y determine los residuos.

10.1.11 Demuestre que la ecuación $x! = k$, $k \neq 0$, tiene un número infinito de raíces reales.

10.1.12 En muchos problemas de la teoría electromagnética se encuentran los productos

$$2n(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 \equiv (2n)!!$$

$$(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 \equiv (2n+1)!!$$

Demuestre que

$$(2n)!! = 2^n n!$$

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

10.1.13 (a) Desarrolle una relación de recurrencia para $(2n+1)!!$.
(b) Demuestre que $(-1)!! = 1$ es consistente con la parte (a).

Respuesta. $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)!!$

10.1.14 Para s un número entero no negativo, demuestre que

$$(-2s-1)!! = \frac{(-1)^s}{(2s-1)!!} = \frac{(-1)^s 2^s s!}{(2s)!}.$$

10.1.15 Exprese el coeficiente del enésimo término del desarrollo de $(1+x)^{1/2}$
(a) En términos de factoriales de números enteros
(b) En términos de funciones de doble factorial (!!).
Respuesta.

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!}{2^{2n-2}n!(n-2)!} = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

10.1.16 Exprese el coeficiente del enésimo término del desarrollo de $(1+x)^{-1/2}$

(a) en términos de factoriales de números enteros

(b) en términos de funciones de doble factorial (!!).

$$\textit{Respuesta.}\ a_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

10.1.17 (a) Demuestre que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2} - n)\Gamma(\tfrac{1}{2} + n) = (-1)^n \pi$$

en donde n es un número entero.

(b) Exprese $\Gamma(\frac{1}{2} + n)$ y $\Gamma(\frac{1}{2} - n)$ en forma separada en términos de $\pi^{1/2}$ y una función de doble factorial (!!) (Ejercicio 10.1.12)

$$\textit{Respuesta.}\ \Gamma(\tfrac{1}{2} + n) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\pi^{1/2}.$$

10.1.18 A partir de una de las definiciones de la función factorial o gamma, demuestre que

$$|(ix)!|^2 = \frac{\pi x}{\operatorname{senh} \pi x}.$$

10.1.19 Demuestre que

$$|\Gamma(\alpha + i\beta)| = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha} \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{-1/2}.$$

Esta ecuación ha sido de utilidad en los cálculos teóricos de la degradación beta.

10.1.20 Demuestre que

$$|(n+ib)!| = \left(\frac{\pi b}{\operatorname{senh} \pi b}\right)^{1/2} \prod_{s=1}^{n} (s^2 + b^2)^{1/2}$$

para n un número entero positivo.

10.1.21 Demuestre que

$$|x!| \geq |(x+iy)!|$$

para todas las x. Las variables x e y son reales.

10.1.22 Demuestre que

$$|(-\tfrac{1}{2} + iy)!|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi y}.$$

10.1.23 La función de onda de una partícula dispersada por un potencial de Coulomb puro es $\psi(r, \theta)$. En el origen, la función de onda se transforma en

$$\psi(0) = e^{-\pi\gamma/2}\Gamma(1 + i\gamma)$$

en donde $\gamma = Z_1 Z_2 e^2/\hbar v$. Demuestre que

$$\psi^*(0)\psi(0) = \frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma} - 1}.$$

10.1.24 Derive la representación de integral de contorno

$$2i \operatorname{sen} \nu\pi\ \nu! = \int_c e^{-z}(-z)^\nu\, dz.$$

10.2 Funciones Digamma y Poligamma

Funciones Digamma. Tal como puede observarse de las tres definiciones indicadas en la Sección 10.1, no es conveniente tratar con las derivadas de la función gamma o factorial en forma directa. En lugar de esto, normalmente se obtiene el logaritmo natural de la función factorial (Ec. 10.1), se transforma el producto a una suma y luego se procede a la diferenciación, es decir

$$z! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \tag{10.36}$$

y

$$\begin{aligned} \ln(z!) = \lim_{n\to\infty} [&\ln(n!) + z\ln n - \ln(z+1) \\ &- \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n)], \end{aligned} \tag{10.37}$$

en donde el logaritmo del límite es igual al límite del logaritmo. Diferenciando con respecto a z, se obtiene

$$\frac{d}{dz}\ln(z!) \equiv \mathsf{F}(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \cdots - \frac{1}{z+n}\right), \tag{10.38}$$

en donde se define $\mathsf{F}(z)$, la función digamma. De acuerdo con la definición de la constante de Euler-Mascheroni[1], la Ec. 10.38 se puede volver a establecer en la forma

$$\mathsf{F}(z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right). \tag{10.39}$$

Una de las aplicaciones de la Ec. 10.39 es la derivación de la forma en serie de la función de Neumann (Sección 11.3). Evidentemente

$$\mathsf{F}(0) = -\gamma = -0.577\,215\,664\,901\cdots.^2 \tag{10.40}$$

Otra expresión, quizás de mayor utilidad, para $\mathsf{F}(z)$ se deriva en la Sección 10.3.

Función Poligamma. La función digamma se puede diferenciar de modo repetido, originando así la función poligamma:

$$\begin{aligned} \mathsf{F}^{(m)}(z) &\equiv \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln(z!) \\ &= (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{10.41}$$

[1] Cf. Secciones 5.2 y 5.6.

[2] γ ha sido calculada con aproximación de 1271 lugares por parte de D.E. Knuth, *Math. Comp.* **16**, 275 (1962) y con aproximación de 3566 cifras decimales por D. W. Sweeney, *Math. Comp.* **17**, 170 (1963). Pudiera ser de interés indicar que la fracción 228/395 proporciona γ con precisión de seis lugares.

Una gráfica de $F(x)$ y $F'(x)$ se incluye en la Figura 10.1. Ya que la serie en la Ec. 10.41 define la función zeta de Riemann[1] (con $z = 0$),

$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}, \tag{10.42}$$

se tiene

$$F^{(m)}(0) = (-1)^{m+1} m!\, \zeta(m+1). \tag{10.43}$$

Los valores de las funciones poligamma de un argumento integral positivo, $F^{(m)}(n)$, se pueden calcular utilizando el Ejercicio 10.2.4.

En términos de la quizás más probable notación Γ

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \ln \Gamma(z) = \frac{d^n}{dz^n} \psi(z) = \psi^{(n)}(z). \tag{10.44a}$$

De cuerdo con la Ec. 10.27

$$\psi^{(n)}(z) = F^{(n)}(z-1). \tag{10.44b}$$

Función Zeta de Riemann. Por conveniencia, la función zeta de Riemann se proporciona en la Tabla 10.1. El comportamiento general se describe en la Fig. 5.9.

TABLA 10.1

Función zeta de Rieman

s	$\zeta(s)$
2	1.64493 40668
3	1.20205 69032
4	1.08232 32337
5	1.03692 77551
6	1.01734 30620
7	1.00834 92774
8	1.00407 73562
9	1.00200 83928
10	1.00099 45751

Ahora es posible establecer el desarrollo de Maclaurin para $\ln(z!)$.

$$\ln(z!) = -\gamma z + \frac{z^2}{2}\zeta(2) - \frac{z^3}{3}\zeta(3) + \cdots + (-1)^n \frac{z^n}{n}\zeta(n) + \cdots, \tag{10.44c}$$

convergente para $|z| < 1$; para $z = x$, el intervalo es $-1 < x \leqslant 1$. Las formas alternativas de esta serie aparecen en el Ejercicio 5.9.13. La Ec. 10.44c cons-

[1] Sección 5.9. Para $z \neq 0$ esta serie se puede utilizar para definir la función zeta generalizada.

tituye un medio posible para el cálculo de $z!$ en el caso de z real o compleja, pero la serie de Stirling (Sección 10.3) normalmente es más adecuada y, además, ahora se tiene disponible una excelente tabla de valores de la función gamma para argumentos complejos basados en el uso de la serie de Stirling y la relación de recurrencia (Ec. 10.29).[1]

Las funciones digamma y poligamma también se pueden utilizar en la suma de series. Si la forma general de la serie tiene la forma de una fracción racional (con la mayor potencia del índice en el numerador al menos dos menos que la potencia mayor del índice en el denominador), se puede transformar mediante el método de las fracciones parciales (cf. Sección 15.7). La serie infinita se puede expresar luego como una suma finita de funciones digamma o poligamma. La utilidad de este método depende de la disponibilidad de las tablas de funciones digamma o poligamma. Tales tablas y ejemplos de suma de series se proporcionan en AMS-55, Capítulo 6.

EJERCICIOS

10.2.1 Verifique que las dos formas siguientes de la función digamma

$$F(x) = \sum_{r=1}^{x} \frac{1}{r} - \gamma$$

y

$$F(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x}{r(r+x)} - \gamma,$$

son iguales entre sí (para x un número entero positivo).

10.2.2 Demuestre que $F(z)$ tiene el desarrollo en serie

$$F(z) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) z^{n-1}.$$

10.2.3 Para un desarrollo de serie de potencias de $\ln(z!)$, AMS-55 indica

$$\ln(z!) = -\ln(1+z) + z(1-\gamma) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n [\zeta(n) - 1] z^n/n.$$

(a) Demuestre que esto concuerda con la Ec. 10.44c para $|z| < 1$.
(b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de esta nueva expresión?

[1] *Table of the Gamma Function for Complex Arguments*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series No. 34.

10.2.4 Derive la relación de diferencia para la función poligamma

$$F^{(m)}(z+1) = F^{(m)}(z) + (-1)^m \frac{m!}{(z+1)^{m+1}}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

10.2.5 Demuestre que si

$$\Gamma(x+iy) = u + iv$$

entonces

$$\Gamma(x-iy) = u - iv.$$

Este es un caso especial del principio de reflexión de Schwarz, Sección 6.5.

10.2.6 El símbolo de Pochhammer $(a)_n$ está definido por

$$(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$$
$$(a)_0 = 1$$

(para n número entero).

(a) Exprese $(a)_n$ en términos de factoriales.

(b) Encuentre $(d/da)(a)_n$ en términos de $(a)_n$ y las funciones digamma.

Respuesta. $\dfrac{d}{da}(a)_n = (a)_n[F(a+n-1) - F(a-1)]$.

10.2.7 Las funciones de onda relativísticas de Dirac para el hidrógeno implican factores tales como $[2(1-\alpha^2 Z^2)^{1/2}]!$ en donde α, la constante de estructura fina, es $\frac{1}{137}$ y Z es el número atómico. Desarrolle $[2(1-\alpha^2 Z^2)^{1/2}]!$ en una serie de potencias de $\alpha^2 Z^2$.

10.2.8 La descripción mecánica cuántica de una partícula en un campo de Coulomb requiere del conocimiento de la fase correspondiente a la función factorial compleja. Determine la fase de $(1+ib)!$ para b pequeña.

10.2.9 La energía total radiada por un cuerpo negro está definida por

$$u = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx.$$

Demuestre que la integral en esta expresión es igual a $3!\,\zeta(4)$. $[\zeta(4) = \pi^4/90 = 1.0823\ldots.]$

El resultado final es la ley de Stefan-Boltzmann.

10.2.10 Como una generalización del resultado en el Ejercicio 10.2.9, demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{x^s\, dx}{e^x - 1} = s!\,\zeta(s+1), \qquad \mathscr{R}(s) > 0.$$

10.2.11 Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{x^s\, dx}{e^x + 1} = s!(1 - 2^{-s})\zeta(s+1), \qquad \mathscr{R}(s) > 0.$$

Los Ejercicios 10.2.10 y 10.2.11 de hecho constituyen las transformadas de la integral de Mellin (cf. Sección 15.1).

 10.2.12 Demuestre que

$$\psi^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} \int_0^\infty \frac{t^n e^{-zt}}{1 - e^{-t}}\, dt, \qquad \mathscr{R}(z) > 0.$$

10.2.13 Utilizando las funciones digamma y poligamma sume las series

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Nota. Se puede utilizar el Ejercicio 10.2.4 para calcular las funciones digamma requeridas.

10.2.14 Verifique la representación de la integral de contorno de $\zeta(s)$,

$$\zeta(s) = -\frac{(-s)!}{2\pi i} \int_c \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz.$$

El contorno C es el mismo que para la Ec. 10.35. Los puntos $z = \pm 2n\pi i$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ se excluyen completamente.

10.2.15 Demuestre que $\zeta(s)$ es analítica en todo el plano complejo finito excepto en $s = 1$, donde tiene un polo simple con un residuo de $+1$.
Sugerencia: La representación de la integral de contorno será de utilidad.

10.3 Serie de Stirling

Para el cálculo de ln $(z!)$ para valores grandes de z (mecánica estadística) y para los cómputos numéricos de los valores no integrales de z, es conveniente un desarrollo en serie de ln $(z!)$ en potencias negativas de z. Probablemente la forma más elegante de derivar tal desarrollo consiste en el método de los descendentes de gran pendiente (Sección 7.4). El siguiente método, que se inicia con una fórmula de integración numérica, no requiere del conocimiento de las integrales de contorno y es particularmente directo.

Derivación de la Fórmula de Integración de Euler-Maclaurin. La fórmula de Euler-Maclaurin para la evaluación de una integral definida[1] es

$$\int_0^n f(x)\, dx = \tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + \tfrac{1}{2}f(n)$$

[1] Obtenida mediante la integración repetida por partes, Sección 5.9.

$$- b_2[f'(n) - f'(0)] - b_4[f'''(n) - f'''(0)] - \cdots, \quad (10.45)$$

en donde los términos b_{2n} están relacionados con los números B_{2n} de Bernoulli (Cf. Sección 5.9) por medio de

$$(2n)!b_{2n} = B_{2n}, \quad (10.46)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_6 &= \tfrac{1}{42}, \\ B_2 &= \tfrac{1}{6}, & B_8 &= -\tfrac{1}{30}, \\ B_4 &= -\tfrac{1}{30}, & B_{10} &= \tfrac{5}{66}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (10.47)$$

Mediante la aplicación de la Ec. 10.45 a la integral definida

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(z+x)^2} = \frac{1}{z} \quad (10.48)$$

(para z no es en el eje real negativo), se obtiene

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2z^2} + \mathsf{F}'(z) - \frac{2!b_2}{z^3} - \frac{4!b_4}{z^5} - \cdots \quad (10.49)$$

Utilizando la Ec. 10.46 y resolviendo para $\mathsf{F}'(z)$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathsf{F}'(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{B_2}{z^3} + \frac{B_4}{z^5} + \cdots \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}}. \end{aligned} \quad (10.50)$$

Ya que los números de Bernoulli divergen intensamente, ¡esta serie no es convergente! Es semiconvergente o una serie asintótica, de utilidad para el cómputo a pesar de su divergencia (cf. Sección 5.11).

Integrando una vez más se obtiene la función digamma

$$\begin{aligned} \mathsf{F}(z) &= C_1 + \ln z + \frac{1}{2z} - \frac{B_2}{2z^2} - \frac{B_4}{4z^4} - \cdots \\ &= C_1 + \ln z + \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2nz^{2n}}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Integrando la Ec. 10.51 con respecto a z desde $z - 1$ hasta z y luego permitiendo que z se aproxime al infinito, C_1, la constante de integración, puede demostrarse que desaparece. Esto nos proporciona una segunda expresión para la función digamma, frecuentemente de más utilidad que la 10.38.

Serie de Stirling. La integral indefinida de la función digamma (Ec. 10.51) es

$$\ln(z!) = C_2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{B_2}{2z} + \cdots + \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}} + \cdots, \quad (10.52)$$

en donde C_2 es otra constante de integración. Para fijar C_2 es conveniente el uso de la fórmula de duplicación de Legendre derivada en la Sección 10.4,

$$z!(z - \tfrac{1}{2})! = 2^{-2z}\pi^{1/2}(2z)! \quad (10.53)$$

Este puede demostrarse directamente cuando z es un número entero positivo al establecer $(2z)!$ como el producto de términos pares por el producto de términos impares y extrayendo un factor de dos de cada término (Ejercicio 10.3.5). Sustituyendo la Ec. 10.52 en el logaritmo de la fórmula de duplicación, se encuentra que C_2 es

$$C_2 = \tfrac{1}{2}\ln 2\pi, \quad (10.54)$$

originando

$$\ln(z!) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(z + \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \cdots \quad (10.55)$$

Esta es la serie de Stirling, un desarrollo asintótico. El valor absoluto del error es menor que el valor absoluto del primer término despreciado.

Las constantes de integración C_1 y C_2 también se pueden evaluar mediante la comparación con el primer término del desarrollo en serie obtenido mediante el método del "descendente de gran pendiente" Esto se realiza en la Sección 7.4.

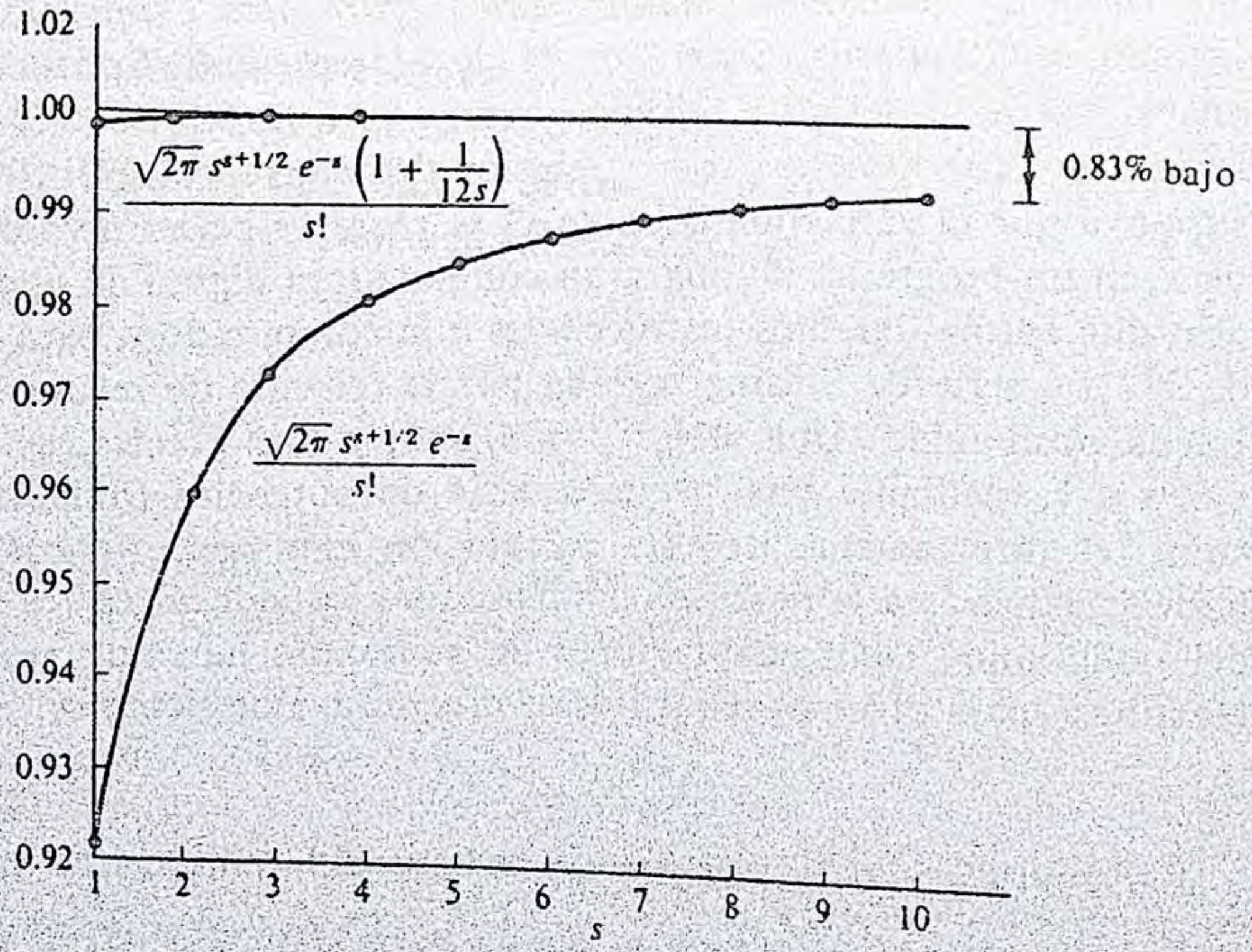


Fig. 10.5 Precisión de la fórmula de Stirling.

Para facilitar la comprensión de la notable precisión de la serie de Stirling para $s!$, en la Fig. 10.5 se ha construido una gráfica del primer término de la aproximación de Stirling para $s!$

Una tabulación proporciona la relación del primer término en el desarrollo para $s!$ y la relación de los dos primeros términos en el desarrollo para $s!$ La derivación de estas formas constituye el Ejercicio 10.3.1.

TABLA 10.2

s	$\dfrac{\sqrt{2\pi}\, s^{s+1/2}e^{-s}}{s!}$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}\, s^{s+1/2}e^{-s}[1+\frac{1}{12s}]}{s!}$
1	0.92213	0.99898
2	0.95950	0.99949
3	0.97270	0.99972
4	0.97942	0.99983
5	0.98349	0.99988
6	0.98621	0.99992
7	0.98817	0.99994
8	0.98964	0.99995
9	0.99078	0.99996
10	0.99170	0.99998

Cómputo Numérico. La posibilidad de utilizar el desarrollo de Maclaurin, Ec. 10.44*c*, para la evaluación numérica de la función factorial se menciona en la Sección 10.2. Sin embargo, para valores grandes de x, la serie de Stirling, Ec. 10.55, origina una convergencia bastante más rápida. La *Tabla de Funciones Gamma para Argumentos Complejos,* National Bureau of Standards, Serie No. 34 de Matemáticas Aplicadas, se basa en el uso de la serie de Stirling para $z = x + iy$, $9 \leqslant x \leqslant 10$. Valores inferiores de x se alcanzan con la relación de recurrencia, Ec. 10.29. Ahora, suponga que el valor numérico de $x!$ se requiere para un valor particular de x en un programa de una gran computadora digital de alta velocidad. ¿En qué forma daremos instrucciones a la computadora para el cómputo de $x!$? La serie de Stirling seguida por la relación de recurrencia es una buena posibilidad. Una mejor posibilidad, y más precisa, es adaptar $x!$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, mediante una pequeña serie de potencias (polinomio) y calcular $x!$ directamente de esta adaptación empírica. Probablemente se habrán indicado a la máquina computadora los valores de los coeficientes del polinomio. Tales adaptaciones de polinomio han sido realizadas por Hastings[1] para diversos requisitos de precisión. Por ejemplo,

[1] *Approximations for Digital Computers,* C. Hastings, Jr. Princeton, Nueva Jersey: Princeton Univ. Press. (1955).

$$x! = 1 + \sum_{n=1}^{8} b_n x^n + \varepsilon(x), \tag{10.56a}$$

con

$$\begin{aligned} b_1 &= -0.57719\,1652 & b_5 &= -0.75670\,4078 \\ b_2 &= 0.98820\,5891 & b_6 &= 0.48219\,9394 \\ b_3 &= -0.89705\,6937 & b_7 &= -0.19352\,7818 \\ b_4 &= 0.91820\,6857 & b_8 &= 0.03586\,8343 \end{aligned} \tag{10.56b}$$

en que la magnitud del error $|\varepsilon(x)| < 3 \times 10^{-7}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Lo anterior *no* constituye una adaptación de mínimos cuadrados. Hastings ha utilizado una técnica polinomial de Chebyshev similar a la descrita en la Sección 13.3 para reducir al mínimo el valor máximo de $|\varepsilon(x)|$.

EJERCICIOS

10.3.1 Vuelva a establecer la serie de Stirling para obtener $z!$ en lugar de $\ln(z!)$.

Respuesta. $z! = \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2} e^{-z}\left(1 + \dfrac{1}{12z} + \dfrac{1}{288z^2} - \dfrac{139}{51{,}840z^3} + \cdots\right).$

10.3.2 Utilice la fórmula de Stirling para calcular 52!, el número de readaptaciones posibles de cartas en una mesa estándar de juego de cartas.

10.3.3 Mediante la integración de la Ec. 10.51 desde $z - 1$ hasta z y luego permitiendo que $z \to \infty$, evalúe la constante C_1 en la serie asintótica para la función digamma $F(z)$.

10.3.4 Demuestre que la constante C_2 en la fórmula de Stirling equivale a $\frac{1}{2} \ln 2\pi$ mediante el uso del logaritmo de la fórmula de duplicación.

10.3.5 Con el desarrollo directo verifique que la fórmula de duplicación para $z = n + \frac{1}{2}$; n es un número entero.

10.3.6 Sin el uso de la serie de Stirling, demuestre que

(a) $\ln(n!) < \displaystyle\int_1^{n+1} \ln x\, dx,$

(b) $\ln(n!) > \displaystyle\int_1^{n} \ln x\, dx;$ $\quad n$ es un número entero $\geqslant 2$.

Observe que la media aritmética de estas dos integrales proporciona una buena aproximación para la serie de Stirling.

10.3.7 Ensaye en cuanto a convergencia

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{(p-\frac{1}{2})!}{p!}\right]^2 \times \frac{2p+1}{2p+2} = \pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p-1)!!(2p+1)!!}{(2p)!!(2p+2)!!}.$$

Esta serie se deriva del intento por describir el campo magnético creado por y encerrado en un circuito de corriente.

10.3.8 Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} x^{b-a}\frac{(x+a)!}{(x+b)!} = 1.$$

10.3.9 Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} n^{1/2} = \pi^{-1/2}.$$

10.4 La Función Beta

Utilizando la definición de integral (Ec. 10.25), se establece el producto de dos factoriales como el producto de dos integrales. Para facilitar el cambio de variables, las integrales deben considerarse sobre un intervalo finito.

$$m!n! = \lim_{a^2\to\infty} \int_0^{a^2} e^{-u}u^m\,du \int_0^{a^2} e^{-v}v^n\,dv, \qquad \begin{array}{l}\mathscr{R}(m) > -1,\\ \mathscr{R}(n) > -1.\end{array} \tag{10.57a}$$

Sustituyendo u por x^2 y v por y^2, se obtiene

$$m!n! = \lim_{a\to\infty} 4\int_0^a e^{-x^2}x^{2m+1}\,dx \int_0^a e^{-y^2}y^{2n+1}\,dy. \tag{10.57b}$$

Transformando a coordenadas polares se obtiene

$$m!n! = \lim_{a\to\infty} 4\int_0^a e^{-r^2}r^{2m+2n+3}\,dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}\theta \operatorname{sen}^{2n+1}\theta\,d\theta$$

$$= (m+n+1)!\,2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}\theta \operatorname{sen}^{2n+1}\theta\,d\theta. \tag{10.58}$$

La integral definida, junto con el factor 2, ha sido nombrada función beta

$$B(m+1, n+1) \equiv 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}\theta \operatorname{sen}^{2n+1}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = B(n+1, m+1). \tag{10.59a}$$

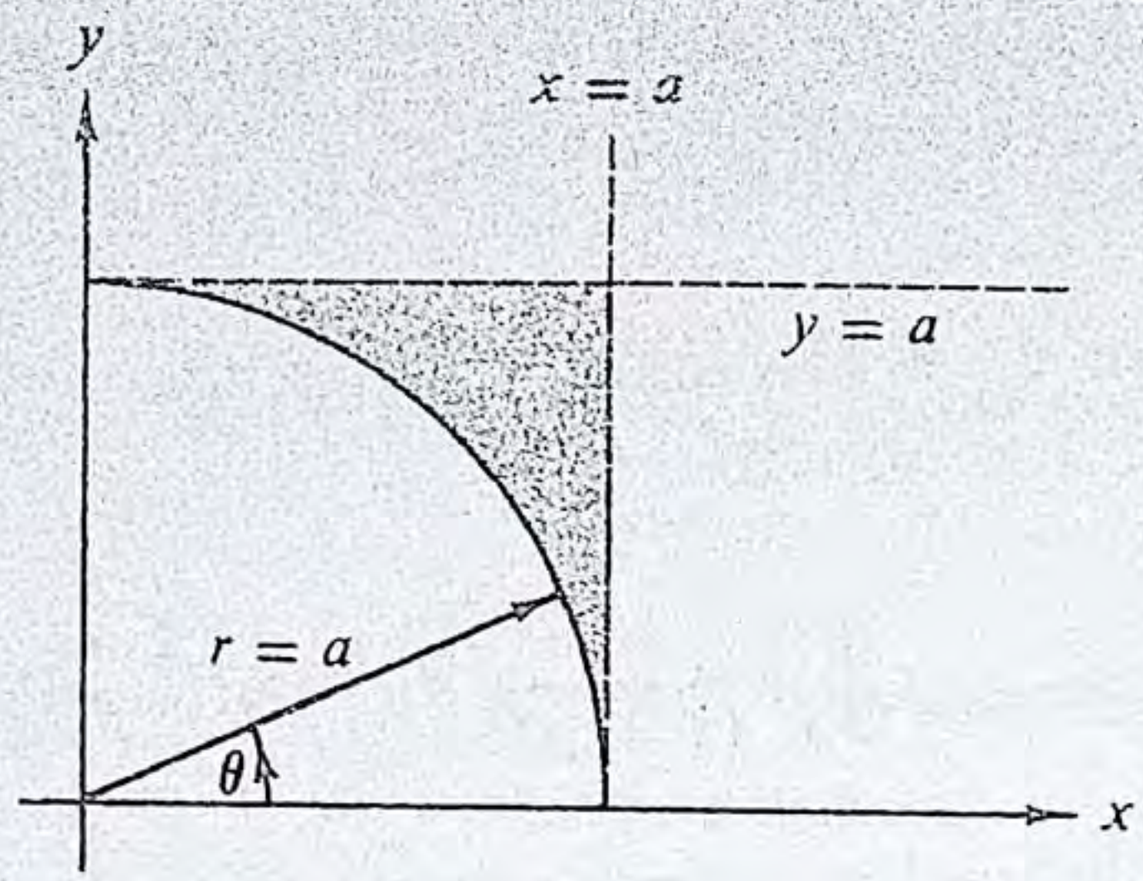


Fig. 10.6 Tranformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

De manera equivalente, en términos de la función gamma

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{10.59b}$$

La única razón para seleccionar $m + 1$ y $n + 1$, en lugar de m y n como los argumentos de B es para estar en concordancia con la función beta de carácter histórico y convencional. Evidentemente, los "1" extras son casi de tanta utilidad como el apéndice del organismo humano.

En esta manipulación, la transformación de las coordenadas cartesianas a las coordenadas polares requiere de cierta justificación. Como se observa en la Fig. 10.6, el área sombreada se ha despreciado. Sin embargo, el valor máximo del *integrando* en esta región es $e^{-a^2}a^{2m+2n+3}$ lo cual desaparece con tanta intensidad, cuando a se aproxima al infinito, que la integral sobre la región despreciada desaparece.

Integrales Definidas, Formas Alternativas. Una de las aplicaciones inmediatas de la función beta es en la evaluación de una amplia variedad de integrales definidas que tienen la forma de la Ec. 10.59*a*. La sustitución de $t = \cos^2\theta$ convierte la función beta en

$$B(m+1, n+1) = \int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt, \tag{10.60}$$

lo cual es casi idéntico a la integral en la Ec. 10.9.[1] La sustitución adicional $t = u/(1+u)$ proporciona otra forma útil

$$B(m+1, n+1) = \int_0^\infty \frac{u^m}{(1+u)^{m+n+2}}\,du. \tag{10.61}$$

[1] El teorema de la convolución transformada de Laplace proporciona una derivación alternativa de la Ec. 10.60, cf. Ejercicio 15.10.2.

La función beta es una integral definida para establecer las representaciones integrales de la función de Bessel (Ejercicio 11.1.18) y la función hipergeométrica (Ejercicio 13.4.7).

Verificación de la Relación. $\pi a/\operatorname{sen}\pi a$. Si se considera $m = a$, $n = -a$, $-1 < a < 1$, entonces

$$\int_0^\infty \frac{u^a}{(1+u)^2}\,du = a!(-a)! \tag{10.62}$$

Mediante la integración de contorno se puede demostrar que esta integral equivale a $\pi a/\operatorname{sen}\pi a$ (Ejercicio 7.2.14) proporcionando así otro método de obtener la Ec. 10.32.

Derivación de la Fórmula de Duplicación de Legendre. La forma de la Ec. 10.59 sugiere que la función beta puede ser de utilidad para derivar la fórmula de duplicación utilizada en la sección anterior. Para $\mathscr{R}(z) > -1$,

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = \int_0^1 t^z(1-t)^z\,dt, \tag{10.63}$$

y mediante la sustitución $t = (1+s)/2$

$$\begin{aligned}\frac{z!z!}{(2z+1)!} &= 2^{-2z-1}\int_{-1}^1 (1-s^2)^z\,ds \\ &= 2^{-2z}\int_0^1 (1-s^2)^z\,ds;\end{aligned} \tag{10.64}$$

en donde la última igualdad es consistente debido a que el *integrando* es par. Para regresar esta integral a la forma de la Ec. 10.60, se sustituye $u = s^2$ y

$$\begin{aligned}\frac{z!z!}{(2z+1)!} &= 2^{-2z-1}\int_0^1 (1-u)^z u^{-1/2}\,du \\ &= 2^{-2z-1}\frac{z!(-\frac{1}{2})!}{(z+\frac{1}{2})!}\end{aligned} \tag{10.65}$$

Readaptando los términos y recordando que $(-\frac{1}{2})! = \pi^{1/2}$, estas ecuaciones se pueden reducir fácilmente a una forma de la fórmula de duplicación de Legendre,

$$z!(z+\tfrac{1}{2})! = 2^{-2z-1}\pi^{1/2}(2z+1)! \tag{10.66a}$$

Diviendo entre $(z+\frac{1}{2})$, se obtiene una forma alternativa de la fórmula de duplicación.

$$z!(z-\tfrac{1}{2})! = 2^{-2z}\pi^{1/2}(2z)! \tag{10.66b}$$

Aun cuando las integrales utilizadas en esta derivación están definidas solamente para $\mathscr{R}(z) > -1$, los resultados (Ecs. 10.66*a* y 10.66*b*) son con-

sistentes para todas las z mediante la continuación analítica.[1]

Utilizando el resultado del Ejercicio 10.1.12, la Ec.10.66*a* se puede volver a establecer (con $z = n$, un número entero) en la forma

$$(n + \tfrac{1}{2})! = \pi^{1/2}(2n + 1)!!/2^{n+1}. \tag{10.66c}$$

Frecuentemente esto resulta conveniente para eliminar los factoriales o fracciones.

Función Beta Incompleta. Del mismo modo que existe una función gamma incompleta (Sección 10.5), también existe una función beta incompleta,

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \qquad \begin{aligned} &0 \leqslant x \leqslant 1 \\ &p > 0 \\ &q > 0 \text{ (cuando } x = 1). \end{aligned} \tag{10.67}$$

Evidentemente $B_{x=1}(p, q)$ se transforma en la función beta regular (completa), Ec. 10.60. Un desarrollo de serie de potencias para $B_x(p, q)$ es el tema del Ejercicio 5.2.18 y del 5.7.9. La relación con las funciones hipergeométricas aparece en la Sección 13.4.

EJERCICIOS

10.4.1 Derive la fórmula de duplicación para la función factorial mediante la integración de $(\operatorname{sen} 2\theta)^{2n+1} = (2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta)^{2n+1}$ (y utilizando la función beta).

10.4.2 Verifique las siguientes identidades de función beta:

(a) $B(a, b) = B(a + 1, b) + B(a, b + 1)$,

(b) $B(a, b) = \dfrac{a+b}{b} B(a, b + 1)$,

(c) $B(a, b) = \dfrac{b-1}{a} B(a + 1, b - 1)$,

(d) $B(a, b)\, B(a + b, c) = B(b, c)\, B(a, b + c)$.

10.4.3 (a) Demuestre que

[1] Si $2z$ es un número entero negativo, se obtiene el resultado válido pero de poca utilidad $\infty = \infty$.

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2} x^{2n}\, dx = \begin{cases} \pi/2, & n=0 \\ \pi \dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}, & n=1,2,3\ldots \end{cases}$$

(b) Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} x^{2n}\, dx = \begin{cases} \pi, & n=0 \\ \pi \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, & n=1,2,3\ldots \end{cases}$$

10.4.4 Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n}\, dx = \begin{cases} 2^{2n+1} \dfrac{n!\,n!}{(2n+1)!}, & n>-1 \\ 2 \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, & n=0,1,2\ldots \end{cases}$$

10.4.5 Evalúe $\int_{-1}^{1} (1+x)^a (1-x)^b\, dx$ en términos de la función beta.

Respuesta. $2^{a+b+1} B(a+1, b+1)$.

10.4.6 Demuestre, mediante la función beta, que

$$\int_{t}^{z} \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\alpha}, \qquad 0<\alpha<1.$$

Este resultado se utiliza en la Sección 16.2 para resolver la ecuación integral generalizada de Abel.

10.4.7 Demuestre que la integral de Dirichlet

$$\iint x^p y^q\, dA = \frac{p!q!}{(p+q+2)!} = \frac{B(p+1, q+1)}{p+q+2},$$

en donde el intervalo de integración es el triángulo limitado por los ejes positivos x e y y la línea $x+y=1$.

10.4.8 Demuestre que

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2+2xy\cos\theta)}\, dx\, dy = \frac{\theta}{2\operatorname{sen}\theta}.$$

¿Cuáles son los límites en θ?
Sugerencia: Considere coordenadas xy oblicuas.

Respuesta. $-\pi<\theta<\pi$.

10.4.9 Evalúe (utilizando la función beta)

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta\, d\theta = \frac{(2\pi)^{3/2}}{16[(\frac{1}{4})!]^2}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n}\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}[(n-1)/2]!}{2(n/2)!} = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{para } n \text{ impar}, \\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{para } n \text{ par}. \end{cases}$

10.4.10 A partir de

$$J_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s!(s+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+\nu}$$

y

$$B(m+1, n+1) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1}\theta \cos^{2n+1}\theta \, d\theta,$$

demuestre que

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2\nu}\theta \cos(z\cos\theta)\, d\theta, \qquad \mathscr{R}(\nu) > -\tfrac{1}{2}.$$

Ya que $J_\nu(z)$ es una función de Bessel (Sección 11.1), se establece una representación integral útil de la función de Bessel.

10.4.11 Disponiendo del polinomio de Legendre asociado $P_m^m(x) = (2m-1)!!\,(1-x^2)^{m/2}$, Sección 12.5, demuestre que

(a) $$\int_{-1}^{1} [P_m^m(x)]^2\, dx = \frac{2}{(2m+1)}(2m)!, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) $$\int_{-1}^{1} [P_m^m(x)]^2 \frac{dx}{1-x^2} = 2\cdot(2m-1)!, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

10.4.12 Demuestre que

(a) $$\int_0^1 (x^2)^{s+\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-1/2}\, dx = \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!},$$

(b) $$\int_0^1 (x^2)^p(1-x^2)^q\, dx = \frac{1}{2}\frac{(p-\frac{1}{2})!\,q!}{(p+q+\frac{1}{2})!}.$$

10.5 Funciones Gamma Incompletas y Funciones Relacionadas

Generalizando la definición de Euler de la función gamma (Ec. 10.5), se definen las funciones gamma incompletas por medio de las integrales de límite *variable*

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\, dt, \qquad \mathscr{R}(a) > 0$$

y

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1}\, dt. \tag{10.68}$$

Evidentemente, las dos funciones están relacionadas para

$$\gamma(a, x) + \Gamma(a, x) = \Gamma(a). \tag{10.69}$$

La oportunidad de utilizar $\gamma(a, x)$ o $\Gamma(a, x)$ es simplemente un asunto de conveniencia. Cuando el parámetro a es un número entero positivo, las Ecs. 10.68 se pueden integrar completamente para originar

$$\gamma(n, x) = (n-1)!\left(1 - e^{-x}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!}\right)$$

$$\Gamma(n, x) = (n-1)!\, e^{-x}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{s!}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10.70}$$

Cuando a no es un número entero, en las Secciones 5.6 y 5.11 se establece un desarrollo de serie de potencias de $\gamma(a, x)$ para valores pequeños de x y un desarrollo asintótico de $\Gamma(a, x)$

$$\gamma(a, x) = x^a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!(a+n)},$$

$$\Gamma(a, x) = x^{a-1}e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)!}{(a-1-n)!}\cdot\frac{1}{x^n}$$

$$= x^{a-1}e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-a)!}{(-a)!}\cdot\frac{1}{x^n}. \tag{10.71}$$

Estas funciones gamma incompletas también pueden expresarse con bastante elegancia en términos de las funciones hipergeométricas confluentes (cf. Sección 13.5).

Integral Exponencial. Aunque la función gamma incompleta $\Gamma(a, x)$ en su forma general (Ecuación 10.68) solamente se presenta de manera poco frecuente en los problemas físicos, existe un caso especial que es bastante común y muy útil. Se define la integral exponencial mediante[1]

$$-Ei(-x) \equiv \int_x^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt = E_1(x). \tag{10.72}$$

Siendo así,

$$E_1(x) = \Gamma(0, x)$$
$$= \lim_{a\to 0}[\Gamma(a) - \gamma(a, x)]. \tag{10.73}$$

En este caso se requiere de un cuidado especial, ya que la integral en la Ec. 10.72 diverge logarítmicamente a medida que $x \to 0$. El término divergente en el desarrollo de serie para $\gamma(a, x)$, se puede separar

[1] La aparición de dos signos negativos en $-Ei(-x)$ es una monstruosidad histórica. AMS-55 designa esta integral como $E_1(x)$.

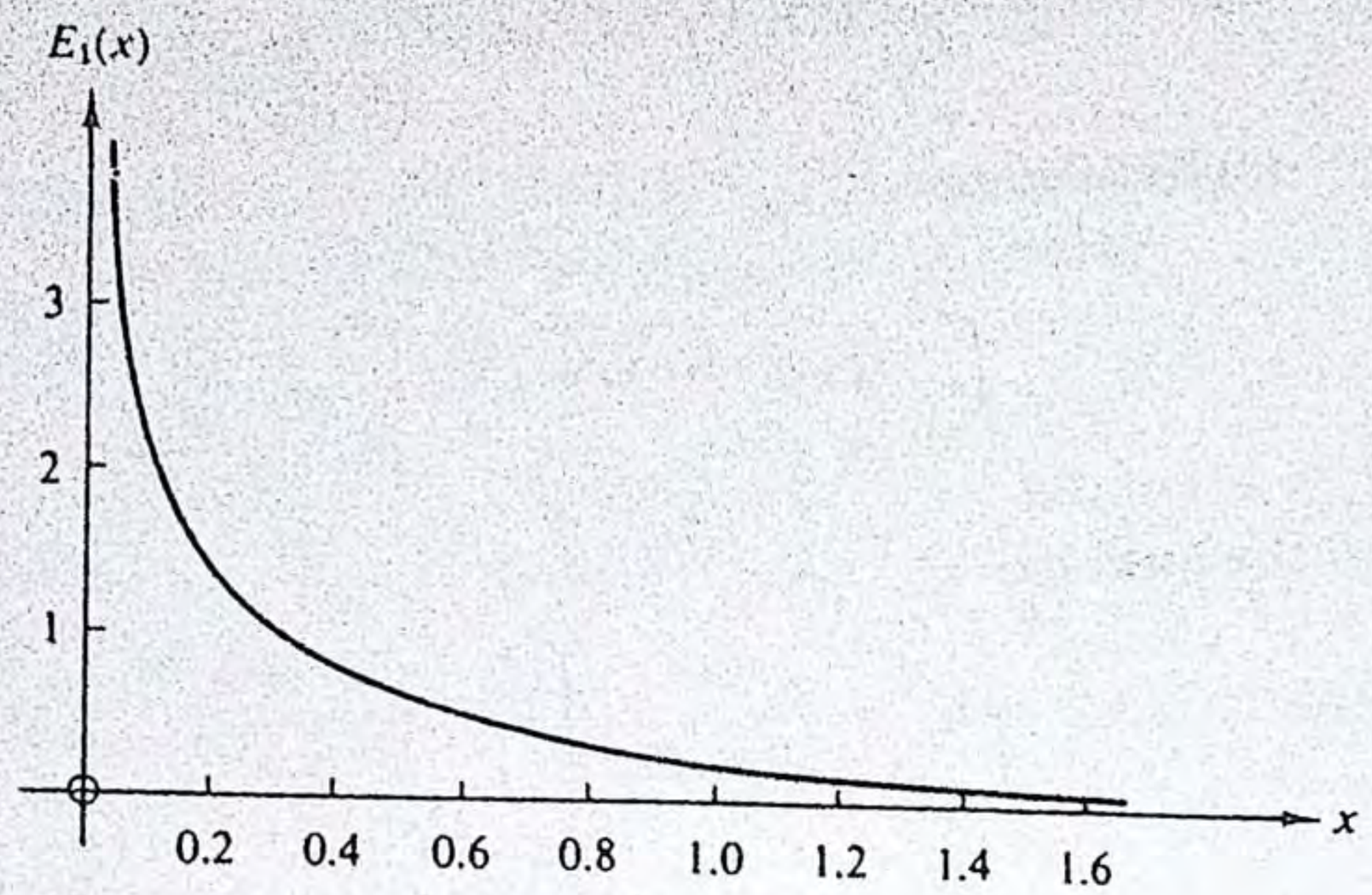


Fig. 10.7 La integral exponencial, $E_1(x) = -Ei(-x)$

$$E_1(x) = \lim_{a \to 0} \left[\frac{a\Gamma(a) - x^a}{a}\right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!}, \tag{10.74}$$

Utilizando la regla de L'Hospital y

$$\frac{d}{da}\{a\Gamma(a)\} = \frac{d}{da}\, a! = a!\,\mathrm{F}(a) \tag{10.74a}$$

y luego la Ec. 10.40,

$$E_1(x) = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!}, \tag{10.75}$$

de utilidad para x pequeña. En la Sección 5.11 se proporciona un desarrollo asintótico.

Otras formas especiales relacionadas con la integral exponencial son la integral de seno, integral de coseno y la integral de logaritmo definida por[1]

$$\begin{aligned} si(x) &= -\int_x^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \\ Ci(x) &= -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt \\ li(x) &= \int_0^x \frac{du}{\ln u} = Ei(\ln x). \end{aligned} \tag{10.76}$$

Mediante la transformación del argumento real al imaginario, se puede demostrar que

[1] Otra integral de seno está definida por $Si(x) = si(x) + \pi/2$.

$$si(x) = \frac{1}{2i}[Ei(ix) - Ei(-ix)] = \frac{1}{2i}[E_1(ix) - E_1(-ix)], \tag{10.77}$$

mientras que

$$Ci(x) = \tfrac{1}{2}[Ei(ix) + Ei(-ix)] = -\tfrac{1}{2}[E_1(ix) + E_1(-ix)], \quad |\arg x| < \frac{\pi}{2}. \tag{10.78}$$

Sumando estas dos relaciones se obtiene

$$Ei(ix) = Ci(x) + i\, si(x), \tag{10.79}$$

demostrando así que la relación entre estas integrales es exactamente análoga a la existente entre e^{ix}, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

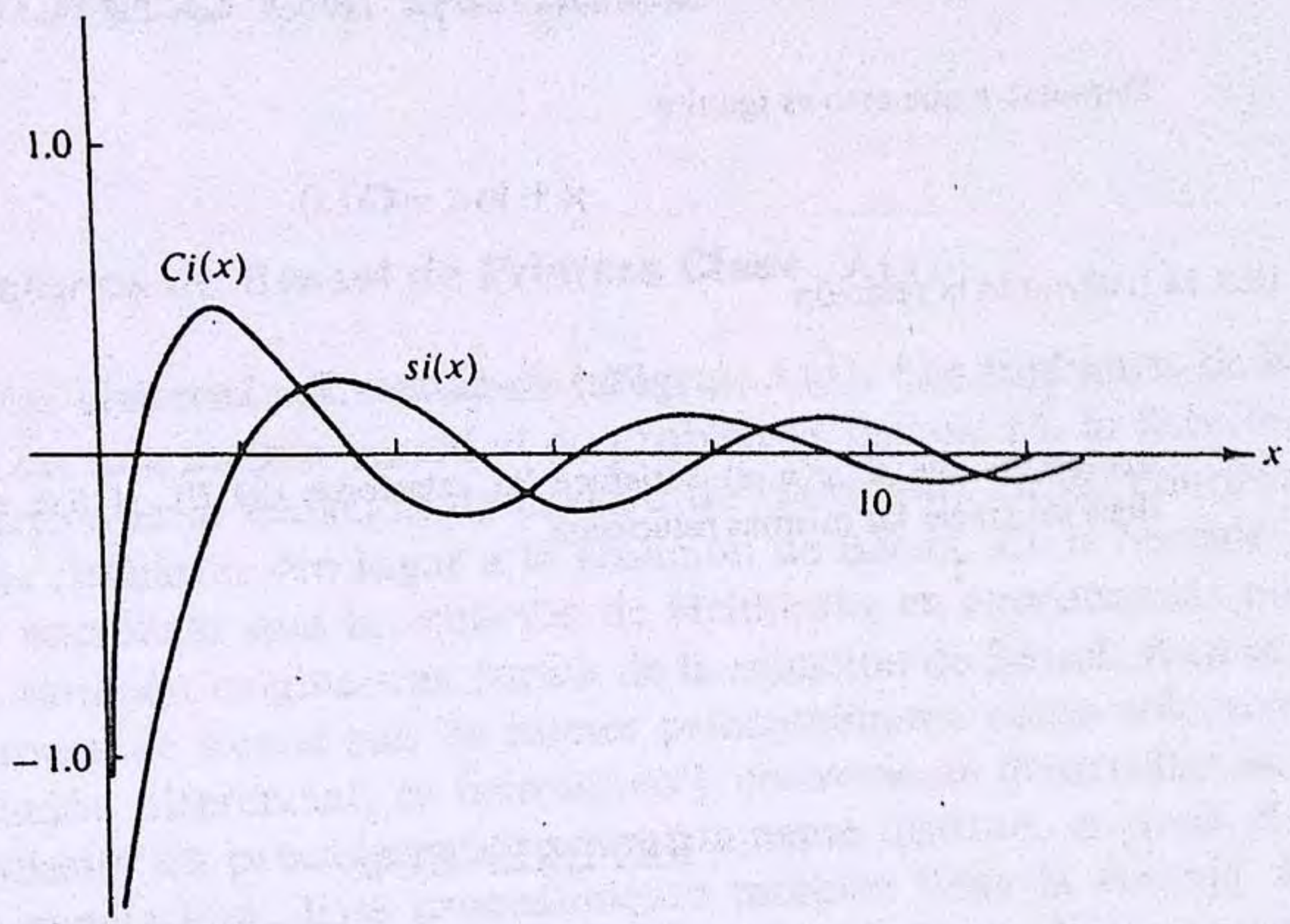


Fig. 10.8 Integrales de seno y coseno.

En la Sección 5.11 se establecen desarrollos asintóticos de $Ci\,(x)$ y $si\,(x)$. El desarrollo de serie de potencias alrededor del origen para $Ci\,(x)$, $si\,(x)$ y $li\,(x)$ se puede obtener de los correspondientes para la integral exponencial, $E_1(x)$ o por medio de la integración directa, Ejercicio 10.5.10.

Integrales de Error. Las integrales de error

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt, \tag{10.80a}$$

$$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2}\, dt,$$

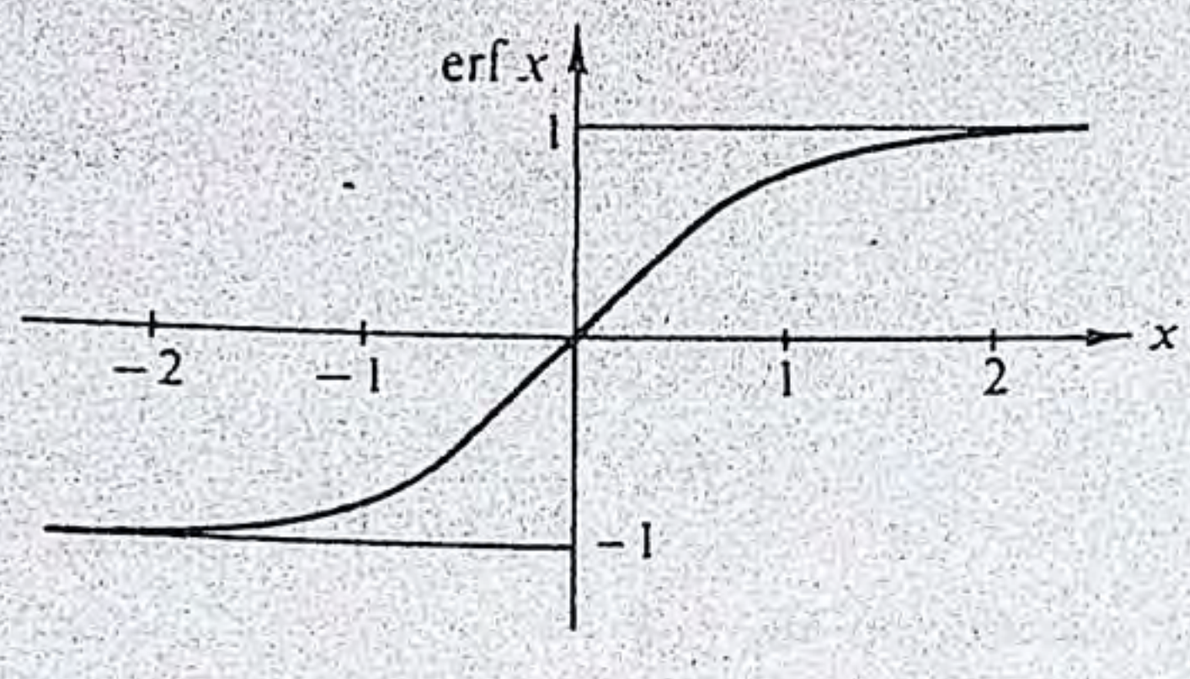


Fig. 10.9 Función de error, erf x.

se introducen en la Sección 5.11. En la misma se desarrollan las formas asintóticas. De acuerdo con la forma general de los *integrandos* y la Ec. 10.6, es de esperarse que erf z y erfc z se puedan establecer a modo de funciones gamma incompletas con $a = \frac{1}{2}$. Las relaciones son

$$\operatorname{erf} z = \pi^{-1/2}\gamma(\tfrac{1}{2}, z^2)$$
$$\operatorname{erfc} z = \pi^{-1/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}, z^2). \tag{10.80b}$$

El desarrollo de serie de potencias de erf z se deriva directamente de la Ec. 10.71.

EJERCICIOS

10.5.1 Demuestre que

$$\gamma(a, x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)!}{(a+n)!} x^{a+n}.$$

(a) Mediante la integración por partes repetida.
(b) Demuestre esta relación mediante la transformación a la Ec. 10.71.

10.5.2 Demuestre que

(a) $\dfrac{d^m}{dx^m}[x^{-a}\gamma(a, x)] = (-1)^m x^{-a-m}\gamma(a+m, x)$,

(b) $\dfrac{d^m}{dx^m}[e^x\gamma(a, x)] = e^x \dfrac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-m)}\gamma(a-m, x)$.

10.5.3 Demuestre que $\gamma(a, x)$ y $\Gamma(a, x)$ satisfacen las relaciones de recurrencia.

(a) $\gamma(a+1, x) = a\gamma(a, x) - x^a e^{-x}$,
(b) $\Gamma(a+1, x) = a\Gamma(a, x) + x^a e^{-x}$.

10.5.4 El potencial producido por un electrón de hidrógeno 1*s* está definido por (Ejercicio 12.8.6)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\left\{\frac{1}{2r}\gamma(3, 2r) + \Gamma(2, 2r)\right\}.$$

(a) Para $r \ll 1$ demuestre que

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\left\{1 - \frac{2}{3}r^2 + \cdots\right\}.$$

(b) Para $r \gg 1$ demuestre que

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\cdot\frac{1}{r}.$$

Nota. El cómputo de los valores intermedios de r, Ecs. 10.70 es conveniente.

10.5.5 El potencial de un electrón de hidrógeno 2*p* se encuentra que es (Ejercicio 12.8.7)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{24a_0}\left\{\frac{1}{r}\gamma(5, r) + \Gamma(4, r)\right\}$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{120a_0}\left\{\frac{1}{r^3}\gamma(7, r) + r^2\Gamma(2, r)\right\}P_2(\cos\theta).$$

Aquí, r se expresa en unidades de a_0, el radio de Bohr. $P_2(\cos\theta)$ es un polinomio de Legendre (Sección 12.1).

(a) Para $r \ll 1$, demuestre que

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{a_0}\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{120}r^2P_2(\cos\theta) + \cdots\right\}.$$

(b) Para $r \gg 1$, demuestre que

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{a_0 r}\left\{1 - \frac{6}{r^2}P_2(\cos\theta) + \cdots\right\}.$$

10.5.6 Demuestre que la integral exponencial

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\cdot n!}.$$

γ es la constante de Euler-Mascheroni.

10.5.7 Demuestre que $E_1(z)$ puede indicarse en la forma

$$E_1(z) = e^{-z}\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t}\,dt.$$

Demuestre también que se debe imponer la condición $|\arg z| \leq \pi/2$.

10.5.8 Relacionada con la integral exponencial (Ec. 10.72) por medio del cambio simple de variable se tiene la función

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}\,dt.$$

Demuestre que $E_n(x)$ satisface la relación de recurrencia

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n}e^{-x} - \frac{x}{n}E_n(x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

10.5.9 Con $E_n(x)$ definida por el Ejercicio 10.5.8, demuestre que $E_n(0) = 1/(n-1)$, $n > 1$.

10.5.10 Establezca los siguientes desarrollos de serie de potencias

(a) $$si(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

(b) $$Ci(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!}.$$

10.5.11 Un análisis de la antena lineal de alimentación central origina la expresión

$$\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt.$$

Demuestre que esto es igual a

$$\gamma + \ln x - Ci(x).$$

10.5.12 Utilizando la relación

$$\Gamma(a) = \gamma(a, x) + \Gamma(a, x)$$

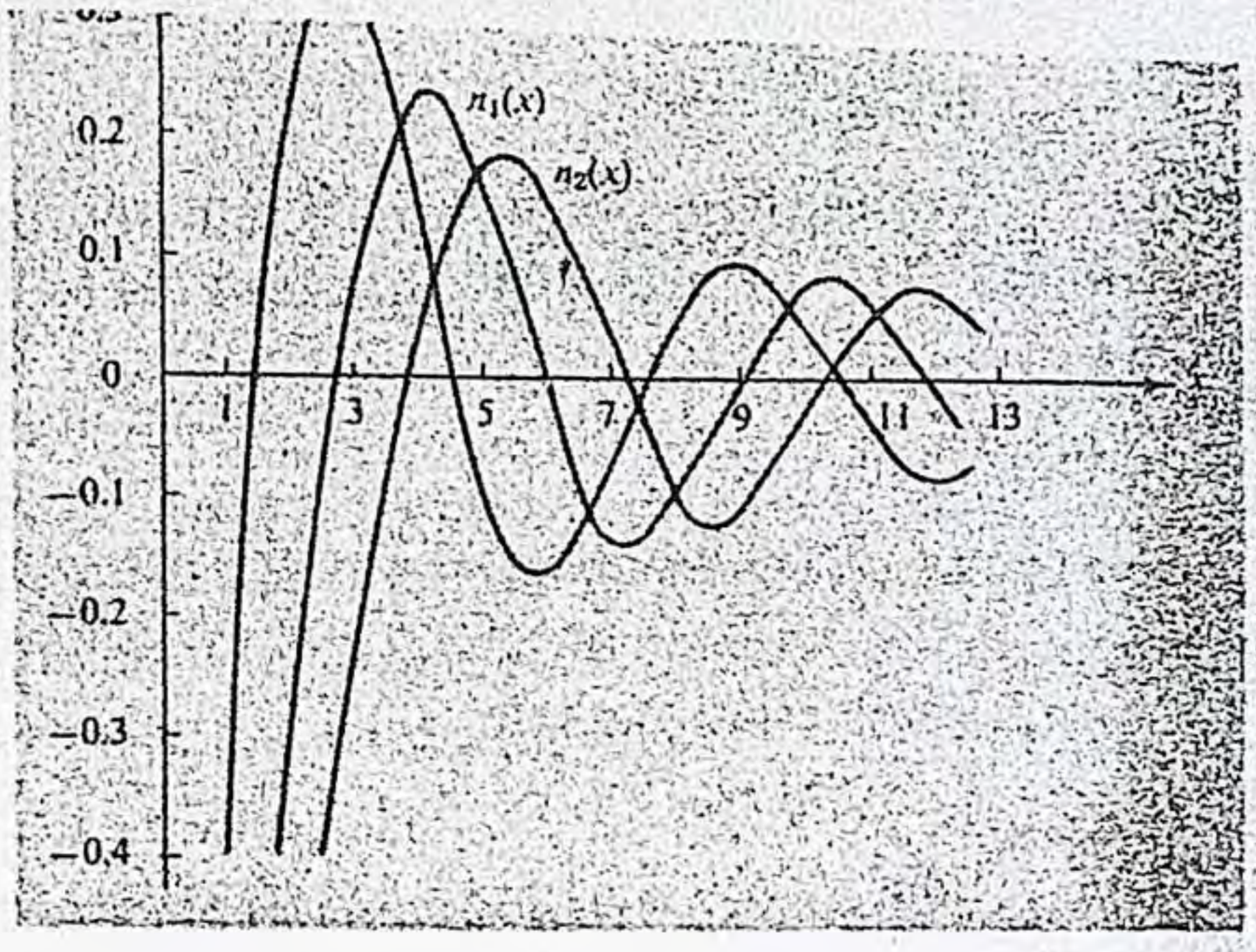
demuestre que si $\gamma(a, x)$ satisface las relaciones del Ej. 10.5.2, entonces, $\Gamma(a, x)$ debe satisfacer las mismas relaciones.

REFERENCIAS

AMS-55, Manual de Funciones Matemáticas con Fórmulas, Gráficas y Tablas Matemáticas, Departamento de Comercio de los EE.UU. de A., National Bureau of Standards, Serie 55 de Matemáticas Aplicadas, M. Abramowitz e I. A. Stegun, eds. Contiene una gran diversidad de información relacionada con las funciones gamma, funciones gamma incompletas, integrales exponenciales, funciones de error y funciones relacionadas —Capítulos 4-6.

ART, Emil, *The Gamma Function.* (Traducido al inglés por Michael Butler). Nueva York: Holt, Rinehart y Winston (1964). Demuestra que si una función $f(x)$ es uniforme (convexa logarítmicamente) e igual a $(n-1)!$ cuando $x = n$, es la función gamma.

DAVIS, H. T., *Tables of the Higher Mathematical Functions.* Bloomington, Indiana: Principia Press (1933). El volumen I contiene información acerca de la función gamma y las funciones poligamma.



CAPITULO 11

FUNCIONES DE BESSEL

11.1 Funciones de Bessel de Primera Clase, $J_\nu(x)$

Función Generadora, orden de integral, $J_n(x)$. Las funciones de Bessel aparecen en una amplia variedad de problemas físicos. En la Sección 2.6, la separación de la ecuación de onda o de Helmholtz en las coordenadas cilíndricas circulares dio lugar a la ecuación de Bessel. En la Sección 11.7, se podrá encontrar que la ecuación de Helmholtz en coordenadas polares esféricas también origina una forma de la ecuación de Bessel. Aun cuando las funciones de Bessel son de interés principalmente como soluciones de una ecuación diferencial, es instructivo y conveniente desarrollar las mismas mediante un procedimiento completamente distinto, es decir el de la función generadora. Este procedimiento también tiene la ventaja de enfocar la atención sobre las propias funciones en lugar de las ecuaciones diferenciales a las cuales satisfacen. Procederemos a introducir una función de dos variables

$$g(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)}. \tag{11.1}$$

Forma de Serie. Desarrollando esta función generadora en una serie de Laurent (Sección 6.5), se obtiene

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n, \tag{11.2}$$

y $J_n(x)$, que constituye el coeficiente de t^n, se denomina función de Bessel de primera clase con orden integral n.

Desarrollando los exponenciales se tiene el producto de serie de Maclaurin en $xt/2$ y $-x/2t$, respectivamente,

$$e^{xt/2} \cdot e^{-x/2t} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}. \tag{11.3}$$

Para cierta s se tiene t^n $(n \geqslant 0)$ a partir de

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!} \tag{11.4}$$

Siendo así, el coeficiente de t^n es[1]

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} = \frac{x^n}{2^n n!} - \cdots \tag{11.5}$$

Esta forma de serie manifiesta el comportamiento de la función de Bessel $J_n(x)$ para los valores pequeños de x y permite la evaluación numérica de $J_n(x)$. Los resultados para J_0, J_1 y J_2 se muestran en la Fig. 11.1. De acuerdo con la Sección 5.3, el error al usar solamente un número finito de términos en la evaluación numérica es menor que el primer término omitido. Por ejemplo, si se requiere $J_n(x)$ con precisión de $\pm 1\%$, el primer término solo de la Ec. 11.5 será suficiente considerando que la relación entre el segundo y el primer término sea menor de 1% (en magnitud) o sea $x < 0.2(n+1)^{1/2}$. Las funciones de Bessel oscilan pero *no* son periódicas, excepto en el límite a medida que $x \to \infty$ (Sección 11.6). La amplitud de $J_n(x)$ no es constante sino que disminuye asintóticamente como $x^{-1/2}$.

La Ec. 11.5 de hecho es consistente para $n < 0$, proporcionando también

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}, \tag{11.6}$$

lo cual equivale a sustituir n por $-n$ en la Ec. 11.5. Ya que n es un número entero (aquí), $(s-n)! \to \infty$ para $s = 0, \ldots, (n-1)$. En consecuencia,

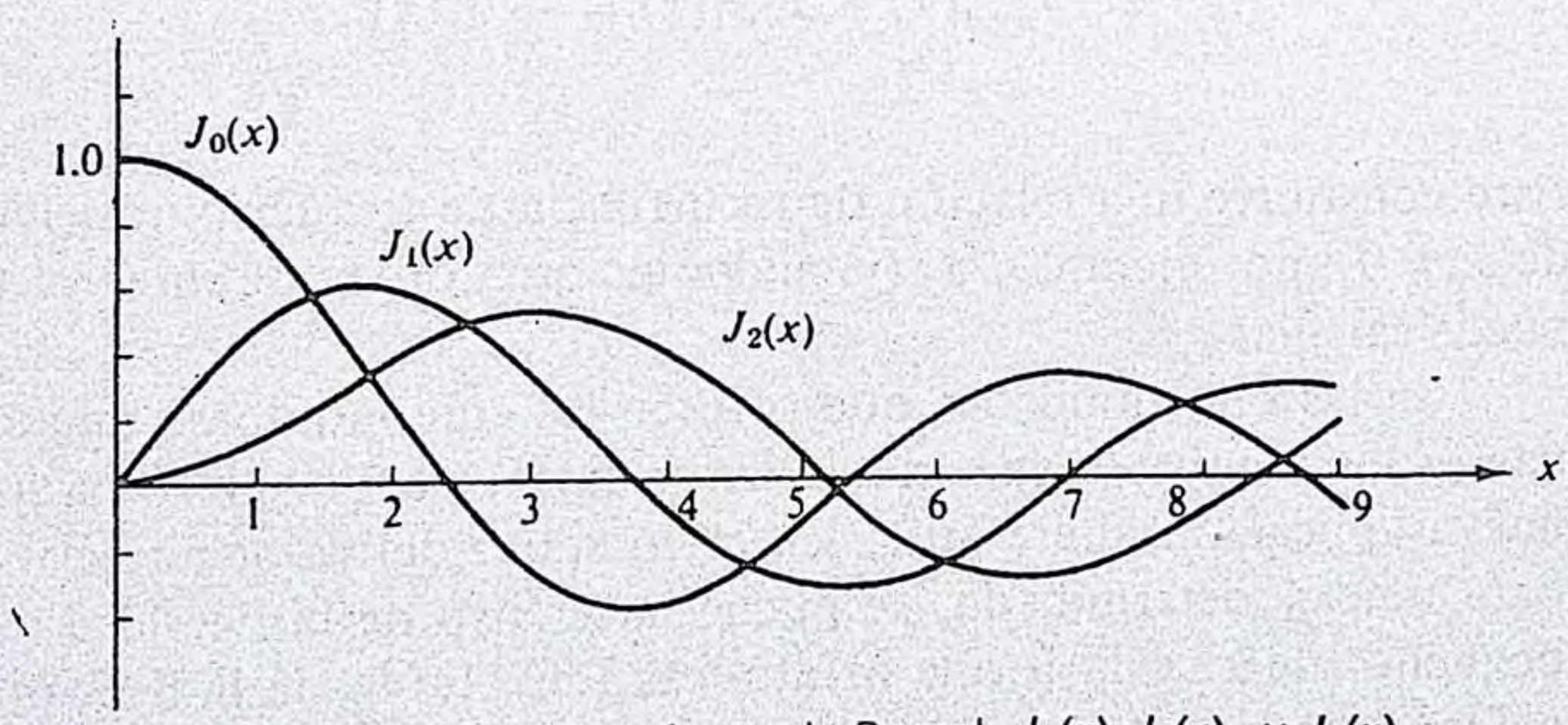


Fig. 11.1 Funciones de Bessel, $J_0(x)$, $J_1(x)$ y $J_2(x)$

[1] De acuerdo con las etapas que originan esta serie y a partir de sus características de convergencia, es evidente que esta serie se puede utilizar con x sustituida por z y siendo z cualquier punto en el plano complejo finito.

la serie puede considerarse que se inicia con $s = n$. Sustituyendo s por $s + n$, se obtiene

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \tag{11.7}$$

demostrando de inmediato que $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ no son independientes sino que están relacionadas por medio de

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n \text{ número entero}) \tag{11.8}$$

Estas expresiones de serie (Ecs. 11.5 y 11.6) se pueden utilizar con n sustituida por ν para *definir* $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ para ν no integral (cf. Ejercicio 11.1.7).

Relaciones de Recurrencia. Las relaciones de recurrencia para $J_n(x)$ y sus derivadas se pueden obtener mediante la operación en la serie, Ec. 11.5, aun cuando esto requiere de cierta capacidad de discernimiento (o una gran proporción de operaciones de ensayo y error). La verificación de las relaciones de recurrencia conocidas es directa, Ejercicio 11.1.7. En este caso, es conveniente obtener la misma a partir de la función generadora, $g(x, t)$. Diferenciando la Ec. 11.1 parcialmente con respecto a t, se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) &= \frac{1}{2} x\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{(x/2)(t - 1/t)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, J_n(x) t^{n-1} \end{aligned} \tag{11.9}$$

y sustituyendo la Ec. 11.2 en cuanto al exponencial e igualando los coeficientes de potencias similares para t[1] se obtiene

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x). \tag{11.10}$$

Esto constituye una relación de recurrencia de tres términos. Disponiendo de J_0 y J_1, por ejemplo, J_2 (y cualquier otro orden de integral para J_n) se puede calcular.

Con las oportunidades que ofrecen las computadoras digitales modernas (y los requisitos que exigen las mismas), la Ec. 11.10 ha logrado una nueva aplicación interesante. En el cómputo del valor numérico de $J_N(x_0)$ para una x_0, determinada, se puede hacer uso de la Ec. 11.5 para valores pequeños de x, o la forma asintótica, Ec. 11.144 de la Sección 11.6 para valores grandes de x. Un procedimiento más adecuado, en términos de

[1] Esto depende del hecho de que la representación en la forma de serie de potencias es única (Secciones 5.7, 6.5).

precisión y utilización de la máquina, es el uso de la relación de recurrencia, Ec. 11.10 y la mecanización.[2] Con $n \gg N$ y $n \gg x_0$, suponga

$$J_{n+1}(x_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad J_n(x_0) = \alpha,$$

en donde α es algún número pequeño. Siendo así, la Ec. 11.10 origina $J_{n-1}(x_0)$, $J_{n-2}(x_0)$, etc., y finalmente $J_0(x_0)$. Ya que α es arbitrario, todas las J_n's quedan afectadas por un factor común. Este factor común se determina por la condición

$$J_0(x_0) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x_0) = 1. \tag{11.10a}$$

(Establezca $t = 1$ en la Ec. 11.2.) La precisión de este cálculo se comprueba al ensayar nuevamente $n' = n + 3$. Esta técnica proporciona la $J_N(x_0)$ deseada y todas las J de índice integral bajo hasta J_0.

El cómputo numérico de alta precisión y velocidad constituye más o menos un arte. Las modificaciones y refinamientos de esta y otras técnicas numerosas se proponen año con año. Para una mayor información acerca del "estado del arte o tecnología", el estudiante tendrá que consultar la literatura correspondiente, y esto significa, principalmente, la revista *Mathematics of Computation.*

Diferenciando la Ec. 11.1 parcialmente con respecto a x, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) &= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) e^{(x/2)(t - 1/t)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x) t^n. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Nuevamente, sustituyendo en la Ec. 11.2 e igualando los coeficientes de potencias similares de t, se obtiene el resultado

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x). \tag{11.12}$$

Como caso especial de esta relación de recurrencia,

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{11.13}$$

Sumando las Ecs. 11.10 y 11.12 y dividiendo entre 2, se tiene

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J_n'(x). \tag{11.14}$$

Multiplicando por x^n y volviendo a arreglar los términos se obtiene

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x). \tag{11.15}$$

1. A. Stegun, M. Abramowitz, MTAC-11, 255-257 (1957).

Restando la Ec. 11.12 de la 11.10 y dividiendo entre 2 se tiene

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x). \tag{11.16}$$

Multiplicando por x^{-n} y volviendo a arreglar los términos, se obtiene

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \tag{11.17}$$

Ecuación Diferencial de Bessel. Suponga que se considera un conjunto de ecuaciones $Z_\nu(x)$ que satisface las relaciones de recurrencia básicas (Ecs. 11.10 y 11.12), pero en que ν no necesariamente es un número entero y Z_ν no necesariamente está definido por la serie (Ec. 11.5). La Ec. 11.14 puede volver a establecerse en la forma ($n \to \nu$)

$$x Z_\nu'(x) = x Z_{\nu-1}(x) - \nu Z_\nu(x). \tag{11.18}$$

Al diferenciar con respecto a x, se tiene

$$x Z_\nu''(x) + (\nu + 1)Z_\nu' - x Z_{\nu-1}' - Z_{\nu-1} = 0. \tag{11.19}$$

Multiplicando por x y luego restando la Ec. 11.18 multiplicada por ν se obtiene

$$x^2 Z_\nu'' + x Z_\nu' - \nu^2 Z_\nu + (\nu - 1)x Z_{\nu-1} - x^2 Z_{\nu-1}' = 0. \tag{11.20}$$

Ahora, se procede a restablecer la Ec. 11.16 y sustituir n por $\nu - 1$.

$$x Z_{\nu-1}' = (\nu - 1)Z_{\nu-1} - x Z_\nu. \tag{11.21}$$

Utilizando esto para eliminar $Z_{\nu-1}$ y $Z_{\nu-1}'$ de la Ec. 11.20, se obtiene finalmente

$$x^2 Z_\nu'' + x Z_\nu' + (x^2 - \nu^2)Z_\nu = 0. \tag{11.22}$$

Esto es justamente la ecuación de Bessel. En consecuencia *cualesquier* funciones, $Z_\nu(x)$, que satisfagan las relaciones de recurrencia (Ecs. 11.10 y 11.12, 11.14 y 11.16 u 11.15 y 11.17) también satisfacen la ecuación de Bessel; es decir, Z_ν desconocidas son las funciones de Bessel. En particular, hemos demostrado que las funciones $J_n(x)$, definidas por la función generadora, satisfacen la ecuación de Bessel.

Si el argumento es kx en lugar de x, la Ec. 11.22 se transforma en

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} Z_\nu(kx) + x \frac{d}{dx} Z_\nu(kx) + (k^2x^2 - \nu^2)Z_\nu(kx) = 0. \tag{11.22a}$$

Representación Integral. Una forma particularmente útil y poderosa de tratar las funciones de Bessel utiliza la representación integral. Si regresamos a la función generadora (Ec. 11.12) y se sustituye $t = e^{i\theta}$,

$$e^{ix\operatorname{sen}\theta} = J_0(x) + 2(J_2(x)\cos 2\theta + J_4(x)\cos 4\theta + \cdots)$$
$$+ 2i(J_1(x)\operatorname{sen}\theta + J_3(x)\operatorname{sen}3\theta + \cdots), \qquad (11.23)$$

en que hemos utilizado las relaciones

$$J_1(x)e^{i\theta} + J_{-1}(x)e^{-i\theta} = J_1(x)(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$
$$= 2iJ_1(x)\operatorname{sen}\theta, \qquad (11.24)$$
$$J_2(x)e^{2i\theta} + J_{-2}(x)e^{-2i\theta} = 2J_2(x)\cos 2\theta,$$

y así sucesivamente.

En la notación de suma,

$$\cos(x\operatorname{sen}\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta),$$
$$\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\operatorname{sen}[(2n-1)\theta], \qquad (11.25)$$

igualando las partes real e imaginaria, respectivamente. Mediante la utilización de las propiedades de ortogonalidad del coseno y seno,[1]

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}$$
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}, \qquad (11.26)$$

en donde n y m son números enteros *positivos* (se excluye al cero),[2] se obtiene

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\operatorname{sen}\theta)\cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} J_n(x), & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}, \end{cases} \qquad (11.27)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ J_n(x), & n \text{ impar}, \end{cases} \qquad (11.28)$$

Si estas dos ecuaciones se suman entre sí

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(x\operatorname{sen}\theta)\cos n\theta + \operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen} n\theta] \, d\theta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\operatorname{sen}\theta) \, d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (11.29)$$

[1] Son funciones propias de una ecuación autoadjunta (ecuación del oscilador lineal) y satisfacen las condiciones limitantes apropiadas cf. Secciones 9.2 y 14.1.

[2] La Ec. 11.26 es consistente ya sea para $n = 0$ o $m = 0$ pero no para ambas iguales a cero.

Como caso especial

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\, d\theta. \tag{11.30}$$

Esta representación integral (Ec. 11.29) se puede obtener de un modo algo más directo al utilizar la integración de contorno (cf. Ejercicio 11.1.6). Existen muchas otras representaciones integrales (cf. Ejercicio 11.1.18).

EJEMPLO 11.1.1 DIFRACCION DE FRAUNHOFER, ABERTURA CIRCULAR

En la teoría de la difracción a través de una abertura circular se encuentra la integral

$$\Phi \sim \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{ibr\operatorname{sen}\theta}\, d\theta r\, dr, \tag{11.31}$$

para Φ, la amplitud de la onda difractada. Aquí, θ es un ángulo acimutal en el plano de la abertura circular de radio a, y α es el ángulo definido por un punto en la pantalla abajo de la abertura circular con relación a la normal a través del punto central. El parámetro b está definido por

$$b = \frac{2\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\alpha, \tag{11.32}$$

en donde λ es la longitud de onda de la onda incidente. Los otros símbolos están definidos en la Fig. 11.2. Expresando el exponencial en la forma trigonométrica y utilizando la Ec. 11.30, se obtiene[1]

$$\Phi \sim 2\pi \int_0^a J_0(br)\, r\, dr. \tag{11.33}$$

La Ec. 11.15 nos permite integrar la Ec. 11.33 inmediatamente para obtener

$$\Phi \sim \frac{2\pi ab}{b^2} J_1(ab) \sim \frac{\lambda a}{\operatorname{sen}\alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\alpha\right). \tag{11.34}$$

La intensidad de la luz en el modelo de difracción es proporcional a Φ^2 y

$$\Phi^2 \sim \left\{\frac{J_1[(2\pi a/\lambda)\operatorname{sen}\alpha]}{\operatorname{sen}\alpha}\right\}^2. \tag{11.35}$$

De acuerdo con la Tabla 11.1, en que se incluyen los ceros de las funciones de Bessel y sus primeras derivadas, se tendrán ceros en

[1] También nos podemos referir al Ejercicio 11.1.16 (b).

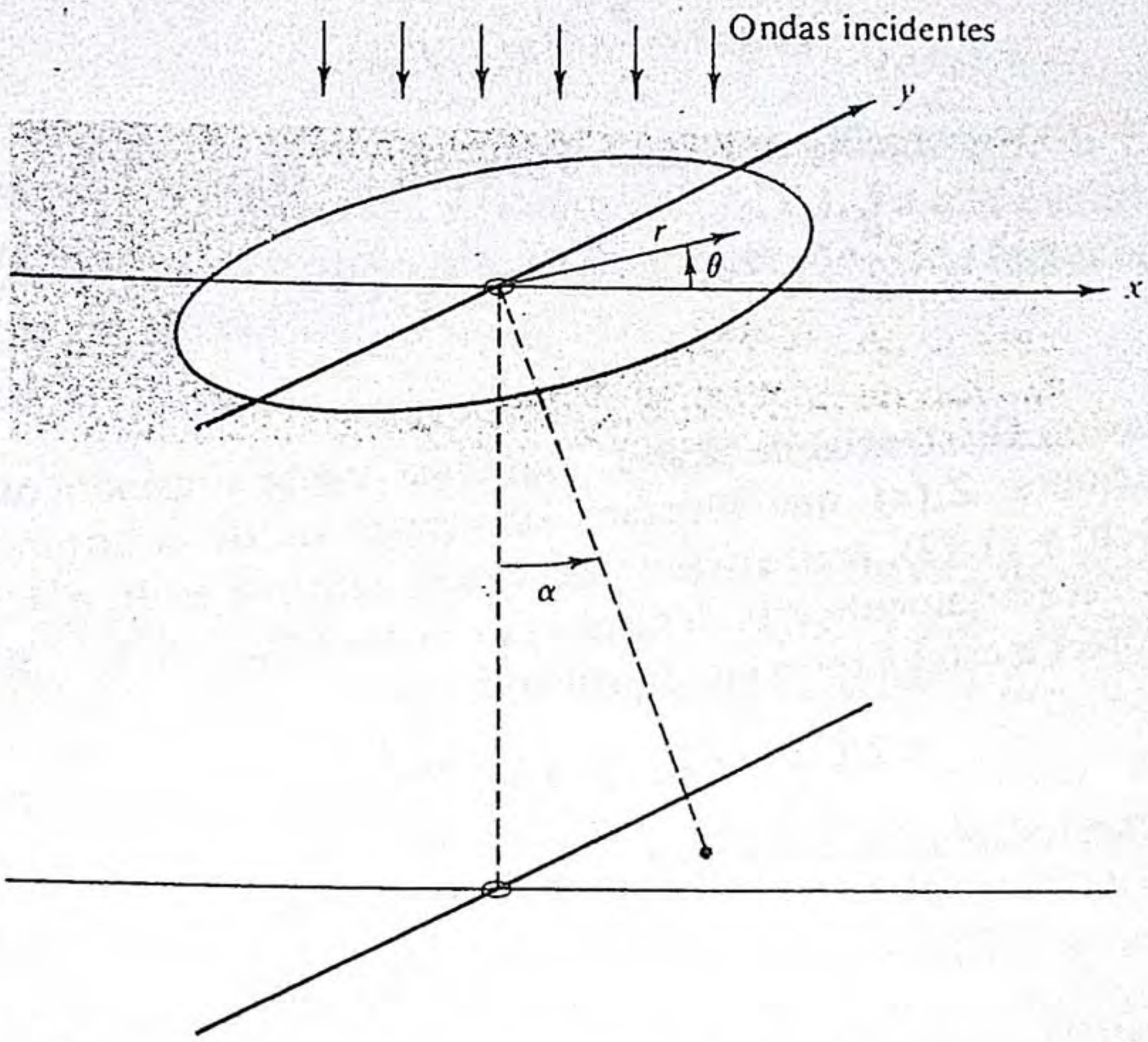


Fig. 11.2 Difracción de Fraunhofer. Abertura circular.

$$\frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\alpha = 3.8317\cdots \tag{11.36}$$

o

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3.8317\lambda}{2\pi a}. \tag{11.37}$$

TABLA 11.1

Ceros de las Funciones de Bessel y sus primeras Derivadas

Número de cero	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178
	$J_0'(x)$	$J_1'(x)$	$J_2'(x)$	$J_3'(x)$		
1	3.8317	1.8412	3.0542	4.2012		
2	7.0156	5.3314	6.7061	8.0152		
3	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459		

Para la luz verde, $\lambda = 5.5 \times 10^{-5}$ cm. En consecuencia, si $a = 0.5$ cm,

$$\alpha \approx \operatorname{sen} \alpha = 6.7 \times 10^{-5} \text{ (radián)}$$

$$\approx 14 \text{ segundos de arco,} \tag{11.38}$$

lo cual demuestra que la flexión o dispersión del rayo de luz es sumamente pequeña. En caso de haberse conocido este análisis en el siglo XVII, el argumento en contra de la teoría ondulante de la luz se habría derrumbado.

A mediados del siglo XX, este mismo modelo de difracción aparece en la dispersión de las partículas nucleares por el núcleo atómico, una demostración definitiva de las propiedades ondulantes de las partículas nucleares.

Otras raíces de las funciones de Bessel y sus primeras derivadas se pueden encontrar en la obra de C. L. Beattie, "Table of First 700 Zeros of Bessel Functions", *Bell. Tech. J.* 37, 689 (1958) y en la monografía 3055 de Bell. *Nota.* $J_0'(x) = -J_1(x)$.

Otro ejemplo del uso de las funciones de Bessel y sus raíces lo proporciona la cavidad resonante electromagnética.

EJEMPLO 11.1.2 CAVIDAD RESONANTE CILINDRICA

En el interior de la cavidad resonante, las ondas electromagnéticas oscilan con una dependencia del tiempo $e^{-i\omega t}$. De acuerdo con el Ejemplo 2.6.1, el componente z (E_z, solamente parte del espacio) satisface la ecuación escalar de Helmholtz

$$\nabla^2 E_z + \alpha^2 E_z = 0, \tag{11.39}$$

en donde $\alpha^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$. Asimismo, del Ejemplo 2.6.1,

$$(E_z)_{mnk} = \sum_{m,n} J_m(\gamma_{mn} \rho) e^{\pm im\varphi} [a_{mn} \operatorname{sen} kz + b_{mn} \cos kz]. \tag{11.40}$$

Para las superficies terminales en $z = 0$ y $z = l$ (tal como en la Fig. 11.3), procedamos a establecer $a_{mn} = 0$, y

$$k = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.41}$$

Siendo así, las ecuaciones de Maxwell garantizan que los campos eléctricos tangenciales E_ρ y E_φ desaparecen en $z = 0$ y l. Esto constituye el modo MT o magnético transversal de oscilación. Se tiene (Ejemplo 2.6.1)

$$\gamma^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k^2$$

$$= \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2}. \tag{11.42}$$

Pero existe la condición limitante usual de que $E_z(\rho = a) = 0$. En consecuencia, debemos establecer

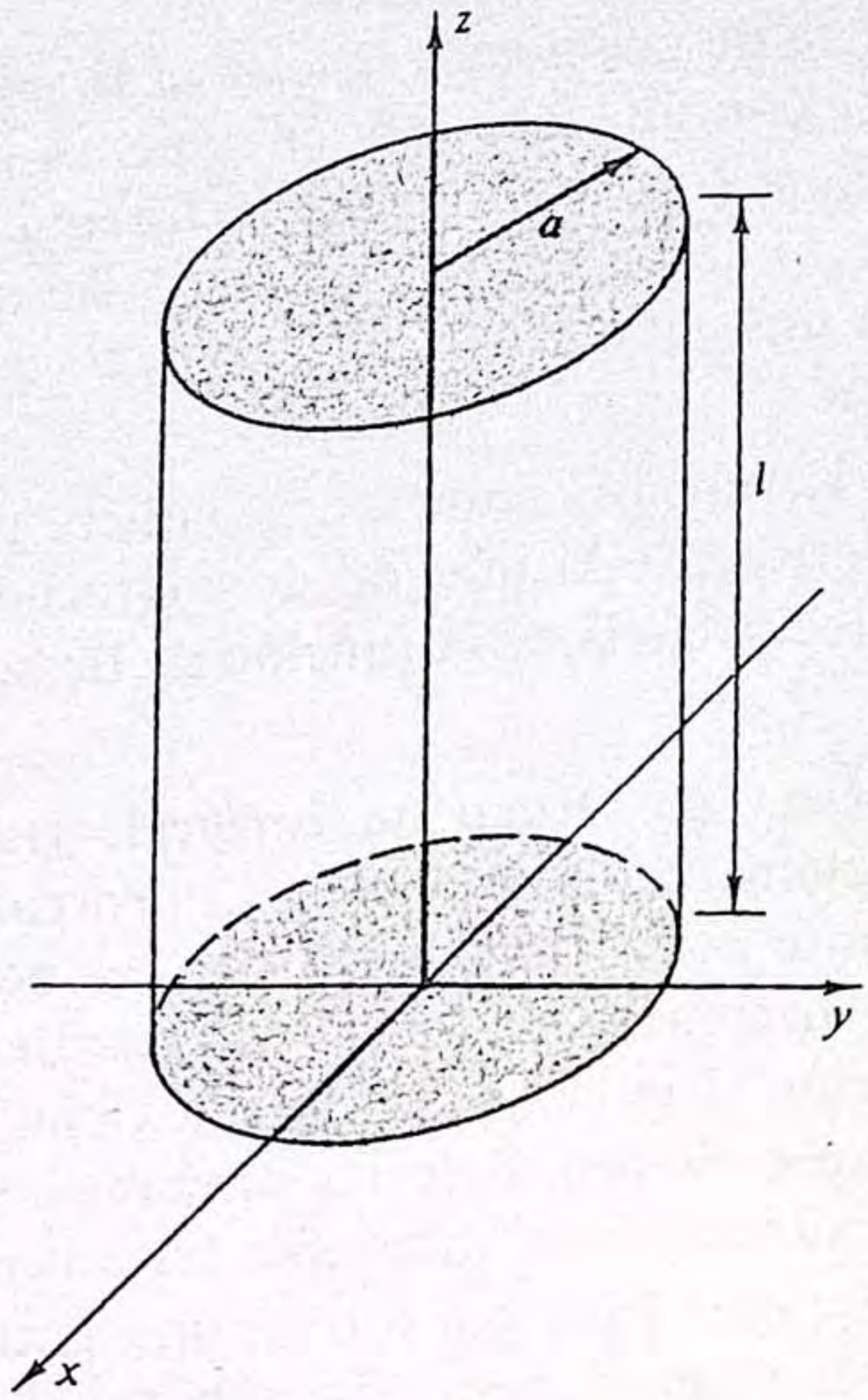


Fig. 11.3 Cavidad resonante cilíndrica

$$\gamma_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a} \tag{11.43}$$

en donde α_{mn} es el enésimo cero de J_m.

El resultado de las dos condiciones limitantes y la constante de separación m^2 es que la frecuencia angular de la oscilación depende de tres parámetros discretos

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\frac{\alpha_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2\pi^2}{l^2}}, \qquad \begin{cases} m = 0, 1, 2 \cdots \\ n = 1, 2, 3 \cdots \\ p = 0, 1, 2 \cdots \end{cases} \tag{11.44}$$

Estas son las frecuencias resonantes permisibles.

Procedimientos Alternativos. Las funciones de Bessel se introducen aquí por medio de la función generadora, Ec. 11.2. Existe la posibilidad de otros procedimientos. Estableciendo una lista de las diversas posibilidades, se tiene

1. Función generadora (magia negra), Ec. 11.2
2. Solución de serie correspondiente a la ecuación diferencial de Bessel, Sección 8.4.
3. Integrales de contorno; algunos escritores prefieren comenzar con las definiciones de las integrales de contorno de las funciones de

Hankel, Secciones 7.4 y 11.4, y desarrollar la función de Bessel $J_\nu(x)$ a partir de las funciones de Hankel.

4. Solución directa de problemas físicos: el Ejemplo 11.1.1, difracción de Fraunhofer con una abertura circular, es ilustrativo de esto. Incidentalmente, la Ec. 11.31 se puede tratar por medio de un desarrollo de serie, si así se desea. Feynman[1] desarrolla las funciones de Bessel a partir de la consideración de los resonadores de cavidad.

En caso de que la función generadora pudiera parecer demasiado arbitraria, se puede derivar de la integral de contorno, Ejercicio 11.1.16, o de las relaciones de recurrencia de la función de Bessel, Ejercicio 11.1.6.

Funciones de Bessel de Orden no Integral. Estos diversos procedimientos no son exactamente equivalentes. El procedimiento de la función generadora es bastante conveniente para derivar dos relaciones de recurrencia, la ecuación diferencial de Bessel, las representaciones de integral, los teoremas de adición (Ejercicio 11.1.2) y los límites superior e inferior (Ejercicio 11.1.1). Sin embargo, el lector probablemente habrá observado que la función generadora define solamente las funciones de Bessel del orden integral J_0, J_1, J_2, etc. Esto constituye una gran limitación del procedimiento de la función generadora. Sin embargo, la función de Bessel de primera clase $J_\nu(x)$, se puede definir fácilmente por ν no integral al utilizar la serie (Ec. 11.5) como una nueva definición.

Las relaciones de recurrencia se pueden verificar al sustituir la forma de serie de $J_\nu(x)$ (Ejercicio 11.1.7). A partir de estas relaciones se obtiene la ecuación de Bessel. De hecho, si ν no es un número entero, se tiene una simplificación importante. Se encuentra que J_ν y $J_{-\nu}$ son independientes, ya que no existe relación para la forma de la Ec. 11.8. Por otra parte, para $\nu = n$, un número entero, se requiere de otra solución. El desarrollo de esta segunda solución y la investigación de sus propiedades forman el tema de la Sección 11.3.

EJERCICIOS

11.1.1 A partir del producto de las funciones generadoras $g(x, t) \cdot g(-x, t)$ demuestre que

$$1 = [J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + \cdots$$

y consecuentemente que $|J_0(x)| \leqslant 1$ y $|J_n(x)| \leqslant 1/\sqrt{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

11.1.2 Utilizando una función generadora $g(x, t) = g(u + v, t) = g(u, t) \cdot g(v, t)$, demuestre que

(a) $J_n(u + v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) \cdot J_{n-s}(v)$,

[1] R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II, Capítulo 23, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1964).

(b) $J_0(u+v) = J_0(u)\,J_0(v) + 2\sum_{s=1}^{\infty} J_s(u)\,J_{-s}(v)$.

Esto constituye los teoremas de adición de las funciones de Bessel.

11.1.3 Utilizando solamente la función generadora

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

y no la forma explícita de serie de $J_n(x)$, demuestre que $J_n(x)$ tiene una paridad par o impar de acuerdo con el hecho de que n sea par o impar, es decir,[1]

$$J_n(x) = (-1)^n\,J_n(-x).$$

11.1.4 Derive el desarrollo de Jacobi-Anger

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m\,J_m(z)e^{im\theta}.$$

Esto constituye un desarrollo de una onda plana en una serie de ondas cilíndricas.

11.1.5 Demuestre que

(a) $\cos x = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)$,

(b) $\operatorname{sen} x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} J_{2n-1}(x)$.

11.1.6 Para facilitar la remoción de la función generadora del dominio de la magia negra, demuestre que se puede *derivar* de la relación de recurrencia, Ec. 11.10.
Sugerencia. 1. Suponga una función generadora de la forma

$$g(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m.$$

2. Multiplique la Ec. 11.10 por t^n y sume sobre n.
3. Vuelva a establecer el resultado anterior en la forma

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)g(x,t) = \frac{2t}{x}\,\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}.$$

4. Integre y ajuste la constante de integración (una función de x) de modo que el coeficiente de t^0 sea $J_0(x)$ tal como lo define la Ec. 11.5.

11.1.7 Demuestre, mediante la diferenciación directa, que

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}$$

satisface las dos relaciones de recurrencia

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x),$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x),$$

y la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2J''_\nu(x) + xJ'_\nu(x) + (x^2-\nu^2)\,J_\nu(x) = 0.$$

[1] Esto se puede observar fácilmente de la forma de serie (Ec. 11.5)

11.1.8 Demuestre que

(a) $$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\theta)\cos\theta\, d\theta,$$

(b) $$\frac{1-\cos x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_1(x\cos\theta)\, d\theta.$$

Sugerencia. La integral definida

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2s+1}\theta\, d\theta = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2s)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s+1)}$$

puede ser de utilidad.

11.1.9 Demuestre que

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt,$$

Esta es una transformada del coseno de Fourier (cf. Sección 15.3).

11.1.10 Derive

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\, dx}\right)^n J_0(x).$$

Sugerencia. Ensaye la inducción matemática.

11.1.11 Demuestre que entre dos ceros consecutivos cualesquiera de $J_n(x)$ solamente existe uno y tan solo un cero de $J_{n+1}(x)$. *Sugerencia:* Las Ecs. 11.15 y 11.17 pueden ser de utilidad.

11.1.12 Un análisis de los modelos de difracción de antena para un sistema con una abertura circular involucra la ecuación

$$g(u) = \int_0^1 f(r)\, J_0(ur) r\, dr.$$

Si $f(r) = 1 - r^2$, demuestre que

$$g(u) = \frac{2}{u^2} J_2(u).$$

11.1.13 La sección transversal diferencial en un experimento de dispersión nuclear está definida por $d\sigma/d\Omega = |f(\theta)|^2$. Un tratamiento aproximado de lo anterior proporciona

$$f(\theta) = \frac{-ik}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \exp\,[ik\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi]\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Aquí, θ es el ángulo a través del cual se dispersa la partícula diseminada. R es el radio nuclear. Demuestre que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\pi R^2)\frac{1}{\pi}\left[\frac{J_1(kR\operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\right]^2$$

11.1.14 Un conjunto de funciones $C_n(x)$ satisface las relaciones de recurrencia

$$C_{n-1}(x) - C_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} C_n(x),$$

$$C_{n-1}(x) + C_{n+1}(x) = 2C_n'(x).$$

(a) ¿Cuál es la ecuación diferencial de segundo orden que satisface $C_n(x)$?

(b) Mediante el cambio de variable, transforme la ecuación diferencial en la ecuación de Bessel. Esto sugiere que $C_n(x)$ puede expresarse en términos de funciones de Bessel del argumento transformado.

11.1.15 Una partícula (masa m) se encuentra contenida en un cilindro circular recto (caja de píldoras) de radio R y altura H. La partícula se describe por medio de una función de onda que satisface la ecuación de onda de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\rho, \varphi, z) = E\psi(\rho, \varphi, z)$$

y la condición de que la función de onda pasa a cero sobre la superficie de la caja de píldoras. Encuentre la energía permisible más baja (punto cero).

Respuesta. $E = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{z_{pq}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\right],$

en donde z_{pq} es el cero número q de J_p, y en donde el índice p está fijado por la dependencia acimutal.

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right].$$

11.1.16 (a) Demuestre mediante la diferenciación directa y sustitución que

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{(x/2)(t-1/t)}t^{-\nu-1}\,dt$$

o que la ecuación equivalente

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int e^{s-x^2/4s}s^{-\nu-1}\,ds$$

satisface la ecuación de Bessel. C es el contorno definido en la Figura 11.4. El eje real negativo es una línea de corte.

Sugerencia. Demuestre que el *integrando* total (después de sustituir en la ecuación diferencial de Bessel) se puede indicar como una derivada total:

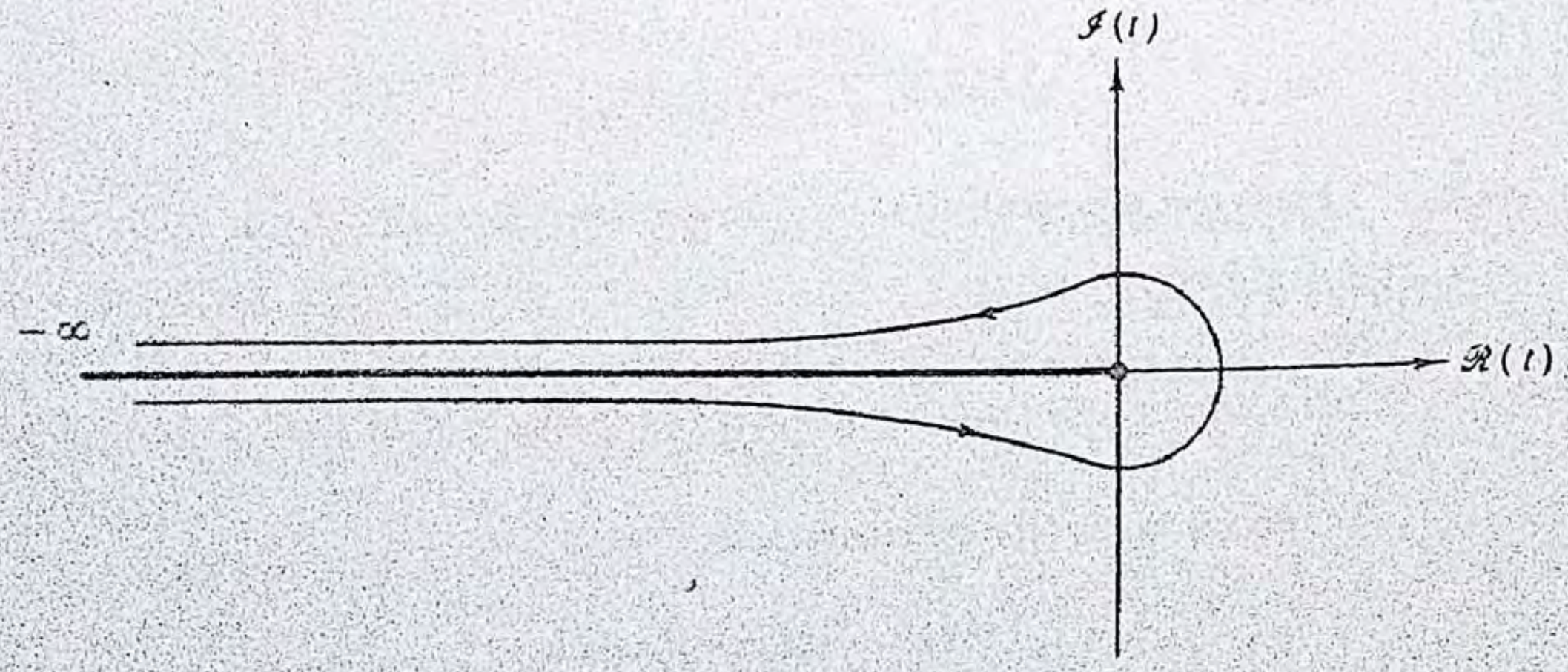


Fig. 11.4 Contorno de la función de Bessel

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]t^{-\nu-1}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right\}.$$

(b) Demuestre que la primera integral (con n un número entero) se puede transformar en

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\,\mathrm{sen}\,\theta-n\theta)}\,d\theta$$
$$=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\cos\theta+n\theta)}\,d\theta.$$

11.1.17 El contorno C en el Ejercicio 11.1.16 se deforma a la trayectoria $-\infty$ hasta -1, círculo unitario $e^{-i\pi}$ hasta $e^{i\pi}$, y finalmente desde -1 hasta $-\infty$. Demuestre que

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\nu\theta-x\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$$
$$-\frac{\mathrm{sen}\,\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\nu\theta-x\,\mathrm{senh}\,\theta)}\,d\theta.$$

Esta es la integral de Bessel. *Sugerencia.* Los valores negativos de la variable de integración u se pueden considerar al hacer uso de

$$u=te^{\pm i\pi}.$$

11.1.18 (a) Demuestre que

$$J_\nu(x)=\frac{2}{\pi^{1/2}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^{\pi/2}\cos(x\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos^{2\nu}\theta\,d\theta,$$

en donde $\nu>-\frac{1}{2}$. *Sugerencia.* Aquí se tiene la oportunidad de utilizar el desarrollo de serie y la integración término por término. Las fórmulas de la Sección 10.4 pueden ser de utilidad.

(b) Transforme la integral de la parte (a) en

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\pi^{1/2}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^{\pi}\cos(x\cos\theta)\,\mathrm{sen}^{2\nu}\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{\pi^{1/2}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^{\pi}e^{\pm ix\cos\theta}\,\mathrm{sen}^{2\nu}\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{\pi^{1/2}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_{-1}^{1}e^{\pm ipx}(1-p^2)^{\nu-1/2}\,dp.$$

Estas son representaciones de integral alternativas de $J_\nu(x)$.

11.1.19 (a) A partir de

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int t^{-\nu-1}e^{t-x^2/4t}\,dt$$

derive la relación de recurrencia

$$J_\nu'(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x).$$

(b) A partir de

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int t^{-\nu-1}\, e^{(x/2)(t-1/t)}\, dt$$

derive la relación de recurrencia

$$J_\nu'(x) = \tfrac{1}{2} J_{\nu-1}(x) - \tfrac{1}{2} J_{\nu+1}(x).$$

11.1.20 Demuestre que la relación de recurrencia

$$J_n'(x) = \tfrac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

se obtiene directamente de la diferenciación de

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x \operatorname{sen}\theta)\, d\theta.$$

11.1.21 Evalúe

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)\, dx, \qquad a, b > 0.$$

De hecho, los resultados son consistentes para $a \geqslant 0$, $-\infty < b < \infty$. Esto corresponde a la transformada de Laplace de J_0. *Sugerencia:* Tanto la representación integral de J_0 como el desarrollo en serie son de utilidad.

11.1.22 Utilizando las formas trigonométricas, verifique que

$$J_0(br) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ibr \operatorname{sen}\theta}\, d\theta.$$

11.1.23 (a) Construya una gráfica de (Φ^2 de la Ec. 11.35) en función de (sen α/λ) a lo largo del diámetro del modelo de difracción circular. Localice los dos primeros mínimos.

(b) ¿Qué fracción de la *intensidad* de luz total queda dentro del máximo central? *Sugerencia.* $[J_1(x)]^2/x$ se puede indicar en la forma de una derivada y la integral de área de la intensidad se puede integrar por inspección.

11.1.24 La fracción de luz incidente en una abertura circular (incidencia normal) que se transmite esta difinida por

$$T = 2\int_0^{2ka} J_2(x)\,\frac{dx}{x} - \frac{1}{2ka}\int_0^{2ka} J_2(x)\, dx.$$

Aquí, a es el radio de la abertura y k es el número de onda, $2\pi/\lambda$. Demuestre que

(a) $$T = 1 - \frac{1}{ka}\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(2ka),$$

(b) $$T = 1 - \frac{1}{2ka}\int_0^{2ka} J_0(x)\, dx.$$

11.1.25 La amplitud $U(\rho, \varphi, t)$ de una membrana circular vibrante de radio a satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 U - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Aquí, v es la velocidad de fase de la onda fijada por las constantes elásticas y cualesquiera que sea el amortiguamiento impuesto.

(a) Demuestre que una solución es

$$U(\rho, \varphi, t) = J_m(k\rho)(a_1 e^{im\varphi} + a_2 e^{-im\varphi})(b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t}).$$

(b) A partir de la condición limitante de Dirichlet, $J_m(ka) = 0$, encuentre los valores permisibles de la longitud de onda λ. ($k = 2\pi/\lambda$).

Nota. Existen otras funciones de Bessel además de J_m pero todas estas divergen a $\rho = 0$. Esto se muestra explícitamente en la Sección 11.3. El comportamiento divergente de hecho queda implícito en la Ec. 11.6.

11.1.26 El Ejemplo 11.1.2 describe los modos de MT correspondientes a la oscilación de cavidad electromagnética. Los modos transversalmente eléctricos (TE) difieren que se trabaja desde el componente z de la inducción magnética **B**:

$$\nabla^2 B_z + \alpha^2 B_z = 0$$

con las condiciones limitantes

$$B_z(0) = B_z(l) = 0 \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial B_z}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0.$$

Demuestre que las frecuencias de resonancia TE están definidas por

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\frac{\beta_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2\pi^2}{l^2}}, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots$$

11.1.27 Construya una gráfica de MT más baja y las tres frecuencias resonantes angulares TE más bajas, ω_{mnp}, en función de la relación radio/longitud (a/l) para $0 \leqslant a/l \leqslant 1.5$. *Sugerencia.* Ensaye con la gráfica de ω^2 [en unidades de $(\varepsilon_0 \mu_0 a^2)^{-1}$] vs. $(a/l)^2$. ¿A qué se debe esta selección?

11.1.28 Un disco conductor delgado de radio a lleva una carga q. Demuestre que el potencial está definido por

$$\varphi(r, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(kr) \frac{\operatorname{sen} ka}{k}\, dk,$$

en donde J_0 es la función de Bessel usual mientras que r y z son las coordenadas cilíndricas ya conocidas. *Nota.* Esto representa un problema difícil. Nuestro procedimiento es a través de las transformadas de Fourier, tal como en el Ejercicio 15.3.6. Para una descripción del problema físico consulte la obra de Jackson (*Classical Electrodynamics*, págs. 90-93).

11.2 Ortogonalidad

Si la ecuación de Bessel, Ec. 11.22*a*, se divide entre x, se transforma en una autoadjunta y, consecuentemente, mediante la teoría de Sturm-Liouville, Sección 9.2, es de esperarse que las soluciones sean ortogonales, en caso de que podamos lograr que se satisfagan las condiciones limi-

tantes adecuadas. Para considerar las condiciones limitantes, se introducen los parámetros a y $\alpha_{\nu m}$ en el argumento de J_ν para obtener $J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$. Aquí, a es el límite superior de la coordenada radial cilíndrica ρ. De acuerdo con la Ec. 11.22a,

$$\rho\frac{d^2}{d\rho^2}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)+\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)$$

$$+\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)=0. \tag{11.45}$$

cambiando el parámetro $\alpha_{\nu m}$ a $\alpha_{\nu n}$, $J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)$ satisface

$$\rho\frac{d^2}{d\rho^2}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)+\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)+\left(\frac{\alpha_{\nu n}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)=0. \tag{11.45a}$$

Procediendo como se hizo en la Sección 9.2, se multiplica la Ec. 11.45 por $J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)$ y la Ec. 11.45a por $J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$ y se procede a restar, obteniendo

$$J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]-J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right]$$

$$=\frac{\alpha_{\nu n}^2-\alpha_{\nu m}^2}{a^2}\rho J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right). \tag{11.46}$$

Integrando de $c_2=\frac{1}{2}$ hasta $\rho=a$,

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]d\rho$$

$$-\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right]d\rho \tag{11.47}$$

$$=\frac{\alpha_{\nu n}^2-\alpha_{\nu m}^2}{a^2}\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho\,d\rho.$$

Mediante la integración por partes, el lado izquierdo de la Ec. 11.47 se transforma en

$$\left|\rho J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right|_0^a-\left|\rho J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right|_0^a \tag{11.48}$$

Para $\nu\geqslant 0$, el factor ρ garantiza un cero en el límite inferior, $\rho=0$. De hecho, el límite inferior en el índice ν se puede extender hasta $\nu>-1$, Ejercicio 11.2.4.[1] En $\rho=a$, cada expresión desaparece en caso de seleccionar los parámetros $\alpha_{\nu n}$ y $\alpha_{\nu m}$ para que sean ceros o raíces de J_ν, es decir

[1] El caso $\nu=-1$ invierte a $\nu=+1$, Ec. 11.8.

$J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$. Los subíndices ahora ya no tienen significado: $\alpha_{\nu m}$ es el cero *emésimo* de J_ν.

Con esta selección de los parámetros, el lado izquierdo desaparece (las condiciones limitantes de Sturm-Liouville se satisfacen) y para $m \neq n$,

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho = 0. \tag{11.49}$$

Esto proporciona la ortogonalidad dentro del intervalo $[0, a]$.

Normalización. La integral de normalización se puede desarrollar regresando a la Ec. 11.48, estableciendo $\alpha_{\nu m} = \alpha_{\nu m} + \varepsilon$, y considerando el límite $\varepsilon \to 0$ (cf. Ejercicio 11.2.2). Con la ayuda de la relación de recurrencia, Ec. 11.16, el resultado puede indicarse en la forma

$$\int_0^a \left[J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2 \rho\, d\rho = \frac{a^2}{2}\,[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2. \tag{11.50}$$

Serie de Bessel. Si se supone que el conjunto de funciones de Bessel $J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$ (ν fija, $m = 1, 2, 3, \ldots$) es completo, entonces cualquier función de comportamiento adecuado pero arbitraria $f(\rho)$ se puede desarrollar en una serie de Bessel (Bessel-Fourier o Fourier-Bessel)

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{\nu m} J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right), \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad \nu > -1. \tag{11.51}$$

Los coeficientes $c_{\nu m}$ se determinan al utilizar la Ec. 11.50,

$$c_{\nu m} = \frac{2}{a^2[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2}\int_0^a f(\rho) J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho. \tag{11.52}$$

Un desarrollo de serie similar que involucra $J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)$ con $(d/d\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)|_{\rho=a} = 0$ se incluye en los Ejercicios 11.2.3 y 11.2.6(*b*).

EJEMPLO 11.2.1 POTENCIAL ELECTROSTATICO EN UN CILINDRO HUECO

De acuerdo con el Ejemplo 2.6.1, la solución de la ecuación de Laplace es una combinación lineal de

$$\begin{aligned}\psi_{km}(\rho, \varphi, z) &= P_{km}(\rho)\Phi_m(\varphi)Z_k(z)\\ &= J_m(k\rho)\cdot[a_m \operatorname{sen} m\varphi + b_m \cos m\varphi]\\ &\quad\cdot[c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}].\end{aligned} \tag{11.53}$$

La combinación lineal particular está determinada por las condiciones limitantes que deban satisfacerse.

En este caso, el cilindro tiene un radio a y la altura l. La sección terminal superior tiene una distribución de potencial $\psi(\rho, \varphi)$. En cualquier parte de la superficie el potencial es cero.[1] El problema consiste en encontrar el potencial electrostático

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{k,m} \psi_{km}(\rho, \varphi, z) \tag{11.54}$$

en cualquier parte del interior.

Por conveniencia, las coordenadas cilíndricas circulares se sitúan tal como se muestra en la Fig. 11.3. Ya que $\psi(\rho, \varphi, 0) = 0$, se considera $c_1 =$ xxxxxxxi La dependencia en z se transforma en sen kz, desapareciendo a $z = 0$. El requerimiento de que $\psi = 0$ en los lados cilíndricos se satisface al requerir que la constante de separación k sea

$$k = k_{mn} = \alpha_{mn}/a, \tag{11.55}$$

en donde el primer subíndice m proporciona el índice de la función de Bessel, mientras que el segundo subíndice identifica el cero particular de J_m.

El potencial electrostático se transforma en

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn}\frac{\rho}{a}\right) \cdot [a_{mn} \operatorname{sen} m\varphi + b_{mn} \cos m\varphi] \cdot \operatorname{senh}\left(\alpha_{mn}\frac{z}{a}\right). \tag{11.56}$$

La Ec. 11.56 es una serie doble: una serie de Bessel en ρ y una serie de Fourier en φ.

En $z = l$, $\psi = \psi(\rho, \varphi)$, una función conocida de ρ y φ. En consecuencia,

$$\psi(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn}\frac{\rho}{a}\right) \cdot [a_{mn} \operatorname{sen} m\varphi + b_{mn} \cos m\varphi] \cdot \operatorname{senh}\left(\alpha_{mn}\frac{l}{a}\right). \tag{11.57}$$

Las constantes a_{mn} y b_{mn} se evalúan mediante el uso de las Ecs. 11.49 y 11.50 y las ecuaciones correspondientes para sen φ y cos φ (Ejemplo 9.2.1 y Ecs. 14.7-14.9). Se encuentra que[2]

$$\left.\begin{matrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{matrix}\right\} = 2\left[\pi a^2 \operatorname{senh}\left(\alpha_{mn}\frac{l}{a}\right) J_{m+1}^2(\alpha_{mn})\right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^a \psi(\rho, \varphi) J_m\left(\alpha_{mn}\frac{\rho}{a}\right) \left\{\begin{matrix} \operatorname{sen} m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix}\right\} \rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{11.58}$$

[1] Si $\psi = 0$ en $z = 0, l$, pero $\psi \neq 0$ para $\rho = a$, las funciones de Bessel modificadas, Sección 11.5, se involucran.

[2] Si $m = 0$, se omite el factor 2 (cf. Ec. 14.8).

Estas son integrales definidas, es decir números. Sustituyendo nuevamente en la Ec. 11.56 la serie queda especificada y el potencial $\psi(\rho, \varphi, z)$ queda determinado. De este modo el problema se resuelve.

Forma Continua. La serie de Bessel, Ec. 11.51 y el Ejercicio 11.2.6 se aplican a los desarrollos dentro del intervalo finito $[0, a]$. Si $a \to \infty$, entonces es de esperarse que las formas de serie pasen a integrales. Las raíces discretas $\alpha_{\nu m}$ se transforman en una variable continua α. Una situación similar se presenta en la serie de Fourier, Sección 14.2. El desarrollo de la integral de Bessel a partir de la serie de Bessel se incluye en el Ejercicio 11.2.8

Para las operaciones hechas con un continuo de las funciones de Bessel, $J_\nu(\alpha\rho)$, una relación clave es la ecuación de cierre de la función de Bessel

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha\rho) J_\nu(\alpha'\rho)\rho \, d\rho = \frac{1}{\alpha}\,\delta(\alpha - \alpha'). \tag{11.59}$$

Esto puede demostrarse mediante el uso de las transformadas de Hankel, Sección 15.1. Un procedimiento alternativo, el cual se inicia con una relación similar a la Ec. 9.82, lo proporciona Morse y Feshbach, Sección 6.3.

EJERCICIOS

11.2.1 (a) Demuestre que

$$(a^2 - b^2)\int_0^P J_\nu(ax)\, J_\nu(bx)\, x\, dx = P[b\, J_\nu(aP)\, J_\nu'(bP) - aJ_\nu'(aP)\, J_\nu(bP)]$$

con

$$J_\nu'(aP) = \frac{d}{d(ax)} J_\nu(ax)\Big|_{x=P}.$$

(b) $$\int_0^P [J_\nu(ax)]^2 x\, dx = \frac{P^2}{2}\left\{[J_\nu'(aP)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{a^2P^2}\right)[J_\nu(aP)]^2\right\}, \quad \nu > -1.$$

Estas dos integrales normalmente se denominan primera y segunda integrales de Lommel.

Sugerencia. Como analogía se tiene el desarrollo de la ortogonalidad de las funciones de Bessel.

11.2.2 Demuestre que

$$\int_0^a \left[J_\nu\left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \right]^2 \rho \, d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2, \qquad \nu > -1.$$

Aquí, $\alpha_{\nu m}$ es el emésimo cero de J_ν.

Sugerencia. Con $\alpha_{\nu n} = \alpha_{\nu m} + \varepsilon$, desarrolle $J_\nu[(\alpha_{\nu m} + \varepsilon)\rho/a]$ alrededor de $\alpha_{\nu m}\rho/a$ por medio de un desarrollo de Taylor.

11.2.3 (a) Si $\beta_{\nu m}$ es el emésimo cero de $(d/d\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)$, demuestre que las funciones de Bessel son ortogonales dentro del intervalo $[0, a]$ con una integral de ortogonalidad

$$\int_0^a J_\nu\left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(\beta_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) \rho \, d\rho = 0, \qquad m \neq n, \quad \nu > -1.$$

(b) Derive la integral de normalización correspondiente ($m = n$).

$$\textit{Respuesta.} \qquad \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\beta_{\nu m}^2}\right) \quad [J_\nu(\beta_{\nu m})]^2 \quad \nu > -1.$$

11.2.4 Verifique que la ecuación de ortogonalidad, Ec. 11.49, y la ecuación de normalización, Ec. 11.50, son consistentes para $\nu > -1$.

Sugerencia. Utilizando los desarrollos de serie de potencias, examine el comportamiento de la Ec. 11.48 a medida que $\rho \to 0$.

11.2.5 De acuerdo con la Ec. 11.49 desarrolle una demostración de que $J_\nu(z), \nu > -1$, no tiene raíces complejas. *Sugerencia.* (a) Utilice la forma de serie de $J_\nu(z)$ para excluir las raíces imaginarias puras. (b) Suponga que $\alpha_{\nu m}$ es compleja y considere que $\alpha_{\nu n}$ es $\alpha_{\nu m}^*$.

11.2.6 (a) En el desarrollo de serie

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{\nu m} J_\nu\left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right), \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad \nu > -1,$$

con $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$, demuestre que los coeficientes están definidos por

$$c_{\nu m} = \frac{2}{a^2[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2} \int_0^a f(\rho) J_\nu\left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) \rho \, d\rho.$$

(b) En el desarrollo de serie

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{\nu m} J_\nu\left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right), \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad \nu > -1,$$

con $(d/d\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)|_{\rho=a} = 0$, demuestre que los coeficientes están definidos por

$$d_{\nu m} = \frac{2}{a^2(1 - \nu^2/\beta_{\nu m}^2)[J_\nu(\beta_{\nu m})]^2} \int_0^a f(\rho) J_\nu\left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a}\right) \rho \, d\rho.$$

11.2.7 Un cilindro circular recto tiene un potencial electrostático de $\psi(\rho, \varphi)$ en ambos extremos. El potencial en la superficie cilíndrica curvada es cero. Encuentre el potencial en todos los puntos interiores.

Sugerencia. Seleccione el sistema coordenado y ajuste la dependencia en z para aprovechar la simetría del potencial.

11.2.8 Para un caso continuo, demuestre que las Ecs. 11.51 y 11.52 se sustituyen por

$$f(\rho) = \int_0^\infty a(\alpha)\, J_\nu(\alpha\rho)\, d\alpha,$$

$$a(\alpha) = \alpha \int_0^\infty f(\rho)\, J_\nu(\alpha\rho)\rho\, d\rho.$$

Sugerencia. El caso correspondiente a los senos y cosenos se considera en la Sección 15.2.

11.2.9 Análogamente al cos x y sen x de la Sección 5.10, $J_0(x)$ y $J_1(x)$ se pueden expresar como productos infinitos. Demuestre que

(a) $J_0(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{0m}^2}\right),$

(b) $J_1(x) = x \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_{1m}^2}\right)$

11.3 Funciones de Neumann, Funciones de Bessel de Segunda Clase, $N_\nu(x)$

De acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales, se conoce que la ecuación de Bessel tiene dos soluciones independientes. De hecho, para ν de orden no integral se han encontrado dos soluciones y se han rotulado $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$, utilizando la serie infinita (Ec. 11.5). El problema consiste en que cuando ν es integral, la Ec. 11.8 es consistente y solamente se tiene una solución independiente. Una segunda solución se puede desarrollar mediante los métodos de la Sección 8.5. Esto proporciona una segunda solución perfectamente adecuada de la ecuación de Bessel, pero no constituye la forma estándar usual.

Definición. Como procedimiento alternativo, se considera la combinación lineal particular de $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi\, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}. \tag{11.60}$$

Esta es la función de Neumann.[1] Para ν no ~~integral~~ entero, $N_\nu(x)$ evidentemente satisface la ecuación de Bessel ya que es una combinación lineal de soluciones conocidas, $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$. Sin embargo, para ν ~~integral~~ entero, $\nu = n$, la Ec. 11.8 se puede aplicar y la Ec. 11.60 se vuelve indeterminada. La definición de $N_\nu(x)$ se ha seleccionado de manera deliberada para esta propiedad indeterminada. Evaluando $N_n(x)$ mediante la regla de L'Hospital para las formas indeterminadas, se obtiene

[1] En AMS-55 y en la mayoría de las tablas matemáticas, esto se rotula $Y_\nu(x)$.

$$N_n(x) = \frac{(d/d\nu)[\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{(d/d\nu)\operatorname{sen} \nu\pi}\bigg|_{\nu=n}$$

$$= \frac{-\pi \operatorname{sen} n\pi J_n(x) + [\cos n\pi\, \partial J_\nu/\partial\nu - \partial J_{-\nu}/\partial\nu]}{\pi \cos n\pi}\bigg|_{\nu=n}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]\bigg|_{\nu=n} \tag{11.61}$$

Forma en Serie. Un desarrollo en serie[1] proporciona el horrible resultado

$$\begin{aligned} N_n(x) = {} & \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} [\mathsf{F}(r) + \mathsf{F}(n+r)] \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \end{aligned} \tag{11.62}$$

lo cual manifiesta una dependencia logarítmica que era de esperarse. Evidentemente, esto verifica la independencia de J_n y N_n. $\mathsf{F}(r)$ es la función digamma que se obtiene al diferenciar los factoriales en el denominador de $J_\nu(x)$ (cf. Sección 10.2 y especialmente la Ec. 10.39). Utilizando las propiedades de la función digamma, la Ec. 11.62 se puede establecer de nuevo en una forma, ligeramente elegante

$$\begin{aligned} N_n(x) = {} & \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} p^{-1}\right] J_n(x) \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{(x/2)^{n+2r}}{r!(n+r)!}\sum_{p=1}^{r}\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p+n}\right] \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \end{aligned} \tag{11.63}$$

Para $n = 0$, se tiene el valor limitante

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}(\ln x + \gamma - \ln 2) + O(x^2) \tag{11.64}$$

y para $\nu > 0$

$$N_\nu(x) = -\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \cdots.^2 \tag{11.65}$$

[1] Utilizando $(d/d\nu)x^\nu = x^\nu \ln x$.

[2] Observe que esta forma limitante se aplica *tanto* a los valores integrales *como* no integrales del índice ν.

Para verificar que $N_\nu(x)$, nuestra función de Neumann o función de Bessel de segunda clase, satisface de hecho la ecuación de Bessel para n integral, se puede proceder como sigue. Diferenciando la ecuación de Bessel para $J_{\pm\nu}(x)$ con respecto a ν, se tiene

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial \nu}\right) + x \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial \nu}\right) + (x^2 - \nu^2) \frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial \nu} = 2\nu\, J_{\pm\nu}. \tag{11.66}$$

Multiplicando la ecuación de $J_{-\nu}$ por $(-1)^\nu$, restando de la ecuación para J_ν. (como se sugiere mediante la Ec. 11.61) y considerando el límite $\nu \to n$, se obtiene

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} N_n + x \frac{d}{dx} N_n + (x^2 - n^2) N_n = \frac{2n}{\pi} [J_n - (-1)^n J_{-n}]. \tag{11.67}$$

Para $\nu = n$, un número entero, el lado derecho desaparece mediante la Ec. 11.8 y $N_n(x)$ corresponde a una solución de la ecuación de Bessel. La solución más general para cualquier ν consecuentemente se puede indicar en la forma

$$y(x) = A\, J_\nu(x) + B\, N_\nu(x). \tag{11.68}$$

De la Ec. 11.62 se observa que N_n diverge al menos logarítmicamente. Cualquier condición limitante en que se requiera que la función sea finita en el origen [tal como en la membrana circular vibrante (Sección 11.1)] excluye de manera automática a $N_n(x)$. Asimismo, en ausencia de tal requerimiento, se debe considerar $N_n(x)$

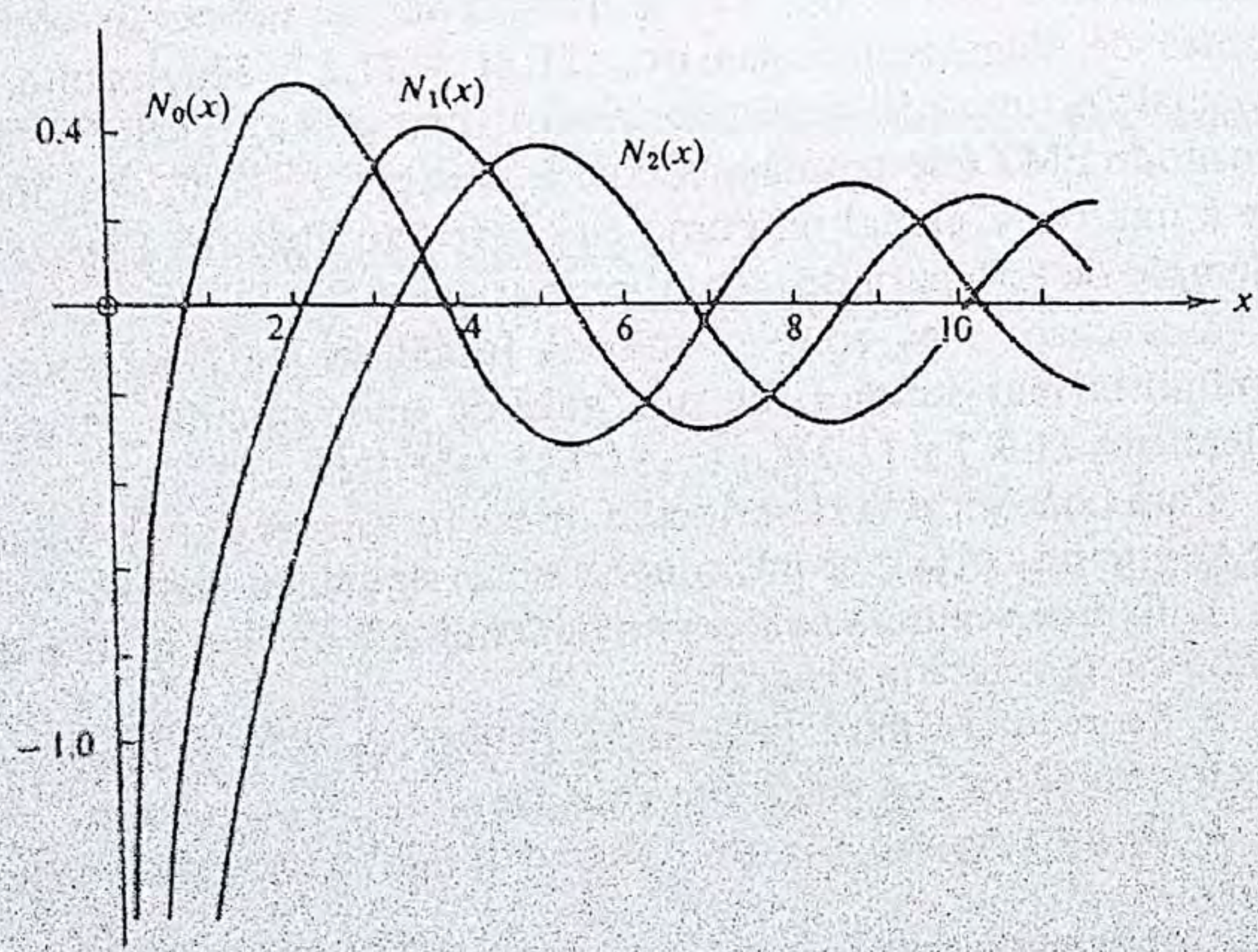


Fig. 11.5 Funciones de Neumann, $N_0(x)$, $N_1(x)$ y $N_2(x)$

Hasta cierto punto, la definición de la función de Neumann $N_n(x)$ es arbitraria. La Ec. 11.63 contiene términos de la forma $a_n J_n(x)$. Es evidente que cualquier valor finito de la constante a_n nos proporciona una segunda solución de la ecuación de Bessel. ¿Por qué debe tener a_n el valor particular mostrado en la Ec. 11.63? La respuesta involucra la dependencia asintótica desarrollada en la Sección 11.6. Si J_n corresponde a una onda de coseno, N_n corresponde a la onda de seno. Esta relación de fase asintótica simple y conveniente es consecuencia de la mezcla particular J_n y N_n.

Relaciones de Recurrencia. Sustituyendo la Ec. 11.60 para $N_\nu(x)$ (ν no integral) o la Ec. 11.61 (ν integral) en las relaciones de recurrencia (Ecs. 11.10 y 11.12) para $J_n(x)$, se observa de inmediato que $N_\nu(x)$ satisface las mismas relaciones de recurrencia. Esto de hecho constituye otra demostración de que N_ν es una solución. Observe cuidadosamente que lo inverso no necesariamente es cierto. Todas las soluciones no necesariamente satisfacen las relaciones de recurrencia. Véase ejemplo en la Sección 11.5.

Fórmulas Wronskianas. De acuerdo con la Sección 8.5, se tiene la fórmula wronskiana para las soluciones de la ecuación de Bessel

$$u_\nu(x)\, v'_\nu(x) - u'_\nu(x)\, v_\nu(x) = \frac{A_\nu}{x}, \tag{11.69}$$

en donde A_ν es un parámetro que depende de las funciones de Bessel particulares $u_\nu(x)$ y $v_\nu(x)$ consideradas. Esta es una constante en el sentido de que es independiente de x. Considere el caso especial

$$u_\nu(x) = J_\nu(x), \qquad v_\nu(x) = J_{-\nu}(x), \tag{11.70}$$

$$J_\nu J'_{-\nu} - J'_\nu J_{-\nu} = \frac{A_\nu}{x}. \tag{11.71}$$

Ya que A_ν es una constante, se puede identificar en cualquier punto conveniente tal como $x = 0$. Utilizando los primeros términos en el desarrollo en serie (Ecs. 11.5 y 11.6), se obtiene

$$\begin{aligned} J_\nu &\to \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}, & J_{-\nu} &\to \frac{2^\nu x^{-\nu}}{(-\nu)!}, \\ J'_\nu &\to \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^\nu \nu!}, & J'_{-\nu} &\to \frac{-\nu 2^\nu x^{-\nu-1}}{(-\nu)!}. \end{aligned} \tag{11.72}$$

La sustitución en la Ec. 11.69 proporciona

$$\begin{aligned} J_\nu(x)\, J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)\, J_{-\nu}(x) &= \frac{-2\nu}{x\nu!(-\nu)!} \\ &= -\frac{2 \operatorname{sen} \nu\pi}{\pi x} \end{aligned} \tag{11.73}$$

utilizando la Ec. 10.32

$$\nu!(-\nu)! = \frac{\pi\nu}{\operatorname{sen}\pi\nu}.$$

Observe que A_ν desaparece para ν integral, como debe de ser, ya que la no desaparición del wronskiano es una demostración de la independencia de las dos soluciones. Mediante la Ec. 11.73, J_n y J_{-n} evidentemente no dependen linealmente.

Utilizando las relaciones de recurrencia se puede establecer sin dificultad un gran número de formas alternativas, dentro de las cuales se encuentran

$$J_\nu J_{-\nu+1} + J_{-\nu}J_{\nu-1} = \frac{2\operatorname{sen}\nu\pi}{\pi x}, \tag{11.74}$$

$$J_\nu J_{-\nu-1} + J_{-\nu}J_{\nu+1} = -\frac{2\operatorname{sen}\nu\pi}{\pi x}, \tag{11.75}$$

$$J_\nu N'_\nu - J'_\nu N_\nu = \frac{2}{\pi x}, \tag{11.76}$$

$$J_\nu N_{\nu+1} - J_{\nu+1}N_\nu = -\frac{2}{\pi x}. \quad c_{mn}/b_{mn}. \tag{11.77}$$

En las referencias proporcionadas se puede encontrar una gran diversidad adicional de las mismas.

El lector recordará que en el Capítulo 8 los wronskianos fueron de gran utilidad en dos aspectos: (1) en el establecimiento de la independencia lineal o la dependencia lineal de las soluciones correspondientes a las ecuaciones diferenciales y (2) en el desarrollo de una forma integral de la segunda solución. Aquí, las formas específicas de los wronskianos y las combinaciones derivadas de los wronskianos de las funciones de Bessel son de utilidad principalmente para ilustrar el comportamiento general de las diversas funciones de Bessel. Los wronskianos tienen un gran uso en la comprobación de las tablas de funciones de Bessel. En el Capítulo 16, los wronskianos vuelven a aparecer en relación a las funciones de Green.

EJEMPLO 11.3.1 GUIAS DE ONDA COAXIALES

Estamos interesados en una onda electromagnética confinada entre superficies concéntricas cilíndricas conductoras $\rho = a$ y $\rho = b$. La mayor parte de las matemáticas se establece en los Ejemplos 2.6.1 y 11.1.2. Para pasar de la onda estacionaria de estos ejemplos a la onda en movimiento del presente caso, se permite que $a_{mn} = ib_{mn}$ en la Ec. 11.40 y se obtiene

$$E_z = \sum_{m,n} b_{mn} J_m(\gamma\rho) e^{\pm im\varphi} e^{i(kz-\omega t)}. \tag{11.78}$$

Se requiere de una generalización. El origen $\rho = 0$ queda ahora excluido $(0 < a \leqslant \rho \leqslant b)$. En consecuencia, la función de Neumann $N_m(\gamma\rho)$ pudiera no quedar excluida. $E_z(\rho, \varphi, z, t)$ se transforma en

$$E_z = \sum_{m,n} [b_{mn} J_m(\gamma\rho) + c_{mn} N_m(\gamma\rho)] e^{\pm im\varphi} e^{i(kz-\omega t)}. \tag{11.79}$$

Con la condición

$$H_z = 0, \tag{11.80}$$

se tienen las ecuaciones básicas para la onda MT (magnética transversal).

El campo eléctrico (tangencial) debe desaparecer en las superficies conductoras (condición limitante de Dirichlet) o sea

$$b_{mn} J_m(\gamma a) + c_{mn} N_m(\gamma a) = 0, \tag{11.81}$$

$$b_{mn} J_m(\gamma b) + c_{mn} N_m(\gamma b) = 0. \tag{11.82}$$

Estas ecuaciones trascendentales se pueden resolver para γ (γ_{mn}) y la relación De acuerdo con el Ejemplo 2.6.1,

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \gamma^2. \tag{11.83}$$

Ya que k^2 debe ser positiva para una onda real, la frecuencia mínima que se puede propagar (en este modo MT) es

$$\omega = \frac{\gamma}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}, \tag{11.84}$$

con γ fija por las condiciones limitantes, Ecs. 11.81 y 11.82. Esta es la frecuencia de corte de la guía de onda.

También existe un modo ET (eléctrico transversal) con $E_z = 0$ y H_z determinada por la Ec. 11.79. Siendo así, se tienen las condiciones limitantes de Neumann de las Ecs. 11.81 y 11.82. Finalmente, para la guía coaxial (*no* para la guía cilíndrica plana, $a = 0$) existe la posibilidad de un modo EMT (electromagnético transversal), $E_z = H_z = 0$. Esto corresponde a una onda planal tal como en el espacio libre. El Ejercicio 2.9.5 es un ejemplo de esto para dos alambres paralelos.

Los casos más simples (no las funciones de Neumann, condiciones limitantes más simples) de una guía de onda circular se incluyen en los Ejercicios 11.3.7 y 11.3.8.

Para concluir esta descripción de las funciones de Neumann, la función de Neumann, $N_\nu(x)$, se introduce por las siguientes razones:

1. Es una segunda solución independiente de la ecuación de Bessel que completa la solución general.

2. Se requiere para problemas físicos específicos tal como las ondas electromagnéticas en los cables coaxiales.

3. Origina la función de Green para la ecuación de Bessel (Sección 11.5).

4. Origina directamente dos funciones de Hankel (Sección 11.4).

EJERCICIOS

11.3.1 Verifique los desarrollos (solamente el término principal)

$$N_0(x) \to \frac{2}{\pi}(\ln x + \gamma - \ln 2)$$

$$N_\nu(x) \to -\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, \qquad \nu > 0$$

$$x \ll 1,$$

mediante la diferenciación directa de la definición de la función de Neumann tal como se indica en la Ec. 11.61.

3. **11.3.2** Demuestre que las funciones de Neumann N_n (con n un número entero) satisfacen las relaciones de recurrencia

$$N_{n-1}(x) + N_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} N_n(x)$$

$$N_{n-1}(x) - N_{n+1}(x) = 2N_n'(x).$$

Sugerencia. Estas relaciones se pueden demostrar mediante la diferenciación de las relaciones de recurrencia para J_ν o mediante el uso de la forma de límite de N_ν pero no mediante la *división* de todo entre cero.

11.3.3 Demuestre que

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x).$$

11 3B **11.3.4** Demuestre que

$$N_0'(x) = -N_1(x).$$

11.3.5 Si Y y Z son dos soluciones cualesquiera de la ecuación de Bessel, demuestre que

11.3.4

$$Y_\nu(x)Z_\nu'(x) - Y_\nu'(x)Z_\nu(x) = \frac{A_\nu}{x},$$

en donde A_ν puede depender de ν pero es independiente de x. Esto realmente constituye un caso especial del Ejercicio 9.1.4.

11.3.6 Verifique las fórmulas wronskianas

11.3.5

$$J_\nu(x)\, J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x)\, J_{\nu-1}(x) = \frac{2 \operatorname{sen} \nu\pi}{\pi x},$$

$$J_\nu(x)\, N_\nu'(x) - J_\nu'(x)\, N_\nu(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

11.3.7 Una guía de onda cilíndrica tiene un radio r_0. Encuentre los componentes que no desaparecen de los campos eléctrico y magnético para

(a) TM_{01}, onda magnética transversal ($H_z = H_\rho = E_\theta = 0$),
(b) TE_{01}, onda eléctrica transversal ($E_z = E_\rho = H_\theta = 0$).
Los subíndices 01 indican que el componente longitudinal (E_z o H_z) involucra J_0 y que la condición limitante se satisface para el *primer* cero de J_0 o J_0'.

11.3.8 Para cierto modo de oscilación, la frecuencia *mínima* que se hace pasar por una guía de onda circular cilíndrica es

$$\nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_c},$$

en donde λ_c está fijada por la condición limitante

$$J_n\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda_c}\right) = 0 \quad \text{para el modo MT}$$

$$J'_n\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda_c}\right) = 0 \quad \text{para el modo ET}$$

El subíndice n designa el orden de la función de Bessel y m indica el cero utilizado. Encuentre esta longitud de onda de corte λ_c para los tres modos MT y TE con las longitudes de onda de corte más largas. Explique los resultados en términos de una gráfica de J_0, J_1, y J_2, (Figura 11.1).

11.4 Funciones de Hankel

Muchos autores prefieren introducir las funciones de Hankel mediante la representación integral y luego utilizarlas para definir la función de Neumann, $N_\nu(z)$. Al final de esta sección se presenta una descripción general de este procedimiento.

Definiciones. Ya que hemos obtenido la función de Neumann por medio de técnicas más elementales (y menos poderosas), la podemos utilizar para definir las funciones de Hankel, $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i\,N_\nu(x) \tag{11.85}$$

y

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i\,N_\nu(x). \tag{11.86}$$

Esto es exactamente análogo a considerar

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta. \tag{11.87}$$

La amplitud de esta analogía se puede observar aún mejor cuando se consideran las formas asintóticas (Sección 11.6). De hecho, es su comportamiento asintótico el que hace útiles a las funciones de Hankel.

El desarrollo en serie de $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$ se puede obtener mediante la combinación de las Ecs. 11.5 y 11.63. Frecuentemente tan solo es de interés el primer término; está definido por

$$H_0^{(1)}(x) \approx i\frac{2}{\pi}\ln x + 1 + i\frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2) + \cdots, \tag{11.88}$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx -i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \cdots, \qquad \nu > 0, \tag{11.89}$$

$$H_0^{(2)}(x) \approx -i\frac{2}{\pi}\ln x + 1 - i\frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2) + \cdots, \tag{11.90}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \approx i\,\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \cdots, \qquad \nu > 0. \tag{11.91}$$

Ya que las funciones de Hankel son combinaciones lineales (con coeficientes constantes) de J_ν y N_ν, satisfacen las mismas relaciones de recurrencia (Ecs. 11.10 y 11.12).

$$H_{\nu-1}(x) + H_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} H_\nu(x), \tag{11.92}$$

$$H_{\nu-1}(x) - H_{\nu+1}(x) = 2H'_\nu(x), \tag{11.93}$$

tanto para $H_\nu^{(1)}(x)$ como para $H_\nu^{(2)}(x)$.

Se puede desarrollar una variedad de fórmulas wronskianas

$$H_\nu^{(2)}H_{\nu+1}^{(1)} - H_\nu^{(1)}H_{\nu+1}^{(2)} = \frac{4}{i\pi x}, \tag{11.94}$$

$$J_{\nu-1}H_\nu^{(1)} - J_\nu H_{\nu-1}^{(1)} = \frac{2}{i\pi x}, \tag{11.95}$$

$$J_\nu H_{\nu-1}^{(2)} - J_{\nu-1}H_\nu^{(2)} = \frac{2}{i\pi x}. \tag{11.96}$$

EJEMPLO 11.4.1 ONDAS PROGRESIVAS CILINDRICAS

Como ilustración del uso de las funciones de Hankel, considere un problema de onda bidimensional similar a la membrana circular vibrante del Ejercicio 11.1.25. Ahora imagine que las ondas se generan en $r = 0$ y que se mueven hacia afuera hasta el infinito. Procedemos a sustituir las ondas estacionarias por las ondas progresivas. La ecuación diferencial sigue siendo la misma, pero las condiciones limitantes cambian. Ahora habremos de requerir que para r grande el comportamiento de la solución debe ser similar a

$$U \to e^{i(kr-\omega t)} \tag{11.97}$$

para describir una onda saliente. Como antes, k es en el número de onda. Esto supone, por simplicidad, que no existe dependencia acimutal, es decir sin momento angular o $m = 0$. En las Secciones 7.4 y 11.6, $H_0^{(1)}(kr)$ se demostró que tiene un comportamiento asintótico

$$H_0^{(1)}(kr) \to e^{ikr}. \tag{11.98}$$

Esta condición limitante en el infinito determina así nuestra solución de onda en la forma de

$$U(r, t) = H_0^{(1)}(kr)\, e^{-i\omega t}. \tag{11.99}$$

Esta solución diverge a medida que $r \to 0$, lo cual es justamente el comportamiento esperado con una fuente en el origen.

La selección del problema de la onda bidimensional para ilustrar la función de Hankel $H_0^{(1)}(z)$ no es accidental. Las funciones de Bessel pueden aparecer en una gran diversidad de formas, tal como en la separación de las coordenadas cónicas. Sin embargo, intervienen con bastante frecuencia a partir de las ecuaciones radiales procedentes de la separación de variables en la ecuación de Helmholtz en coordenadas polares esféricas y cilíndricas. Hemos considerado una forma degenerada de las coordenadas cilíndricas para esta ilustración. En caso de haber utilizado las coordenadas polares esféricas (ondas esféricas) se habría encontrado un índice con n un número entero. Estos valores especiales proporcionan las funciones de Bessel esféricas que se describen en la Sección 11.7.

Representación de la Integral de Contorno de las Funciones de Hankel. La representación de integral (integral de Schlaefli)

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{(x/2)(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} \tag{11.100}$$

se puede establecer con facilidad para $\nu = n$, un número entero [reconociendo que el numerador es la función generadora, Ec. 11.1 e integrando alrededor del origen]. Si ν no es un número entero, el *integrando* no es de valor simple y se requiere de una línea de corte en el plano complejo. Seleccionando el eje real negativo como línea de corte y utilizando el contorno mostrado en la Fig. 11.6, la Ec. 11.100 puede ampliarse para ν no integral. Sustituyendo la Ec. 11.100 en la ecuación diferencial de Bessel, el integrando combinado puede representarse por medio de una diferencial exacta que desaparece a medida que $t \to \infty e^{\pm i\pi}$ (cf. Ejercicio 11.1.16).

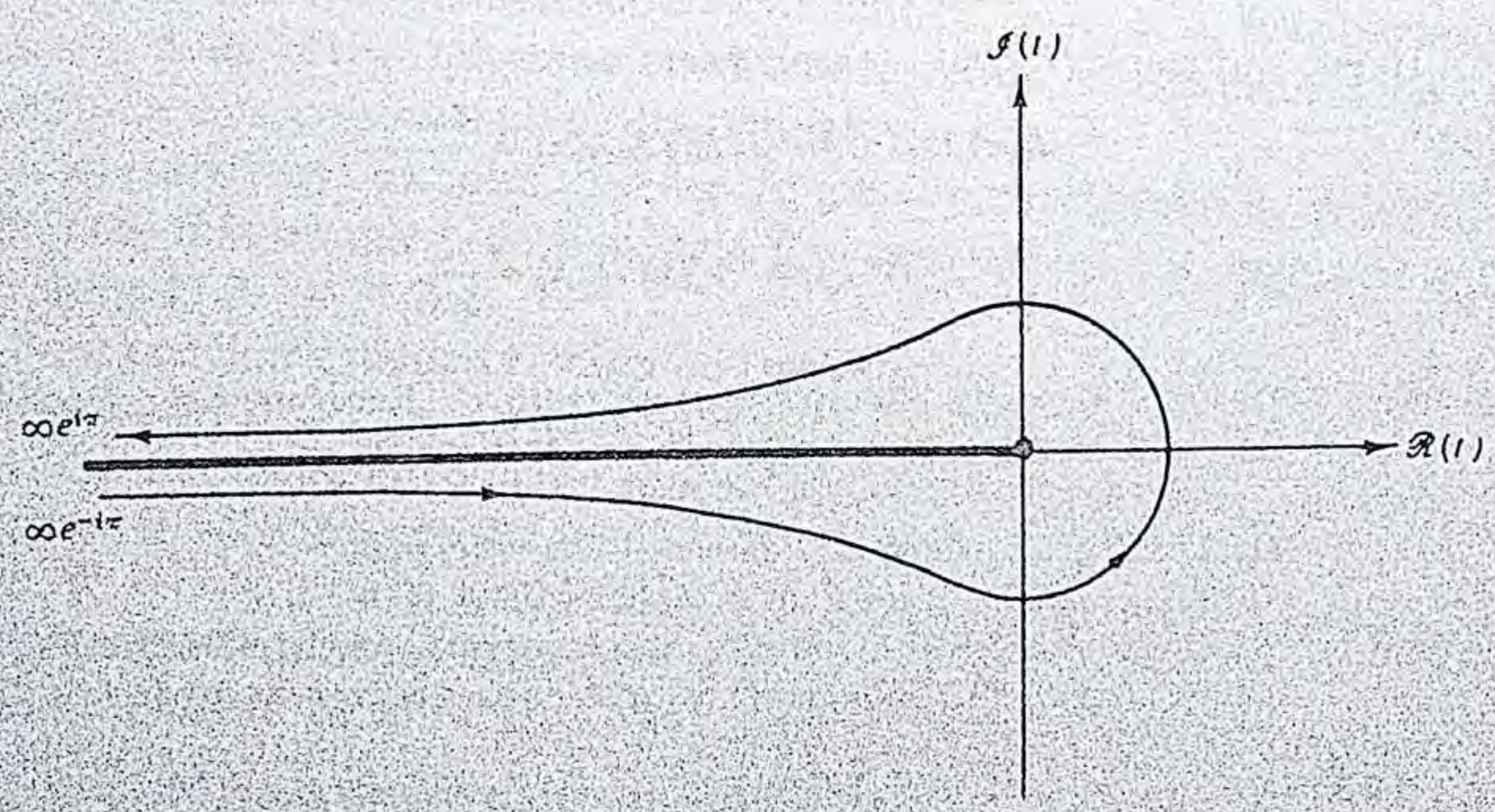


Fig. 11.6 Contorno de la función de Bessel

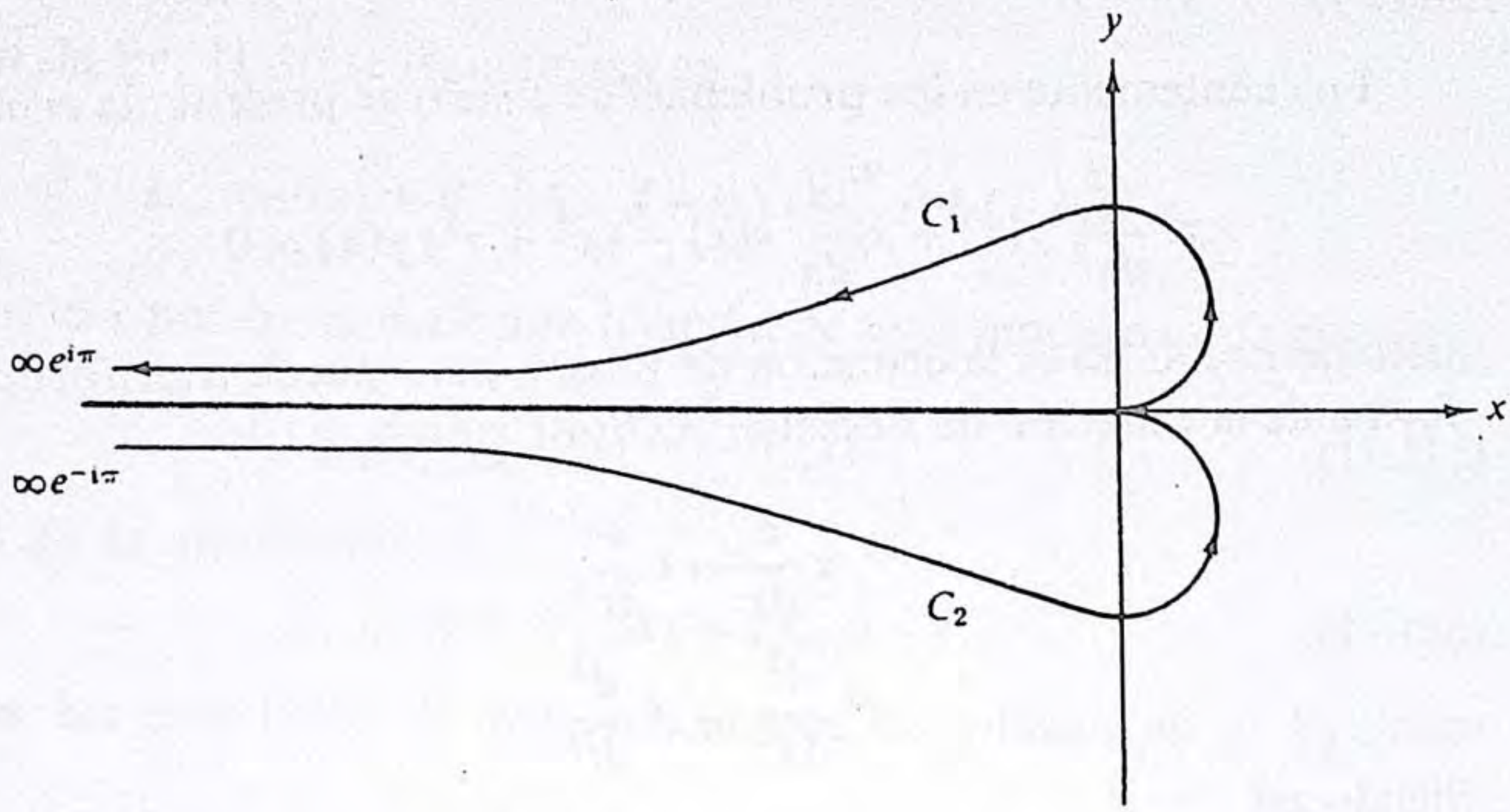


Fig. 11.7 Contornos de la función de Hankel

Ahora procedemos a deformar el contorno de modo que se aproxima al origen a lo largo del eje real positivo, tal como se muestra en la Fig. 11.7. Este procedimiento particular garantiza que la diferencial exacta mencionada desaparezca en $t \to 0$ debido al factor $e^{-x/2t}$. En consecuencia, cada una de las porciones separadas $\infty\, e^{-i\pi}$ hasta 0 y 0 hasta $\infty\, e^{i\pi}$ es una solución de la ecuación de Bessel. Se define

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty e^{i\pi}} e^{(x/2)(t-1/t)}\,\frac{dt}{t^{\nu+1}} \tag{11.101}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{\infty e^{-i\pi}}^{0} e^{(x/2)(t-1/t)}\,\frac{dt}{t^{\nu+1}}. \tag{11.102}$$

Estas expresiones son particularmente convenientes debido a que pueden manipularse mediante el método de los descendentes de gran pendiente (Sección 7.4). $H_\nu^{(1)}(x)$ tiene un punto de apoyo en $t = +i$, mientras que $H_\nu^{(2)}(x)$ tiene un punto de apoyo en $t = -i$.

El problema de relacionar las Ecs. 11.101 y 11.102 con nuestra definición anterior de la función de Hankel (Ecs. 11.85 y 11.86) continúa. Ya que las Ecs. 11.100-11.102 combinadas proporcionan

$$J_\nu(x) = \tfrac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)] \tag{11.103}$$

mediante inspección, tan solo requerimos demostrar que

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\,[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)] \tag{11.104}$$

Esto puede lograrse mediante los siguientes pasos:

1. Con las sustituciones $t = e^{i\pi}/s$ para $H_\nu^{(1)}$ y $t = e^{-i\pi}/s$ para $H_\nu^{(2)}$, se obtiene

$$H_\nu^{(1)}(x) = e^{-i\nu\pi}H_{-\nu}^{(1)}(x), \tag{11.105}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = e^{i\nu\pi} H_{-\nu}^{(2)}(x). \tag{11.106}$$

2. De acuerdo con las Ecs. 1.103, $(\nu \to -\nu)$, y 11.105 y 11.106

$$J_{-\nu}(x) = \tfrac{1}{2}[e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(x) + e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(x)]. \tag{11.107}$$

3. Finalmente, sustituyendo J_ν (Ec. 11.103) y $J_{-\nu}$ (Ec. 11.107) en la ecuación de definición para N_ν, Ec. 11.60. Esto origina la Ec. 11.104 y establece las integrales de contorno, Ecs. 11.101 y 11.102, como las funciones de Hankel.

Las representaciones de integral han aparecido antes: Ec. 10.35 para $\Gamma(z)$ y diversas representaciones de $J_\nu(z)$ en la Sección 11.1. Con las representaciones de integral de las funciones de Hankel, probablemente es adecuado preguntar por qué estamos interesados en las representaciones de integral. Existen al menos cuatro razones. La primera es simplemente lo concerniente a una apariencia estética: algunas personas las encuentran atractivas. En segundo lugar, la representación de integral facilita la distinción entre dos soluciones linealmente independientes. En la Fig. 11.7, los contornos C_1 y C_2 atraviesan *diferentes* puntos de apoyo (Sección 7.4). Para las funciones de Legendre, el contorno de $P_n(z)$ (Fig. 12.9) y el correspondiente a $Q_n(z)$ (Fig. 12.18) circundan *diferentes* puntos singulares.

En tercer lugar, las representaciones de integral facilitan las manipulaciones, análisis, el desarrollo de relaciones entre las diversas funciones especiales. En cuarto lugar, y probablemente el más importante, las representaciones de integral son de suma utilidad en el desarrollo de expresiones asintóticas. Uno de los procedimientos, el método de los descendentes de gran pendiente, aparece en la Sección 7.4. Un segundo procedimiento, el desarrollo directo de una representación de integral se proporciona en la Sección 11.6 para la función de Bessel modificada $K_\nu(z)$. Esta misma técnica se puede utilizar para obtener los desarrollos asintóticos de las funciones hipergeométricas confluentes, M y U, Ejercicio 13.5.13.

En conclusión, las funciones de Hankel se introducen aquí por las siguientes razones:

1. Como análogos de $e^{\pm ix}$ son de utilidad para describir las ondas progresivas.

2. Ofrecen una definición alternativa (integral de contorno) y más bien elegante de las funciones de Bessel.

3. $H_\nu^{(1)}$ se utiliza para definir la función de Bessel modificada K_ν de la Sección 11.5

EJERCICIOS

11.4.1 Verifique las fórmulas wronskianas

(a) $J_\nu(x)\, H_\nu^{(1)\prime}(x) - J_\nu'(x)\, H_\nu^{(1)}(x) = \dfrac{i2}{\pi x}$,

(b) $J_\nu(x)\, H_\nu^{(2)\prime}(x) - J_\nu'(x)\, H_\nu^{(2)}(x) = \dfrac{-i2}{\pi x}$,

(c) $N_\nu(x)\, H_\nu^{(1)\prime}(x) - N_\nu'(x)\, H_\nu^{(1)}(x) = \dfrac{-2}{\pi x}$,

(d) $N_\nu(x)\, H_\nu^{(2)\prime}(x) - N_\nu'(x)\, H_\nu^{(2)}(x) = \dfrac{-2}{\pi x}$,

(e) $H_\nu^{(1)}(x)\, H_\nu^{(2)\prime}(x) - H_\nu^{(1)\prime}(x)\, H_\nu^{(2)}(x) = \dfrac{-i4}{\pi x}$,

(f) $H_\nu^{(2)}(x)\, H_{\nu+1}^{(1)}(x) - H_\nu^{(1)}(x)\, H_{\nu+1}^{(2)}(x) = \dfrac{4}{i\pi x}$,

(g) $J_{\nu-1}(x)\, H_\nu^{(1)}(x) - J_\nu(x)\, H_{\nu-1}^{(1)}(x) = \dfrac{2}{i\pi x}$.

11.4.2 Demuestre que las formas de integral

(a) $\dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_{0C_1}^{\infty e^{i\pi}} e^{(x/2)(t-1/t)}\,\frac{dt}{t^{\nu+1}} = H_\nu^{(1)}(x)$,

(b) $\dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_{\infty e^{-i\pi}C_2}^{0} e^{(x/2)(t-1/t)}\,\frac{dt}{t^{\nu+1}} = H_\nu^{(2)}(x)$,

satisfacen la ecuación diferencial de Bessel. Los contornos C_1 y C_2 se muestran en la Fig. 11.7.

11.4.3 Utilizando las integrales y contornos proporcionados en el problema 11.4.2, demuestre que

$$\frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)] = N_\nu(x).$$

11.4.4 Demuestre que las integrales del Ejercicio 11.4.2 se pueden transformar para originar

(a) $H_\nu^{(1)}(x) = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{C_3} e^{x \operatorname{sen h} \gamma - \nu\gamma}\, d\gamma$, (b) $H_\nu^{(2)}(x) = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{C_4} e^{x \operatorname{sen h} \gamma - \nu\gamma}\, d\gamma$.

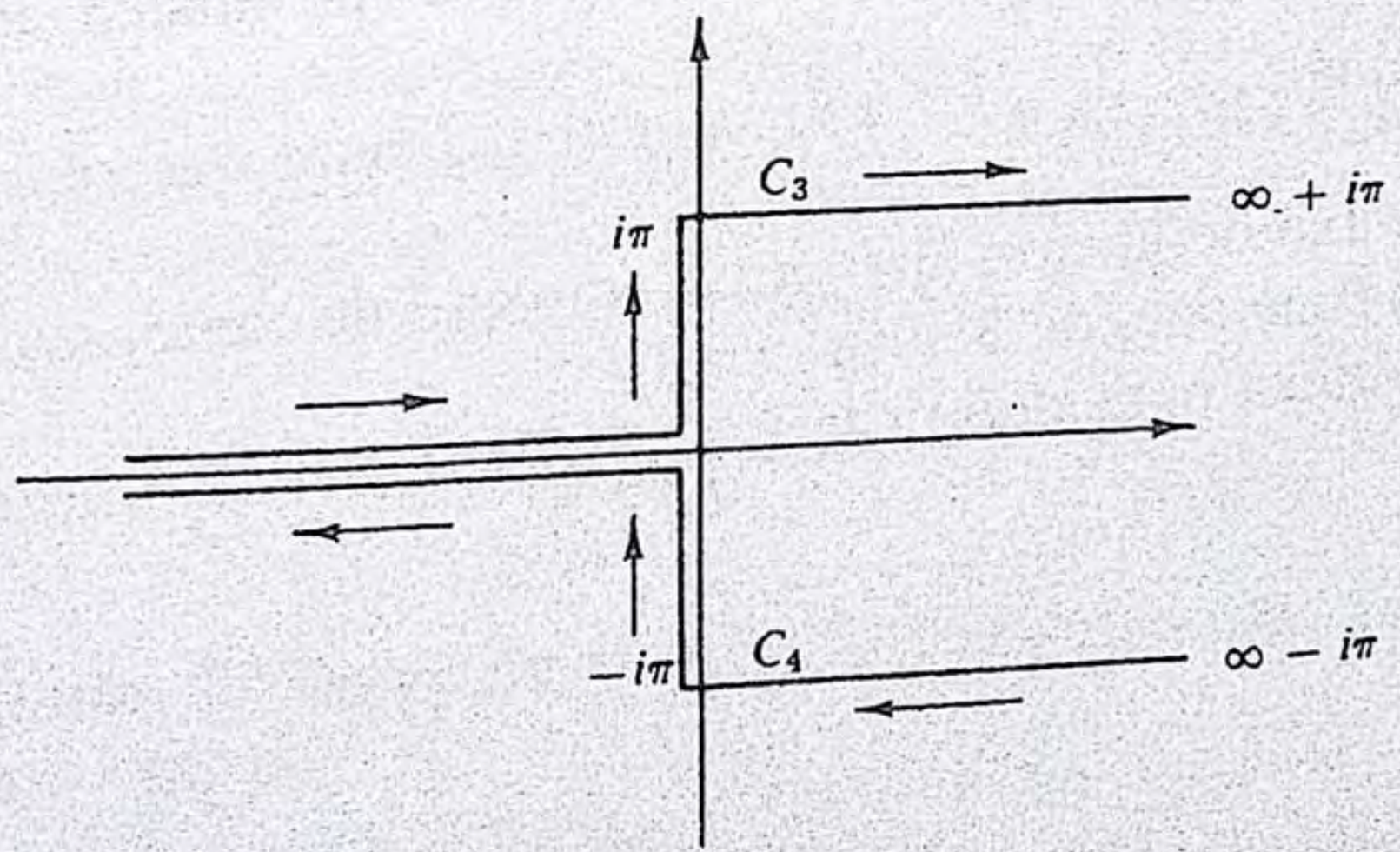


Fig. 11.8 Contornos de la función de Hankel

11.5 Funciones de Bessel Modificadas, $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$

Frecuentemente en los problemas de física, se presenta la ecuación

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + x \frac{d}{dx} y(x) - (x^2 + \nu^2)\, y(x) = 0 \tag{11.108}$$

Esto de hecho no es la ecuación de Bessel, pero puede transformarse a una forma de la ecuación de Bessel al sustituir x por $-it$

$$x \frac{d}{dx} \to t \frac{d}{dt},$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \to t^2 \frac{d^2}{dt^2}.$$

Siendo así

$$t^2 \frac{d^2}{dt^2} y(-it) + t \frac{d}{dt} y(-it) + (t^2 - \nu^2)\, y(-it) = 0, \tag{11.109}$$

o $y(-it)$ es una función de Bessel. Es costumbre (y conveniente) seleccionar la normalización de modo que

$$y(x) = I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix). \tag{11.110}$$

Con frecuencia, esto se indica en la forma

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(xe^{i\pi/2}). \tag{11.111}$$

Forma de Serie. En términos de serie infinita, esto es equivalente a remover el signo $(-1)^s$ en la Ec. 11.5 y establecer

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}, \\ I_{-\nu}(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s-\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu} \end{aligned} \tag{11.112}$$

Para ν integral se obtiene

$$I_n(x) = I_{-n}(x). \tag{11.113}$$

Relaciones de Recurrencia. Las relaciones de recurrencia satisfechas por $I_\nu(x)$ se pueden establecer a partir de los desarrollos de serie, pero posiblemente es más fácil trabajar a partir de las relaciones de recurrencia existentes para $J_\nu(x)$. Procedamos a sustituir x por $-ix$ y restablecer la Ec. 11.110 en la forma

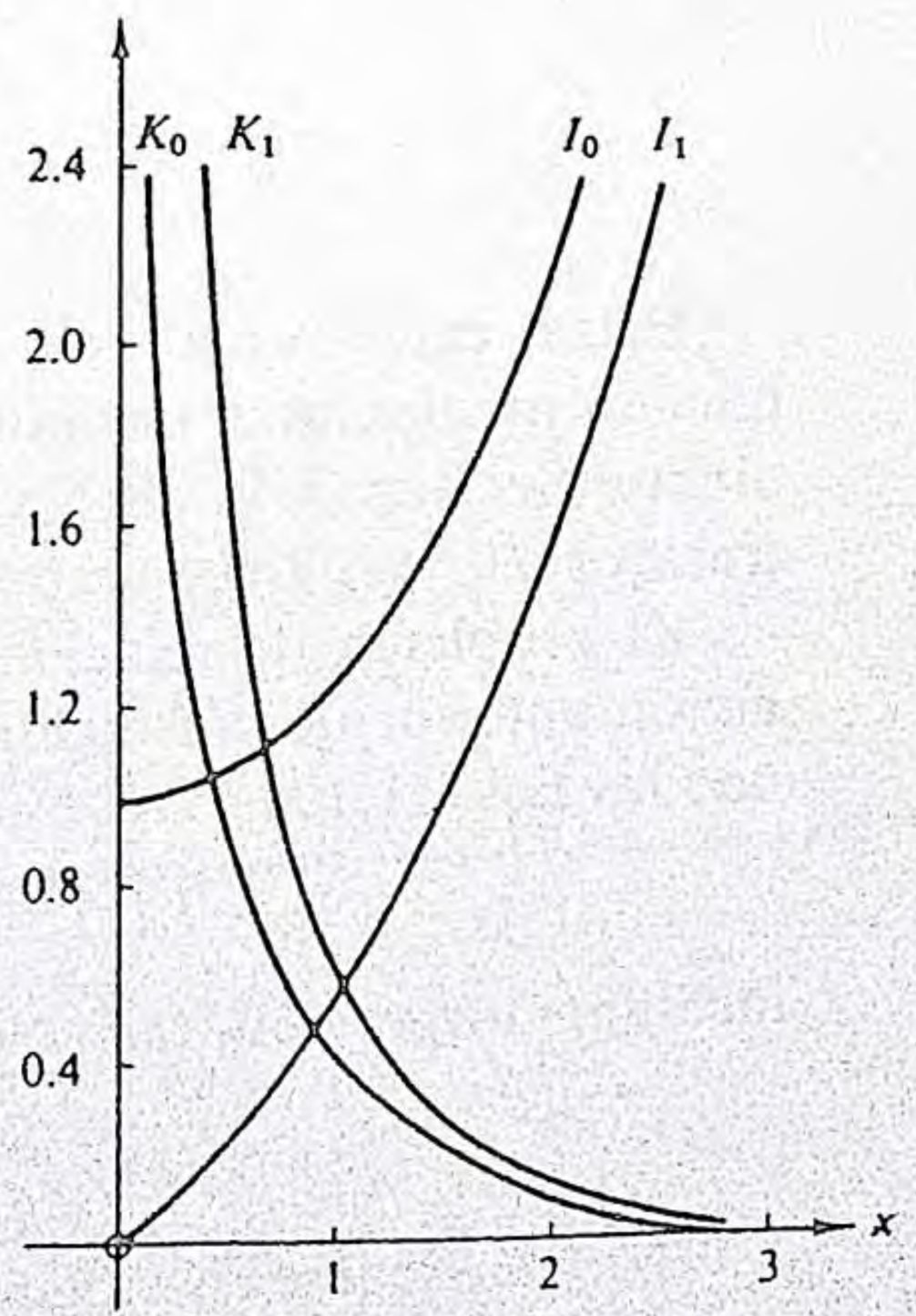


Fig. 11.9 Funciones de Bessel modificadas

$$J_\nu(x) = i^\nu I_\nu(-ix). \tag{11.114}$$

Siendo así, la Ec. 11.10 se transforma en

$$i^{\nu-1} I_{\nu-1}(-ix) + i^{\nu+1} I_{\nu+1}(-ix) = \frac{2\nu}{x} i^\nu I_\nu(-ix).$$

Sustituyendo x por ix, se tiene una relación de recurrencia para $I_\nu(x)$,

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x). \tag{11.115}$$

La Ec. 11.12 se transforma en

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x). \tag{11.116}$$

Estas son las relaciones de recurrencia que se utilizan en el Ejercicio 11.1.14.

De acuerdo con la Ec. 11.113 se puede observar que solamente se tiene una solución independiente cuando ν es un número entero, exactamente como en las funciones Bessel J_ν. La oportunidad de una segunda solución independiente para la Ec. 11.108 es tan solo asunto de conveniencia. La segunda solución que se proporciona aquí se selecciona con base en el comportamiento asintótico, tal como se muestra en la siguiente sección. La confusión en la selección y notación de esta solución probablemente es mayor que en cualquier otra parte de este campo.[1] Muchos autores[2] seleccionan definir la segunda solución en términos de la función de Hankel $H_\nu^{(1)}(x)$ mediante

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &\equiv \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) \\ &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1}[J_\nu(ix) + i\, N_\nu(ix)]. \end{aligned} \tag{11.117}$$

Utilizando las Ecs. 11.60 y 11.110, la Ec. 11.117 se puede transformar en[3]

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}, \tag{11.118}$$

lo cual es análogo a la Ec. 11.60 para $N_\nu(x)$. La selección de la Ec. 11.117 como definición es algo desafortunada en cuanto a que la función $K_\nu(x)$ *no* satisface las mismas relaciones de recurrencia como $I_\nu(x)$ (cf. Ejercicios 11.5.7 y 11.5.8). Para evitar este problema, algunos autores han incluido un factor adicional del coseno $n\pi$. Esto permite que K_ν pueda satisfacer las

[1] Una descripción y comparación de las notaciones se puede encontrar en MTOAC **1**, 207-308 (144).

[2] Watson, Morse y Feshbach, Jeffreys y Jeffreys (sin el término $\pi/2$).

[3] Para n como índice integral, se considera el límite como $\nu \to n$.

[4] Whittaker y Watson.

mismas relaciones de recurrencia que I_ν, pero tiene la desventaja de hacer que $K_\nu = 0$ para $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

El desarrollo en serie para $K_\nu(x)$ se obtiene directamente de la forma de serie para $H_\nu^{(1)}(ix)$. Los términos de menor orden son

$$\begin{aligned} K_0(x) &= -\ln x - \gamma + \ln 2 + \cdots, \\ K_\nu(x) &= 2^{\nu-1}(\nu - 1)!x^{-\nu} + \cdots \end{aligned} \tag{11.119}$$

Debido a que la función de Bessel modificada I_ν se encuentra relacionada con la función de Bessel J_ν, tanto como el senh está relacionado con el seno, I_ν y la segunda solución K_ν se denominan ocasionalmente funciones de Bessel hiperbólicas.

EJEMPLO 11.5.1 TEORIA DE LA DIFUSION NEUTRONICA

Una ilustración de la ocurrencia de las funciones de Bessel modificadas la proporciona la teoría de la difusión de los neutrones térmicos. En el estado estable, la ecuación de continuidad es

$$D\,\nabla^2\varphi - \sum_a \varphi + S = 0, \tag{11.120}$$

en donde el primer término representa la difusión, el segundo término proporciona las pérdidas de absorción y el tercer término representa la intensidad de la fuente. El parámetro D está definido por

$$D = \frac{\lambda_s}{3(1 - 2/3A)}$$

en donde λ_s es la trayectoria libre media entre las colisiones de dispersión. A es el número atómico del núcleo de dispersión e interviene aquí como corrección de la anisotropía de dispersión en el sistema de laboratorio. El flujo de neutrones φ es el producto de la densidad neutrónica y la velocidad promedio. $\sum_a$ es la sección transversal de absorción macroscópica, el producto de la probabilidad de absorción pcr átomo (σ_a) y el número de átomos por unidad de volumen. Se supone que la absorción es pequeña comparada con la dispersión.

En esta ilustración considere que la fuente de neutrones es una fuente de línea infinitamente larga sumergida en un medio de difusión infinito. Esta fuente lineal se encuentra en el eje z. Para la emisión de S_0 neutrones por unidad de longitud por unidad de tiempo

$$S = S_0\,\delta(\boldsymbol{\rho}),$$

en donde $\delta(\boldsymbol{\rho})$ es la función delta de Dirac cilíndrica. La simetría del problema requiere de coordenadas cilíndricas. Debido a que no existe dependencia de z o de θ. la ecuación de difusión se reduce fácilmente a

$$\rho^2\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \rho\frac{d\varphi}{d\rho} - \rho^2\frac{\sum_a}{D}\varphi = 0 \tag{11.121}$$

lejos de la fuente lineal ($\rho \neq 0$). Utilizando

$$k^2 = \frac{\sum_a}{D},$$

en donde k^{-1} se denomina "longitud de absorción".

$$\varphi = a_1 I_0(k\rho) + a_2 K_0(k\rho). \tag{11.122}$$

Ya que $I_0(k\rho)$ aumenta exponencialmente para $k\rho$ grande [cf. el desarrollo en serie (Ec. 11.112) y la Sección 11.6], el coeficiente a_1 debe ser igual a cero; siendo así

$$\varphi = a_2 K_0(k\rho). \tag{11.123}$$

El flujo neto de neutrones a través del área $d\boldsymbol{\sigma}$ está definido por

$$-D\,\nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

La constante de integración a_2 se puede determinar al requerir que D veces la integral del gradiente negativo del flujo neutrónico alrededor del borde de una pequeña caja de píldoras de altura unitaria sea igual a la producción dentro de la caja de píldoras S_0. La caja es pequeña ($\rho \to 0$) para eliminar la absorción y proporciona

$$S_0 = \lim_{\rho \to 0} Da_2 \int -\nabla K_0(k\rho) \cdot \boldsymbol{\rho}_0\, \rho\, d\theta, \tag{11.124}$$

lo cual de hecho es una forma bidimensional de la ley de Gauss (Sección 1.14). Utilizando la forma de serie de $K_0(k\rho)$ esto se transforma en

$$S_0 = Da_2 \lim_{\rho \to 0} \frac{2\pi\rho}{\rho} \tag{11.125}$$

o sea

$$a_2 = \frac{S_0}{2\pi D}.$$

Al sustituir en la Ec. 11.123 se tiene

$$\varphi = \frac{S_0}{2\pi D} K_0(k\rho) \tag{11.126}$$

para la solución completa de este problema de difusión.

Función de Green. La comparación con la Sección 8.6 demuestra que de hecho se ha determinado la función de Green para la ecuación de difusión (11.120). Esto puede verificarse sin dificultades al volver a establecer la Ec. 11.120 en la forma

$$D\,\nabla^2 G(k\rho) - Dk^2\, G(k\rho) = -\delta(\boldsymbol{\rho}), \tag{11.127}$$

para una fuente lineal unitaria (por unidad de longitud) a lo largo del eje z. La integración sobre el volumen de la caja de píldoras proporciona

$$\int \nabla^2 G(k\rho)\, d\tau - k^2 \int G(k\rho)\, d\tau = -\frac{1}{D}\int \delta(\boldsymbol{\rho})\, d\tau$$

$$= -\frac{1}{D}.$$

La segunda integral en la izquierda desaparece a medida que $\rho \to 0$. La evaluación de la primera integral en la izquierda se puede realizar mediante el teorema de Gauss y corresponde exactamente a nuestra solución anterior. El resultado es

$$G(k\rho) = \frac{1}{2\pi D} K_0(k\rho). \tag{11.128}$$

Esta es la función de Green.

Si la fuente se generaliza ahora para que sea una distribución continua de fuentes lineales paralelas descritas por el vector radial $\boldsymbol{\rho}_2$, se encuentra que la función de Green es

$$G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \frac{1}{2\pi D} K_0(k\,|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|). \tag{11.129}$$

El flujo neutrónico resultante es

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}_1) = \int G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) S(\boldsymbol{\rho}_2)\, d\tau_2$$

$$= \frac{1}{2\pi D}\int K_0(k\,|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|) S(\boldsymbol{\rho}_2)\, d\tau_2, \tag{11.130}$$

en donde la integración es sobre el plano perpendicular a las fuentes lineales y $S(\boldsymbol{\rho}_2)$ es la intensidad de la fuente (por unidad de volumen por segundo).

Para situar las funciones de Bessel modificadas $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ en la perspectiva adecuada, se introducen aquí.

1. Estas funciones son soluciones de la ecuación de Bessel modificada que se encuentra frecuentemente.

2. Se requieren para problemas físicos específicos tales como los problemas de difusión.

3. $K_\nu(x)$ proporciona una función de Green.

4. $K_\nu(x)$ permite la determinación conveniente del comportamiento asintótico (Sección 11.6).

EJERCICIOS

11.5.1 Demuestre que

$$e^{(x/2)(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n,$$

generando así las funciones de Bessel modificadas, $I_n(x)$.

11.5.2 Verifique las siguientes identidades

(a) $1 = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x),$

(b) $e^x = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x),$

(c) $e^{-x} = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(x),$

(d) $\cosh x = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x),$

(e) $\operatorname{senh} x = 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}(x).$

11.5.3 (a) A partir de la función generadora del Ejercicio 11.5.1, demuestre que

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \exp\left[(x/2)(t + 1/t)\right]\frac{dt}{t^{n+1}}.$$

(b) Para $n = \nu$, un número no entero, demuestre que la representación de integral anterior se puede generalizar a

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \exp\left[(x/2)(t + 1/t)\right]\frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

El contorno C es el mismo que para $J_\nu(x)$, Fig. 11.6.

11.5.4 Para $\nu > -\frac{1}{2}$ demuestre que $I_\nu(z)$ se puede representar mediante

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm z\cos\theta}\operatorname{sen}^{2\nu}\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{\pm zp}(1 - p^2)^{\nu-1/2}\, dp \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cosh(z\cos\theta)\operatorname{sen}^{2\nu}\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

11.5.5 Una cavidad cilíndrica tiene el radio a y la altura l, Fig. 11.3. Los extremos, $z = 0$ y l se encuentran al potencial cero. Las paredes cilíndricas, $\rho = a$, tienen el potencial $V = V(\varphi, z)$.

(a) Demuestre que el potencial electrostático $\Phi(\rho, \varphi, z)$ tiene la forma funcional

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} I_m(k_n\rho)\operatorname{sen} k_n z\cdot(a_{mn}\operatorname{sen} m\varphi + b_{mn}\cos m\varphi), \quad \text{donde} \quad k_n = \frac{n\pi}{l}$$

(b) Demuestre que los coeficientes a_{mn} y b_{mn} están definidos por

$$\left.\begin{matrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi l I_m(k_n a)} \int_0^{2\pi} \int_0^l V(\varphi, z) \operatorname{sen} k_n z. \left\{\begin{matrix} \operatorname{sen} m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix}\right\} dz\, d\varphi.$$

Sugerencia. Desarrolle $V(\varphi, z)$ como una serie doble y utilice la ortogonalidad de las funciones trigonométricas.

11.5.6 Verifique que $K_\nu(x)$ está definido por

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}$$

y de acuerdo con esto demuestre que

$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x).$$

11.5.7 Demuestre que $K_\nu(x)$ satisface las relaciones de recurrencia

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x),$$
$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K_\nu'(x).$$

11.5.8 Si $\mathscr{K}_\nu = e^{\nu\pi i} K_\nu$, demuestre que $\mathscr{K}_\nu$ satisface las *mismas* relaciones de recurrencia que I_ν.

11.5.9 Para $\nu > -\frac{1}{2}$ demuestre que $K_\nu(z)$ se puede representar por medio de

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-z\cosh t} \operatorname{senh}^{2\nu} t\, dt \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zp} (p^2 - 1)^{\nu - 1/2}\, dp.$$

11.5.10 Demuestre que $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ satisfacen la relación wronskiana

$$I_\nu(x) K_\nu'(x) - I_\nu'(x) K_\nu(x) = -\frac{1}{x}.$$

Este resultado se incluye en la Sección 16.6 para el desarrollo de la función de Green.

11.5.11 Si $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, demuestre que

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(xt) K_0(yt)\, dt.$$

11.5.12 Demuestre que $-\frac{1}{4} N_0(k\rho)$ es una función de Green posible para la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares.

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

(sin dependencia axial o acimutal).

11.5.13 Las funciones de Green que satisfacen

$$(\nabla^2 - k^2)\, G(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r})$$

son

$$G_1(x) = \frac{1}{2k} e^{-kx},$$

$$G_2(\rho) = \frac{1}{2\pi} K_0(k\rho),$$

$$G_3(r) = \frac{k}{4\pi} \frac{e^{-kr}}{kr},$$

correspondientes a una fuente planal, una fuente lineal, y una fuente de punto respectivamente.

(a) Mediante la integración de la fuente de punto para formar una fuente lineal, demuestre que

$$\int_\rho^\infty \frac{e^{-kr}}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}\, dr = K_0(k\rho)$$

o

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\alpha u}}{(u^2 - 1)^{1/2}}\, du = \int_0^\infty e^{-\alpha \cosh t}\, dt = K_0(\alpha).$$

Sugerencia. Demuestre que $G_2(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} G_3(r)\, dx$ en donde $x^2 = r^2 - \rho^2$.

(b) Mediante la integración de la fuente lineal para formar una fuente planal, demuestre que

$$\int_x^\infty \frac{K_0(k\rho)\rho\, d\rho}{(\rho^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-kx}}{k}.$$

o

$$\int_1^\infty \frac{K_0(\alpha u) u\, du}{(u^2 - 1)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Sugerencia. Demuestre que $G_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\rho)\, dy$ en donde $y^2 = \rho^2 - x^2$.

11.6 Desarrollos Asintóticos

Método de Stokes. Si $Z_\nu(x)$, una solución de la ecuación de Bessel se sustituye por $x^{-1/2}\, y(x)$, entonces $y(x)$ satisface la ecuación

$$y'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) y = 0. \tag{11.131}$$

Para valores grandes de $x (x \gg \nu)$, esto se transforma en

$$y_1'' + y_1 = 0, \tag{11.132}$$

con las soluciones ya conocidas

$$y_1 = a_0 \operatorname{sen} x + b_0 \cos x. \tag{11.133}$$

La aproximación se puede mejorar (aun para x grande) al sustituir las constantes a_0 y b_0 por una serie de potencias negativas de x,

$$a_0 \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}, \qquad b_0 \to \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n}.$$

Esto significa que debemos buscar una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} \operatorname{sen} x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} \cos x. \tag{11.134}$$

Mediante la sustitución de la Ec. 11.134 en la ecuación diferencial original (11.131), se puede obtener

$$\begin{aligned} y(x) = &\left[a_0 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2x} b_0 - \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})(\nu^2 - \frac{9}{4})}{2 \cdot (2x)^2} a_0 + \cdots\right] \operatorname{sen} x \\ &+ \left[b_0 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2x} a_0 - \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})(\nu^2 - \frac{9}{4})}{2 \cdot (2x)^2} b_0 + \cdots\right] \cos x. \end{aligned} \tag{11.135}$$

Este proceso se puede continuar tanto como sea deseado. Es de hacerse notar que esta forma es finita y proporciona un resultado exacto para $\nu = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$, etc. Los resultados exactos son las funciones de Bessel esféricas de la Sección 11.7.

Con las dos constantes a_0 y b_0 el método de Stokes proporciona una solución general para la ecuación de Bessel implicando valores grandes de la variable x. Sin embargo, la utilidad de esta solución es limitada en cuanto a que aun no ha sido relacionada o incorporada en las soluciones estándar $J_\nu(x)$ y $N_\nu(x)$. En particular, las contribuciones relativas de sen x cos x son indeterminadas. Esta incorporación o determinación de la fase puede establecerse mediante el uso del método del descendente de gran pendiente (Sección 7.4) para determinar los principales términos de los desarrollos asintóticos de $J_\nu(x)$ y $N_\nu(x)$.

Desarrollo de la Representación Integral, $K_\nu(z)$. Como un procedimiento alternativo y directo, considere la representación de integral (Ejercicio 11.5.9)

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx}(x^2 - 1)^{\nu - 1/2} dx, \qquad \nu > -\frac{1}{2}. \tag{11.136}$$

Por el momento, consideremos que z es real, aun cuando la Ec. 11.136 debe establecerse para $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$. Se tienen dos problemas: en primer lugar, demostrar que K_ν según lo establece la Ec. 11.136 satisface realmente la ecuación de Bessel modificada (11.108); en segundo lugar, demostrar que tiene la normalización adecuada.

1. El que la Ec. 11.136 sea una solución de la ecuación de Bessel modificada se puede verificar mediante la sustitución directa. Se obtiene

$$z^{\nu+1} \int_1^\infty \frac{d}{dx}\left[e^{-zx}(x^2 - 1)^{\nu + 1/2}\right] dx = 0,$$

lo cual transforma el *integrando* combinado a la derivada de una función que desaparece en ambos puntos extremos. El rechazo de la posibilidad de que esta solución contenga I_ν constituye el Ejercicio 11.6.1.

2. La normalización se puede verificar sustituyendo $x = 1 + t/z$.

$$\frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx}(x^2 - 1)^{\nu - 1/2}\, dx$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-z} \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t^2}{z^2} + \frac{2t}{z}\right)^{\nu - 1/2} \frac{dt}{z}$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{(\nu - \frac{1}{2})!}\frac{e^{-z}}{2^\nu z^\nu} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\nu - 1}\left(1 + \frac{2z}{t}\right)^{\nu - 1/2} dt. \tag{11.137}$$

Esta sustitución ha cambiado los límites de la integración a un intervalo más conveniente y ha aislado la dependencia exponencial negativa, e^{-z}. La última integral en la Ec. 11.137 se puede evaluar para $z = 0$ con objeto de proporcionar $(2\nu - 1)!$ Siendo así, al utilizar la fórmula de duplicación (Sección 10.4),

$$\lim_{z \to 0} K_\nu(z) = \frac{(\nu - 1)!2^{\nu - 1}}{z^\nu}, \qquad \nu > 0, \tag{11.138}$$

lo cual concuerda con la Ec. 11.119, comprobando así la normalización.[1]

Ahora, para desarrollar una serie asintótica para $K_\nu(z)$. la Ec. 11.136 se puede volver a establecer (para z grande) en la forma

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\frac{e^{-z}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu - 1/2}\left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{\nu - 1/2} dt.$$

Se desarrolla $(1 + t/2z)^{\nu - 1/2}$ mediante el teorema binomial para obtener

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\frac{e^{-z}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \sum_{r=0}^\infty \frac{(\nu - \frac{1}{2})!}{r!(\nu - r - \frac{1}{2})!}(2z)^{-r} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu + r - 1/2} dt. \tag{11.139}$$

La integración término por término (válida para la serie asintótica) proporciona el desarrollo asintótico deseado para $K_\nu(z)$.

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[1 + \frac{(4\nu^2 - 1^2)}{1!\,8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \cdots\right]. \tag{11.140}$$

Aun cuando la integral de la Ec. 11.136, integrando a lo largo del eje real, ha sido convergente tan solo para $-\pi/2 < \arg z < +\pi/2$, la Ec. 11.140 se puede ampliar a $-3\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$. Considerada como serie infinita, la

[1] Para $\nu = 0$, la integral es divergente logarítmicamente, lo cual concuerda con la divergencia logarítmica de $K_0(z)$ (Sección 11.5).

Ec. 11.140 es de hecho divergente. Sin embargo, esta serie es asintótica en el sentido de que para z lo suficientemente grande, $K_\nu(z)$ se puede aproximar con cualquier grado deseado de precisión. (Cf. Sección 5.11 para la definición y descripción de la serie asintótica.)

Es conveniente volver a establecer la Ec. 11.140 en la forma

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}[P_\nu(iz) + iQ_\nu(iz)] \tag{11.140a}$$

en donde

$$P_\nu(z) \sim 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} - \cdots, \tag{11.140b}$$

$$Q_\nu(z) \sim \frac{\mu-1}{1!(8z)} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \cdots, \tag{11.140c}$$

y

$$\mu = 4\nu^2.$$

Siendo así, con la forma asintótica de $K_\nu(z)$, la Ec. 11.140*a*, se pueden obtener desarrollos para todas las otras funciones de Bessel y funciones hiperbólicas de Bessel, mediante las relaciones de definición:

1. A partir de

$$\frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1}\, H_\nu^{(1)}(iz) = K_\nu(z) \tag{11.141}$$

se tiene

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp i\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \cdot [P_\nu(z) + iQ_\nu(z)],$$
$$-\pi < \arg z < 2\pi. \tag{11.142}$$

2. La segunda función de Hankel es justamente el conjugado complejo de la primera (para un argumento real),

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp -i\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \cdot [P_\nu(z) - iQ_\nu(z)],$$
$$-2\pi < \arg z < \pi. \tag{11.143}$$

Una derivación alternativa del comportamiento asintótico de las funciones de Hankel aparece en la Sección 7.4 como aplicación del método de los descendentes de gran pendiente.

3. Ya que $J_\nu(z)$ es la parte real de $H_\nu^{(1)}(z)$,

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_\nu(z)\cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] - Q_\nu(z)\,\mathrm{sen}\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

$$-\pi < \arg z < \pi. \tag{11.144}$$

4. La función de Neumann es la parte imaginaria de $H_\nu^{(1)}(z)$, o

$$N_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_\nu(z)\,\mathrm{sen}\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + Q_\nu(z)\cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

$$-\pi < \arg z < \pi. \tag{11.145}$$

5. Finalmente, la función de Bessel modificada o hiperbólica regular $I_\nu(z)$ está definida por

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) \tag{11.146}$$

o

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}[P_\nu(iz) - iQ_\nu(iz)], \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}. \tag{11.146a}$$

Esto completa la determinación de los desarrollos asintóticos. Sin embargo, probablemente es interesante hacer notar las características principales. Además del término omnipresente $z^{-1/2}$, J_ν y N_ν se comportan como un coseno y seno respectivamente. Los ceros se encuentran espaciados *casi* uniformemente a intervalos de π; el espaciamiento se vuelve exactamente π en el límite a medida que $z \to \infty$. Las funciones de Hankel han sido definidas con un comportamiento similar a los exponenciales imaginarios, y las funciones de Bessel modificadas, I_ν y K_ν, pasan a formar parte de los exponenciales positivo y negativo. Este comportamiento asintótico puede ser suficiente para eliminar de inmediato una de estas funciones como una solución de un problema físico. De hecho, en la Sección 11.5 esto constituyó la base para eliminar I_0 como una solución del problema de difusión de neutrones en un medio infinito.

Es de cierto interés considerar la precisión de las formas asintóticas que intervienen justamente en el primer término, por ejemplo

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{11.147}$$

La Fig. 11.10 da una comparación con los valores exactos de $J_0(x)$:

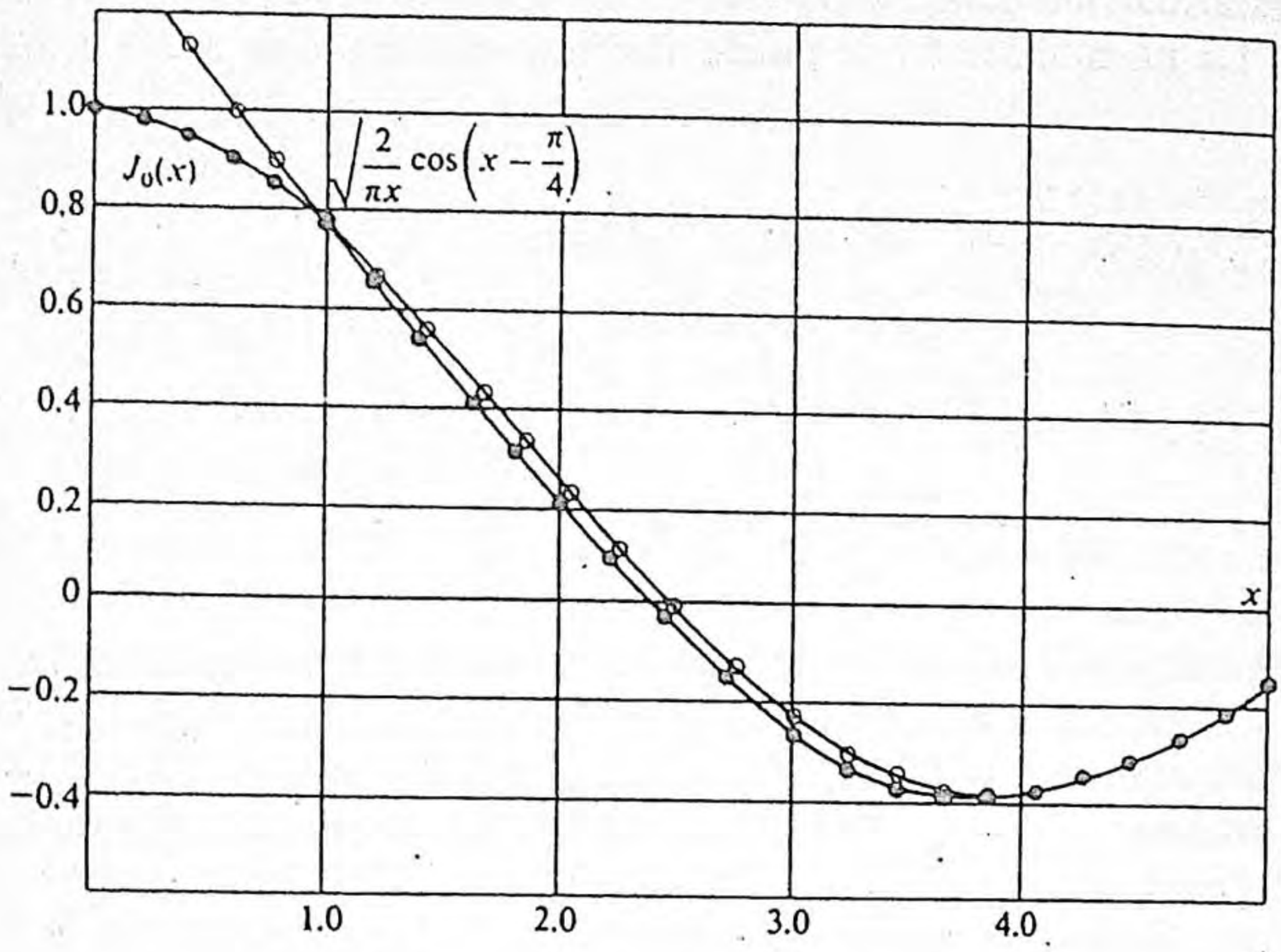


Fig. 11.10 Aproximación asintótica de $J_0(x)$

Como otra medida posible de la precisión de la Ec. 11.147, se pueden comparar las localizaciones de los ceros definidos por la Ec. 11.147 con los ceros o raíces exactas, α_{ns} de la raíz número s de $J_n(x)$, de la Tabla 11.1. La discrepancia

$$\delta_{ns} = \left[s + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right]\pi - \alpha_{ns}, \tag{11.147a}$$

es de -0.0486 para α_{01}, el primer cero de $J_0(x)$, y disminuye rápidamente para $s > 1$. Con el desplazamiento hacia $J_1(x)$, $\delta_{11} = 0.0953$, $\delta_{12} = 0.0530$, etc. Para n mayor, la precisión disminuye rápidamente aun cuando los valores de s (y x) sean relativamente grandes. Evidentemente la condición para la validez de la Ec. 11.147 consiste en que el término del seno sea despreciable, es decir

$$8x \gg 4n^2 - 1. \tag{11.147b}$$

Para n o $\nu > 1$, la región asintótica puede quedar lejana.

Tal como se ha indicado en la Sección 11.3, las formas asintóticas se pueden utilizar para evaluar las diversas fórmulas wronskianas (cf. Ejercicio 11.6.3).

Evaluación Numérica. Cuando un programa de máquina de computación grande de alta velocidad requiere de una de las funciones de Bessel o Bessel modificadas, el programador tiene dos alternativas. Puede almacenar todas las funciones Bessel e indicar al computador la forma de localizar el valor requerido o puede dar instrucciones al computador para calcular simplemente el valor necesario. La primera alternativa sería relativamente más lenta e implicaría demandas no razonables en la capacidad de almacenamiento. Siendo así, el programador adoptaría la alternativa de "calcúlelo por sí mismo".

El cálculo de $J_n(x)$ en que se utiliza la relación de recurrencia, Ec. 11.10, se describe en la Sección 11.1. Para N_n, I_n y K_n, los métodos preferidos son las series cuando x es pequeña y las formas asintóticas (con muchos términos en la serie de potencias negativas) cuando x es grande. El criterio de grande y pequeño puede variar como se muestra en la Tabla 11.2.

TABLA 11.2

Ecuaciones para el cómputo de las funciones de Neumann y de Bessel modificadas

	Serie de potencias	Serie asintótica
$N_n(x)$	Ec. 11.63, $x \leqslant 4$	Ec. 11.145, $x > 4$
$I_n(x)$	Ec. 11.112, $x \leqslant 12$ or $\leqslant n$	Ec. 11.146a, $x > 12$ y $> n$
$K_n(x)$	Ec. 11.119, $x \leqslant 1$	Ec. 11.140a, $x > 1$

En la verdadera práctica, se ha determinado la conveniencia de limitar el cómputo de serie (potencias o asintótica) de $N_n(x)$ y $K_n(x)$ a $n = 0, 1$. Siendo así, $N_n(x)$, $n \geqslant 2$ se calcula utilizando la relación de recurrencia, Ec. 11.10, $K_n(x)$, $n \geqslant 2$ se calcula utilizando las relaciones de recurrencia del Ejercicio 11.5.7. $I_n(x)$ puede manejarse de este modo, si se desea, pero la aplicación directa de la serie de potencias o asintótica es factible para todos los valores de n y x.

EJERCICIOS

11.6.1 Al comprobar la normalización de la representación integral de $K_\nu(z)$ (Ec. 11.136), se ha supuesto que $I_\nu(z)$ no estaba presente.

¿En qué forma se puede saber que la representación de integral (Ec. 11.136) no proporciona $K_\nu(z) + \varepsilon I_\nu(z)$ con $\varepsilon \neq 0$?

11.6.2 (a) Demuestre que

$$y(z) = z^\nu \int e^{-zt}(t^2 - 1)^{\nu - 1/2}\, dt$$

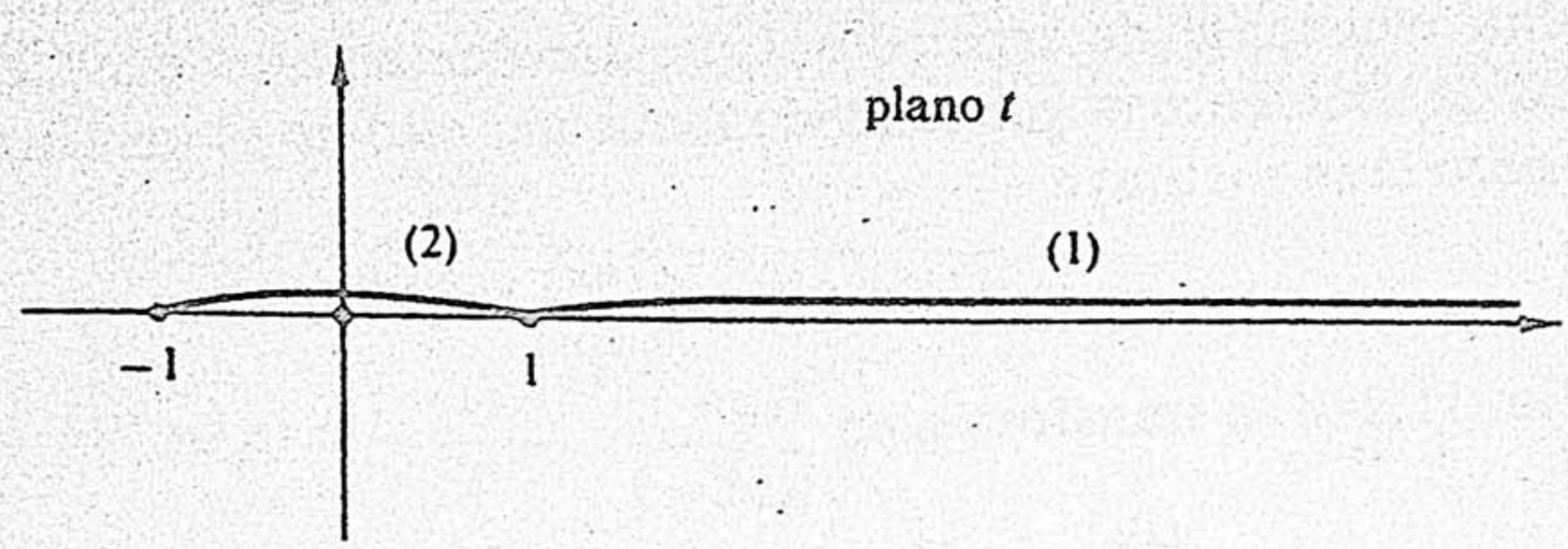


Fig. 11.11 Contornos de la función de Bessel modificada

satisface la ecuación de Bessel modificada, considerando para esto que el contorno se selecciona de tal modo que

$$e^{-zt}(t^2 - 1)^{\nu+1/2}$$

tiene el mismo valor en los puntos inicial y final del contorno.

(b) Verifique que los contornos mostrados en la Fig. 11.11 son adecuados para este problema.

11.6.3 Utilice los desarrollos asintóticos para verificar las siguientes fórmulas wronskianas

(a) $J_\nu(x)\, J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu}(x)\, J_{\nu+1}(x) = -\dfrac{2 \operatorname{sen} \nu\pi}{\pi x}$,

(b) $J_\nu(x)\, N_{\nu+1}(x) - J_{\nu+1}(x)\, N_\nu(x) = -\dfrac{2}{\pi x}$,

(c) $J_\nu(x)\, H^{(2)}_{\nu-1}(x) - J_{\nu-1}(x)\, H^{(2)}_\nu(x) = \dfrac{2}{i\pi x}$,

(d) $I_\nu(x)\, K'_\nu(x) - I'_\nu(x)\, K_\nu(x) = -\dfrac{1}{x}$,

(e) $I_\nu(x)\, K_{\nu+1}(x) + I_{\nu+1}(x)\, K_\nu(x) = \dfrac{1}{x}$.

11.6.4 Demuestre que

$$K_0(x) = \int_0^\infty J_0(xt)\, \frac{t}{1+t^2}\, dt.$$

Sugerencia. (a) Demuestre que K_0 definida aquí satisface la ecuación de Bessel modificada. (b) Demuestre que en el límite conforme $x \to \infty$, $K_0(x) \to 0$, excluyendo así a $I_0(x)$.

11.7 Funciones de Bessel Esféricas

Cuando la ecuación de Helmholtz en coordenadas polares (o cónicas) esféricas se separa, la ecuación radial tiene la forma

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + [k^2r^2 - n(n+1)]R = 0; \tag{11.148}$$

k interviene procedente de la ecuación de Helmholtz y el número entero n es una constante de separación que frecuentemente tiene el significado físico de momento angular. Evidentemente, esto *no* es una función de Bessel, pero si se sustituye

$$R(kr) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}}$$

La Ec. 11.148 se transforma en

$$r^2 \frac{d^2Z}{dr^2} + r\frac{dZ}{dr} + \left[k^2r^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right]Z = 0, \tag{11.149}$$

lo cual sí es la ecuación de Bessel, Z es, así, una función de Bessel del orden $n + \frac{1}{2}$ (n es un número entero). Debido a la importancia de las coordenadas esféricas, esta combinación

$$\frac{Z_{n+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}},$$

se presenta con bastante frecuencia.

Definiciones. Es conveniente rotular estas funciones de Bessel esféricas con las siguientes ecuaciones de definición:

$$\begin{aligned}
j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n+1/2}(x),\\
n_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{-n-1/2}(x),^{1}\\
h_n^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H^{(1)}_{n+1/2}(x) = j_n(x) + i\, n_n(x),\\
h_n^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H^{(2)}_{n+1/2}(x) = j_n(x) - i\, n_n(x).
\end{aligned} \tag{11.150}$$

Estas funciones de Bessel esféricas se pueden expresar en la forma de serie mediante el uso de la serie para J_n, (Ec. 11.5), sustituyendo n con $n + \frac{1}{2}$.

$$J_{n+1/2}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s + n + \frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1/2} \tag{11.151}$$

Utilizando la fórmula de duplicación de Legendre,

$$z!(z + \tfrac{1}{2})! = 2^{-2z-1}\pi^{1/2}(2z + 1)!, \tag{11.152}$$

[1] Esto es posible debido a que $\cos(n + \frac{1}{2})\pi = 0$.

se tiene

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^{2s+2n+1}(s+n)!}{\pi^{1/2}(2s+2n+1)!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1/2}$$

$$= 2^n x^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+n)!}{s!(2s+2n+1)!} x^{2s}. \tag{11.153}$$

Ahora bien, $N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} J_{-n-1/2}(x)$ y de acuerdo con la Ec. 11.5 encontramos que

$$J_{-n-1/2}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n-\frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n-1/2} \tag{11.154}$$

Esto proporciona

$$n_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{2^n \pi^{1/2}}{x^{n+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n-\frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \tag{11.155}$$

La fórmula de duplicación de Legendre se puede utilizar nuevamente para dar lugar a

$$n_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n x^{n+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s-n)!}{s!(2s-2n)!} x^{2s}. \tag{11.156}$$

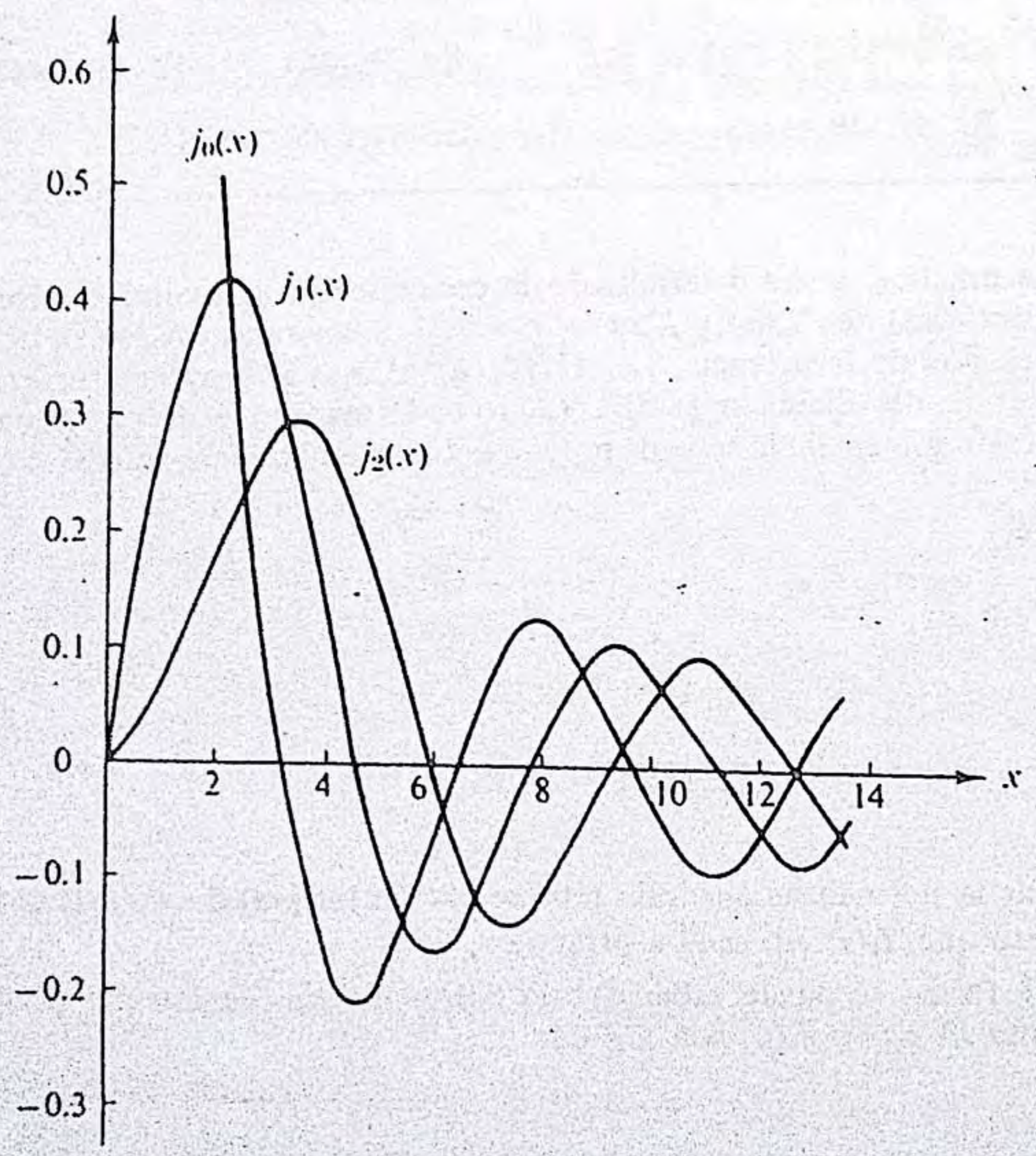


Fig. 11.12 Funciones de Bessel esféricas

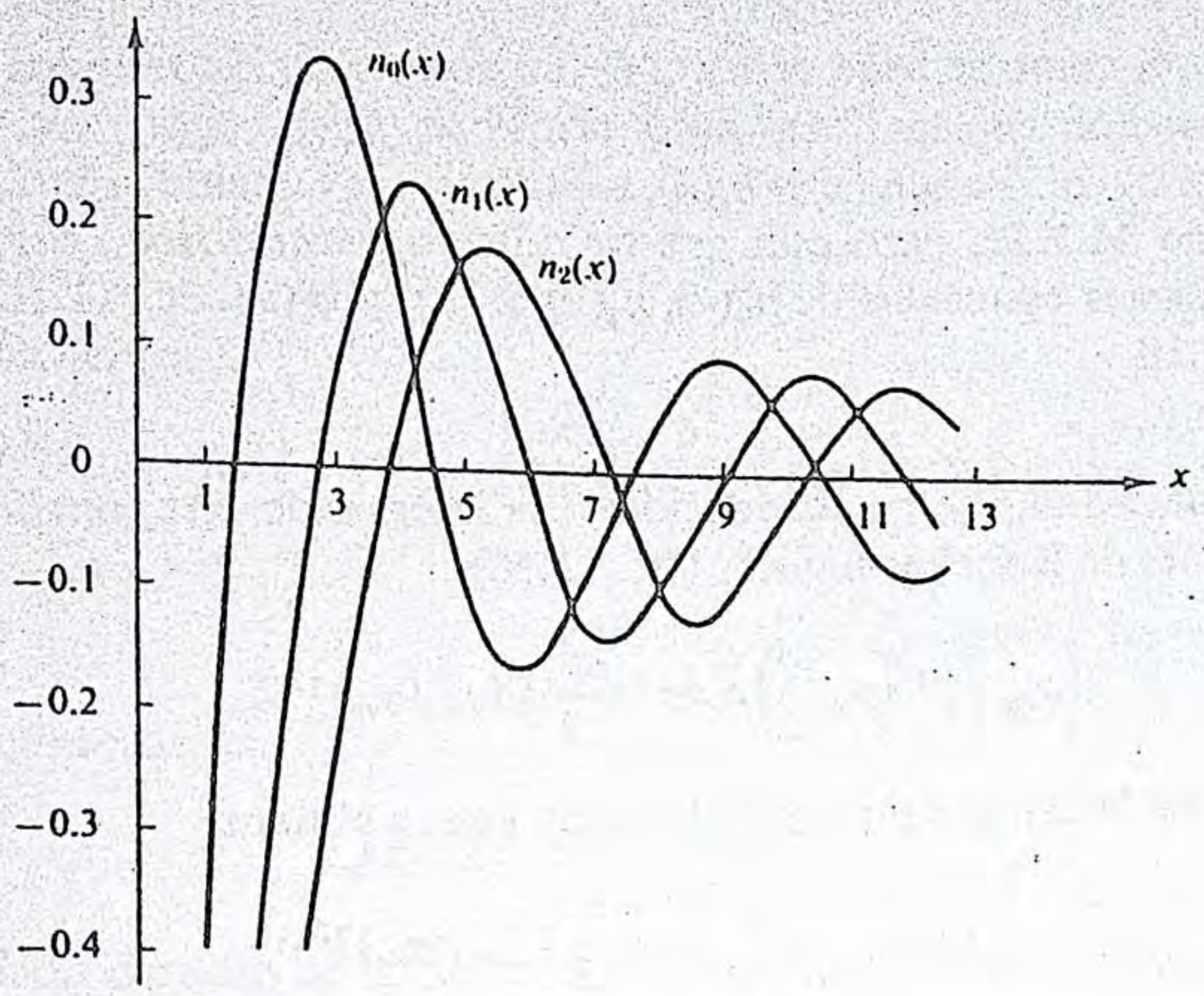


Fig. 11.13 Funciones de Neumann esféricas

Sin embargo, esto resulta problemático de manipular para n, un número entero positivo debido a los factoriales tanto en el numerador como en el denominador. Estas funciones de Bessel esféricas están íntimamente relacionadas con las funciones trigonométricas, tal como puede establecerse al considerar el caso especial $n = 0$. Se encuentra

$$j_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} x^{2s}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad (11.157)$$

Chequear pág 341 Wi Lap

mientras que para n_0 la Ec. 11.156 proporciona

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}. \qquad (11.158)$$

De acuerdo con la definición de las funciones de Hankel esféricas (Ec. 11.150)

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{1}{x}(\operatorname{sen} x - i\cos x) = -\frac{i}{x}e^{ix}$$

$$h_0^{(2)}(x) = \frac{1}{x}(\operatorname{sen} x + i\cos x) = \frac{i}{x}e^{-ix} \qquad (11.159)$$

La relación con las funciones trigonométricas probablemente pueda ser más evidente al considerar la serie asintótica de la Sección 11.6. Para $\nu =$ $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$, etc., la serie asintótica es finita proporcionando combinaciones finitas de las funciones trigonométricas.

Valores Limitantes. Para $x \ll 1$,[1] las Ecs. 11.153 y 11.156 proporcionan

$$j_n(x) \approx \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^n = \frac{x^n}{(2n+1)!!} \tag{11.160a}$$

$$n_n(x) \approx \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(-n)!}{(-2n)!} x^{-n-1} \tag{11.160b}$$

$$= -\frac{(2n)!}{2^n n!} x^{-n-1} = -(2n-1)!!\, x^{-n-1}.$$

La transformación de factoriales en las expresiones para $n_n(x)$ utiliza el Ejercicio 10.1.3. Los valores limitantes de las funciones de Hankel esféricas son como $\pm i n_n(x)$.

Los valores asintóticos de j_n, n_n, $h_n^{(2)}$ y $h_n^{(1)}$ se pueden obtener de las formas asintóticas de Bessel, Sección 11.6,

$$j_n(x) \sim \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(x - \frac{n\pi}{2}\right), \tag{11.161a}$$

$$n_n(x) \sim -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right), \tag{11.161b}$$

$$h_n^{(1)}(x) \sim (-i)^{n+1} \frac{e^{ix}}{x}, \tag{11.161c}$$

$$h_n^{(2)}(x) \sim i^{n+1} \frac{e^{-ix}}{x}. \tag{11.161d}$$

La condición para estas formas de Bessel esféricas es que $x \gg n(n+1)/2$.

Relaciones de Recurrencia. Las relaciones de recurrencia a las cuales nos referimos ahora proporcionan un procedimiento adecuado para desarrollar las funciones de Bessel esféricas de orden superior. Estas relaciones de recurrencia se pueden derivar de la serie, pero del mismo modo que con las funciones de Bessel modificadas, es más fácil sustituir en las relaciones de recurrencia conocidas (Ecs. 11.10 y 11.12). Esto proporciona

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x), \tag{11.162a}$$

$$n f_{n-1}(x) - (n+1) f_{n+1}(x) = (2n+1) f_n'(x). \tag{11.162b}$$

Mediante la readaptación de estas relaciones (o sustituyendo en las Ecs. 11.15 y 11.17), se obtiene

[1] La condición de que el segundo término en la serie sea despreciable comparado con el primero es de hecho $x \ll 2[(2n+2)(2n+3)/(n+1)]^{1/2}$ para $j_n(x)$.

$$\frac{d}{dx}[x^{n+1} f_n(x)] = x^{n+1} f_{n-1}(x), \tag{11.163a}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} f_n(x)] = -x^{-n} f_{n+1}(x). \tag{11.163b}$$

Aquí, f_n puede representar j_n, n_n, $h_n^{(1)}$, o $h_n^{(2)}$.

Aplicando la Ec. 11.163*b* se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} j_1(x) &= \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \\ j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \operatorname{sen} x - \frac{3}{x^2} \cos x, \end{aligned} \tag{11.164}$$

$$\begin{aligned} n_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \\ n_2(x) &= -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3}{x^2} \operatorname{sen} x, \text{ etc.} \end{aligned} \tag{11.165}$$

Mediante la inducción matemática se pueden establecer las fórmulas de Rayleigh

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right), \tag{11.166}$$

$$n_n(x) = -(-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right). \tag{11.167}$$

Se puede observar que las funciones de Bessel esféricas $j_n(x)$ y $n_n(x)$ siempre pueden expresarse como sen x y cos x con coeficientes que son polinomios que involucran potencias negativas de x. Para las funciones de Hankel esféricas

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(x) &= -i(-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{e^{ix}}{x}\right) \\ h_n^{(2)}(x) &= i(-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{e^{-ix}}{x}\right). \end{aligned} \tag{11.168}$$

Cómputo Numérico. Las funciones de Bessel modificadas y esféricas se pueden calcular utilizando las mismas técnicas descritas en las Secciones 11.1 y 11.6 para la evaluación de las funciones de Bessel. Para $j_n(x)$ e $i_n(x)$[1] es conveniente el uso de la Ec. 11.162*a* y el Ejercicio 11.7.19 y trabajar

[1] Las funciones de Bessel modificadas esféricas, $i_n(x)$ y $k_n(x)$, se definen en el Ejercicio 11.7.16.

hacia abajo, como se hace para $J_n(x)$. La normalización se logra mediante la comparación con las formas conocidas de $j_0(x)$ e $i_0(x)$, Ec. 11.157 y Ejercicio 11.7.16. Para $n_n(x)$ y $k_n(x)$, se utilizan nuevamente la Ec. 11.162*a* y el Ejercicio 11.7.20, pero esta vez trabajando *hacia arriba,* comenzando con las formas conocidas de $n_0(x)$, $n_1(x)$, $k_0(x)$, y $k_1(x)$, Ec. 11.165 y Ejercicio 11.7.18.

Ortogonalidad. Se puede considerar la integral de ortogonalidad para las funciones de Bessel ordinarias (Ec. 11.50),

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu p}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu q}\frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho = \frac{a^2}{2}\,[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu p})]^2\,\delta_{pq} \tag{11.169}$$

y sustituir en la expresión para j_n de modo que se obtiene

$$\int_0^a j_n\left(\alpha_{np}\frac{\rho}{a}\right)j_n\left(\alpha_{nq}\frac{\rho}{a}\right)\rho^2\, d\rho = \frac{a^3}{2}\,[j_{n+1}(\alpha_{np})]^2\,\delta_{pq}. \tag{11.170}$$

Aquí α_{np} y α_{nq} son raíces de j_n.

Esto representa la ortogonalidad con respecto a las raíces de las funciones de Bessel. Una ilustración de esta clase de ortogonalidad se proporciona posteriormente en esta sección por medio del problema de una partícula en una esfera. La Ec. 11.170 garantiza la ortogonalidad de las funciones de onda $j_n(r)$ para n fija. (Si n varía, el armónico esférico proporciona la ortogonalidad.) Otra forma, la ortogonalidad con respecto a los índices, se puede desarrollar como sigue. De acuerdo con la Ec. 11.148, con $x = kr$,

$$\begin{aligned} x^2 j_n'' + 2xj_n' + [x^2 - n(n+1)]j_n &= 0,\\ x^2 j_m'' + 2xj_m' + [x^2 - m(m+1)]j_m &= 0. \end{aligned} \tag{11.171}$$

Se multiplica la primera ecuación por j_m, la segunda por j_n, y se resta:

$$\begin{aligned} [n(n+1) - m(m+1)]\,j_n j_m &= x^2(j_n'' j_m - j_n j_m'') + 2x(j_n' j_m - j_n j_m')\\ &= \frac{d}{dx}\,[x^2(j_n' j_m - j_n j_m')]. \end{aligned} \tag{11.172}$$

La última ecuación es una expresión de la forma de Sturm-Liouville de la Ec. 11.148 (cf. Sección 9.1). Integrando desde cero hasta el infinito, se obtiene

$$[n(n+1) - m(m+1)]\int_0^\infty j_m(x)\,j_n(x)\,dx = \left|x^2(j_n' j_m - j_n j_m')\right|_0^\infty. \tag{11.173}$$

El lado derecho evidentemente desaparece para $x = 0$ (m, n se supone que son números enteros no negativos).

A medida que $x \to \infty$, también desaparece considerando que $(n - m)$ es par, tal como se puede demostrar mediante el examen de las formas asintóticas

$$j_n(x) \to \frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(x - \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$j_n'(x) \to \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Se encuentra

$$x^2(j_n'j_m - j_nj_m') \to \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(x - \frac{m\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(x - \frac{m\pi}{2}\right) +$$

$$O(x^{-1}) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(n - m) + O(x^{-1}).$$

En consecuencia

$$\int_0^\infty j_m(x)\, j_n(x)\, dx = \frac{\operatorname{sen}[(n - m)\pi/2]}{n(n+1) - m(m+1)}. \tag{11.174}$$

El lado derecho de la Ec. 11.174 desaparece para $(n - m)$ par. Si $(n - m)$ es impar, una de las funciones de Bessel esféricas, por ejemplo j_m, será impar mientras que la otra será par,

$$j_p(x) = (-1)^p j_p(-x). \tag{11.175}$$

En consecuencia, la integral desaparece cuando el límite inferior se extiende a Siendo así, se tiene

$$\int_{-\infty}^\infty j_m(x)\, j_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n, \qquad m, n \geqslant 0. \tag{11.176}$$

Si $m = n$ (cf. Ejercicio 11.7.11), se tiene

$$\int_{-\infty}^\infty [j_n(x)]^2\, dx = \frac{\pi}{2n+1}. \tag{11.177}$$

EJEMPLO 11.7.1 PARTICULA EN UNA ESFERA

Una ilustración del uso de las funciones de Bessel esféricas lo proporciona el problema de la partícula mecánica cuántica en una esfera de radio a. La teoría cuántica requiere que la función de onda ψ, la cual describe nuestra partícula, satisfaga

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi, \tag{11.178}$$

y las condiciones limitantes (a) $\psi(r \leqslant a)$ permanecen finitas, (b) $\psi(a) = 0$. Esto corresponde a un potencial $V = 0$, $r \leqslant a$, y $V = \infty$, $r > a$. Aquí h es la constante de Planck (dividida entre 2π), m, la masa de la partícula y E su energía. Procederemos a determinar el valor *mínimo* de la energía para la cual la ecuación de onda tiene una solución aceptable. La Ec. 11.178 es

justamente la ecuación de Helmholtz con una parte radial (cf. Sección 2.5 para la separación de variables)

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]R = 0. \tag{11.179}$$

En consecuencia, mediante la Ec. 11.148, con $n = 0$,

$$R = Aj_0\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}r\right) + Bn_0\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}r\right) \tag{11.180}$$

Seleccionamos el índice $n = 0$, ya que cualquier dependencia angular incrementa la energía. La función de Neumann esférica se desecha debido a su comportamiento divergente en el origen. Técnicamente, la función de Neumann esférica n_0 es una función de Green que satisface la ecuación de Green y que *no* satisface la ecuación de onda de Schrödinger *en el origen.* Para satisfacer la segunda condición limitante (para todos los ángulos), se requiere

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a = \alpha,$$

en donde α es una raíz de j_0, es decir $j_0(\alpha) = 0$. Esto tiene el efecto de limitar las energías permisibles a un conjunto discreto o, dicho en otras palabras, la aplicación de la condición limitante (b) cuantifica la energía E. La α más pequeña es el primer cero de j_0,

$$\alpha = \pi$$

y

$$E_{\min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{h^2}{8ma^2}, \tag{11.181}$$

lo cual significa que para cualquier esfera finita la partícula tendrá una energía de punto cero o mínima positiva. Esto constituye una ilustración del principio de incertidumbre de Heisenberg.

En la física del estado sólido, la astrofísica y otras áreas de la física, desearíamos conocer a qué formas (estados energéticos) corresponden las energías menores o iguales a cierta energía fija E_0. Para un volumen cúbico (Ejercicio 2.5.3) el problema es relativamente simple. El caso esférico de dificultad considerablemente mayor ha sido considerado por R. H. Lambert, *Am. J. Phys.* **36**, 417 y 1169 (1968).

Las funciones de Bessel esféricas intervendrán nuevamente en lo referente a las ondas esféricas, pero su consideración adicional será pospuesta hasta que hayan sido introducidas las funciones angulares correspondientes, es decir las funciones de Legendre.

EJERCICIOS

11.7.1 Demuestre que

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, N_{n+1/2}(x),$$

equivale automáticamente a

$$(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{-n-1/2}(x).$$

11.7.2 Verifique que, dentro del factor $\sqrt{\pi/2x}$, j_0, j_1, n_0 y n_1 están definidos por las formas asintóticas de J_ν y N_ν; $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (Ecs. 11.144 y 11.145).

11.7.3 Utilice la representación de integral para $J_\nu(x)$,

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - \frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{\pm ixp}(1-p^2)^{\nu-1/2}\, dp,$$

para demostrar que las funciones de Bessel esféricas $j_n(x)$ pueden expresarse en términos de las funciones trigonométricas; es decir

$$j_0(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

$$j_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$$

11.7.4 Separe la forma de serie para $n_n(x)$, Ec. 11.156, en dos partes, una con $0 \le s \le n$, y una segunda con $s > n$. Vuelva a establecer el término general en la primera parte en términos de factoriales del argumento no negativo. A modo de comprobación parcial de la serie verifique que $n_1(x) = -(\cos x)/x^2 - (\operatorname{sen} x)/x$.

Respuesta.
$$n_n(x) = \frac{-1}{2^n x^{n+1}} \sum_{s=0}^{n} \frac{(2n-2s)!}{(n-s)!}\frac{x^{2s}}{s!} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n x^{n+1}} \sum_{s=n+1}^{\infty} (-1)^s \frac{(s-n)!}{(2s-2n)!}\frac{x^{2s}}{s!}.$$

Sugerencia. Cf. Ejercicio 10.1.3.

11.7.5 (a) Derive las relaciones de recurrencia

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x),$$

$$n f_{n-1}(x) - (n+1) f_{n+1}(x) = (2n+1) f_n'(x),$$

que son satisfechas por las funciones de Bessel esféricas, $j_n(x)$, $n_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ y $h_n^{(2)}(x)$.

(b) A partir de estas dos relaciones de recurrencia, demuestre que la función de Bessel esférica $f_n(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$x^2 f_n''(x) + 2x f_n'(x) + [x^2 - n(n+1)] f_n(x) = 0.$$

11.7.6 Demuestre mediante inducción matemática que

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x dx}\right)^n \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

para n un número entero no negativo arbitrario.

11.7.7 De acuerdo con la descripción de ortogonalidad de las funciones de Bessel esféricas, demuestre que una relación wronskiana para $j_n(x)$ y $n_n(x)$ es

$$j_n(x)\, n_n'(x) - j_n'(x)\, n_n(x) = \frac{1}{x^2}.$$

11.7.8 Verifique

$$h_n^{(1)}(x)\, h_n^{(2)\prime}(x) - h_n^{(1)\prime}(x)\, h_n^{(2)}(x) = -\frac{2i}{x^2}.$$

11.7.9 Verifique la representación de integral de Poisson de la función de Bessel esférica

$$j_n(z) = \frac{z^n}{2^{n+1} n!} \int_0^\pi \cos(z \cos\theta) \operatorname{sen}^{2n+1}\theta \, d\theta.$$

11.7.10 De acuerdo con la Ec. 11.173, demuestre que la Ec. 11.174 es lo que resulta y también que

$$\int_0^\infty J_\mu(x)\, J_\nu(x) \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen}[(\mu-\nu)\pi/2]}{\mu^2 - \nu^2}, \qquad \mu + \nu > -1.$$

11.7.11 Derive la Ec. 11.177

$$\int_{-\infty}^\infty [j_n(x)]^2\, dx = \frac{\pi}{2n+1}.$$

11.7.12 Establezca la integral de ortogonalidad para $j_L(kr)$ en una esfera de radio R con la condición limitante

$$j_L(kR) = 0.$$

El resultado se utiliza en la clasificación de la radiación electromagnética de acuerdo con su momento angular.

11.7.13 Las integrales de Fresnel que se presentan en la teoría de la difracción están definidas por

$$x(t) = \int_0^t \cos(v^2)\, dv,$$

$$y(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(v^2)\, dv.$$

Demuestre que estas integrales se pueden desarrollar en una serie de funciones de Bessel esféricas.

$$x(s) = \frac{1}{2}\int_0^s j_{-1}(u) u^{1/2}\, du = s^{1/2} \sum_{n=0}^\infty j_{2n}(s),$$

$$y(s) = \frac{1}{2}\int_0^s j_0(u) u^{1/2} du = s^{1/2} \sum_{n=0}^\infty j_{2n+1}(s).$$

Sugerencia. Para establecer la igualdad de la integral y la suma, probablemente usted deseará trabajar con sus derivadas. Los análogos de Bessel esféricos de las Ecs. 11.12 y 11.14 serán de utilidad.

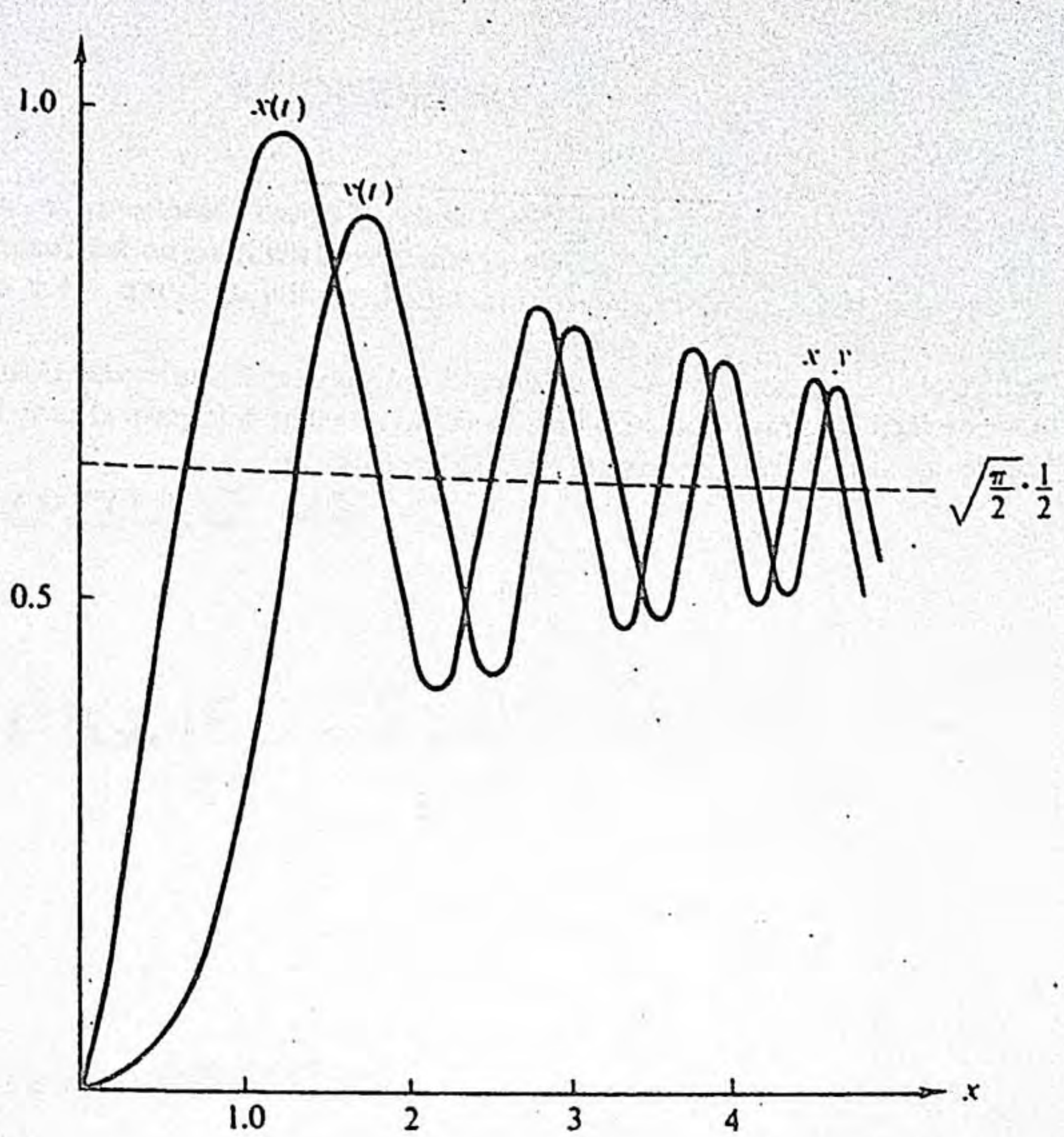


FIG. 11.14 Integrales de Fresnel

11.7.14 Una esfera hueca de radio a (resonador de Helmholtz) contiene ondas de sonido estacionarias. Encuentre la frecuencia mínima de oscilación en términos del radio a y la velocidad del sonido v. Las ondas de sonido satisfacen la ecuación de onda

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

y la condición limitante

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \qquad r = a.$$

Esta es una condición limitante de Neumann. El Ejemplo 11.7.1 tiene la misma ecuación diferencial pero con una condición limitante de Dirichlet.

Respuesta. $\nu_{\text{mín}} = 0.3313\, v/a$,
$\lambda_{\text{máx}} = 3.018a$.

11.7.15 Demuestre que las funciones de Green para la parte radial de la ecuación de Helmholtz tridimensional (singularidad de la fuente en el origen) son

(a) $-\dfrac{k}{4\pi}n_0(kr)$, onda estacionaria,

(b) $\dfrac{ik}{4\pi}h_0^{(1)}(kr)$, onda saliente (suponga la dependencia del tiempo de $e^{-i\omega t}$).

La generalización a una fuente lejos del origen se describe en la Sección 16.6.

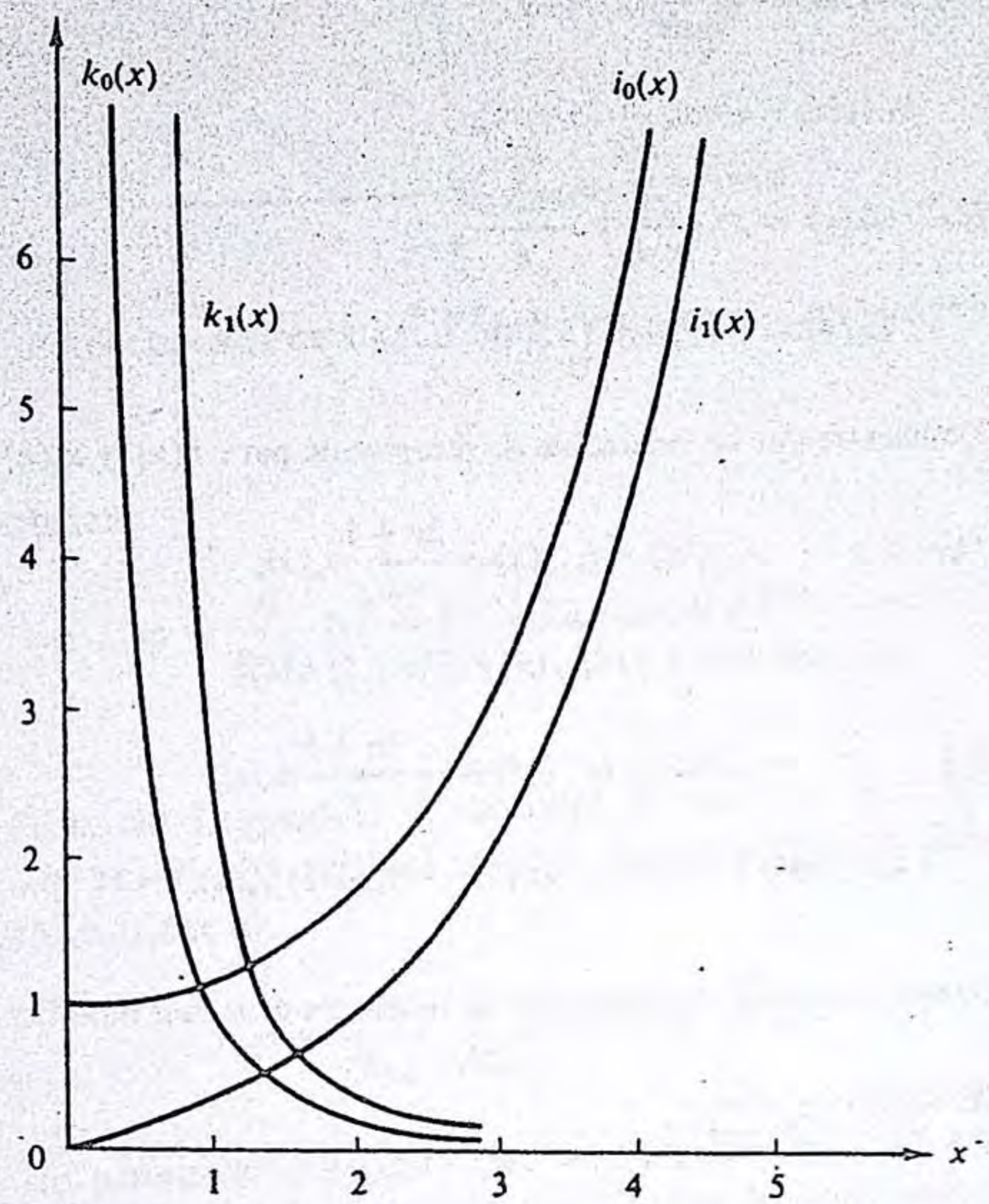


FIG. 11.15 Funciones de Bessel modificadas esféricas

11.7.16 Definiendo las funciones de Bessel modificadas esféricas mediante

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, I_{n+1/2}(x),$$

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, K_{n+1/2}(x),$$

demuestre que

$$i_0(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{x}$$

$$k_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Observe que los factores numéricos en las definiciones de i_n y k_n *no* son idénticos.

11.7.17 (a) Demuestre que la paridad de $i_n(x)$ es $(-1)^n$.
(b) Demuestre que $k_n(x)$ no tiene paridad definida.

11.7.18 Demuestre que las funciones de Bessel modificadas esféricas satisfacen las siguientes relaciones:

(a) $i_n(x) = i^{-n} j_n(ix)$,
$k_n(x) = -i^n h_n^{(1)}(ix)$,

(b) $i_{n+1}(x) = x^n \dfrac{d}{dx}(x^{-n} i_n),$

$$k_{n+1}(x) = -x^n \frac{d}{dx}(x^{-n} k_n),$$

(c) $i_n(x) = x^n \left(\dfrac{d}{x\,dx}\right)^n \dfrac{\operatorname{senh} x}{x},$

$$k_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \frac{e^{-x}}{x}.$$

11.7.19 Demuestre que las relaciones de recurrencia para $i_n(x)$ y $k_n(x)$ son

(a) $$i_{n-1}(x) - i_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} i_n(x),$$

$$n\, i_{n-1}(x) + (n+1)\, i_{n+1}(x) = (2n+1)\, i_n'(x),$$

(b) $$k_{n-1}(x) - k_{n+1}(x) = -\frac{2n+1}{x} k_n(x),$$

$$n\, k_{n-1}(x) + (n+1)\, k_{n+1}(x) = -(2n+1)\, k_n'(x).$$

11.7.20 Derive los valores limitantes de las funciones de Bessel modificadas esféricas

(a) $i_n(x) \approx \dfrac{x^n}{(2n+1)!!}$

$$k_n(x) \approx \frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}, \qquad x \ll 1.$$

(b) $i_n(x) \sim \dfrac{e^x}{2x}$

$$k_n(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}, \qquad x \gg n(n+1)/2.$$

11.7.21 Demuestre que el wronskiano de las funciones de Bessel modificadas esféricas está definido por

$$i_n(x)\, k_n'(x) - i_n'(x)\, k_n(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

11.7.22 Demuestre que la función de Green para la parte radial de la ecuación de Helmholtz modificada tridimensional, $(\nabla^2 - k^2)\psi = 0$, es

$$\frac{k}{4\pi} k_0(kr).$$

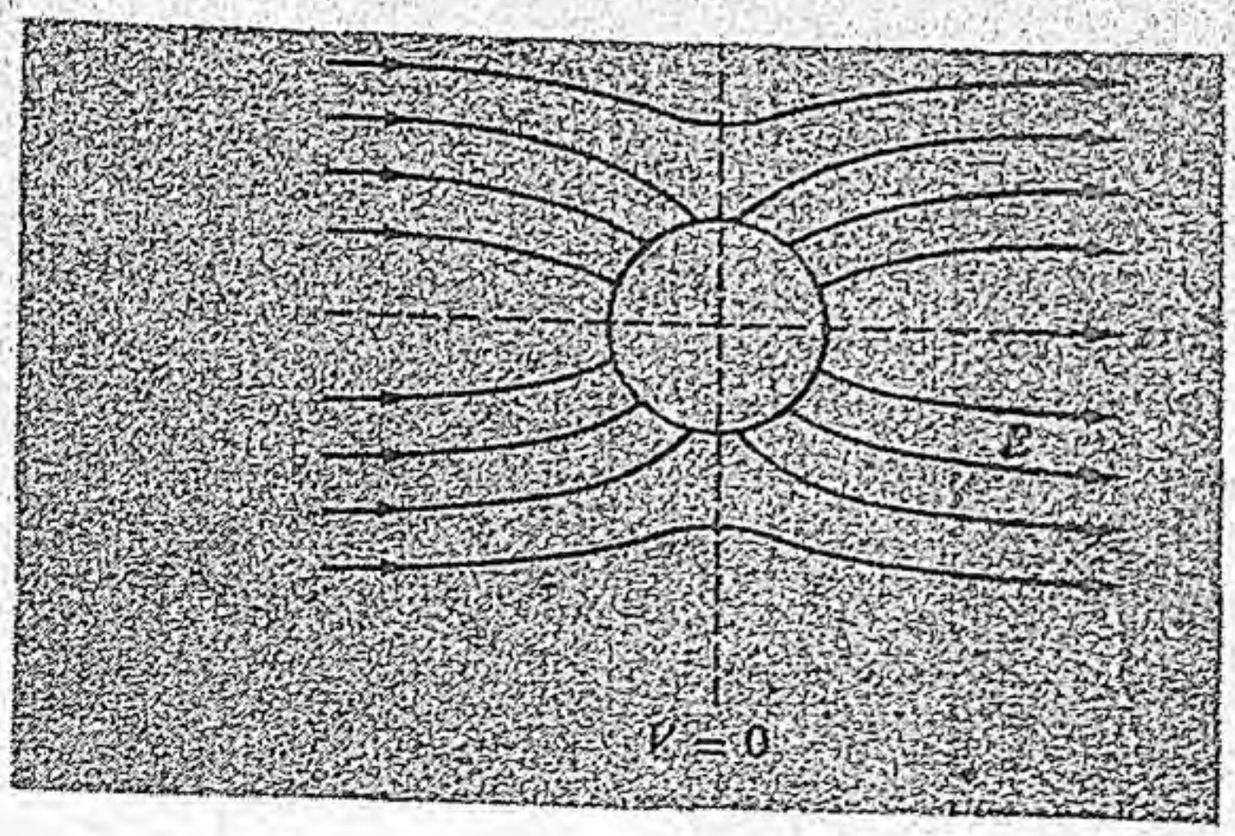
(Fuente en el origen.)

REFERENCIAS

WATSON, G. N., *A Treatise on The Theory of Bessel Functions.* 2a. ed. Cambridge: Cambridge University Press (1952). Este es un texto definitivo de las funciones de Bessel y sus propiedades. Aun cuando es de lectura difícil, resulta de sumo valor como referencia definitiva.

RELTON, F. E., *Applied Bessel Functions.* Londres: Blackie and Son (1946). Un volumen breve de fácil lectura. Probablemente es la mejor referencia para el estudiante principiante.

Véanse también las referencias al final del Capítulo 13.



CAPITULO 12

FUNCIONES DE LEGENDRE

12.1 Función Generadora

La ecuación diferencial de Legendre ya se ha presentado en la separación de variables para la ecuación de Laplace, la ecuación de Helmholtz, y otras ecuaciones diferenciales similares en coordenadas polares esféricas así como en las coordenadas esferoidales prolatas y oblatas. En la Sección 9.1 se demostró que la ecuación de Legendre es autoadjunta y, como consecuencia de esto, que las soluciones (indeterminadas) son ortogonales.

Las soluciones polinomiales se construyeron de hecho en la Sección 9.3 mediante el procedimiento de Schmidt. Sin embargo, no se demostró que este procedimiento genera todos los polinomios de Legendre así como tampoco que estos polinomios son de hecho soluciones de la ecuación de Legendre.

Base Física. Electrostática. Del mismo modo que con las funciones de Bessel, es conveniente introducir los polinomios de Legendre mediante una función generadora. Sin embargo, existe la posibilidad de la interpretación física directa. Considere una carga eléctrica q colocada en el eje z en $z = a$. Tal como se muestra en la Fig. 12.1, el potencial electrostático de la carga q es

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_1} \text{ (unidades mks)} \tag{12.1}$$

Nuestro problema consiste en expresar el potencial electrostático en términos de coordenadas polares esféricas r y θ (la coordenada φ se encuentra ausente debido a la simetría alrededor del eje z). Utilizando la ley de los

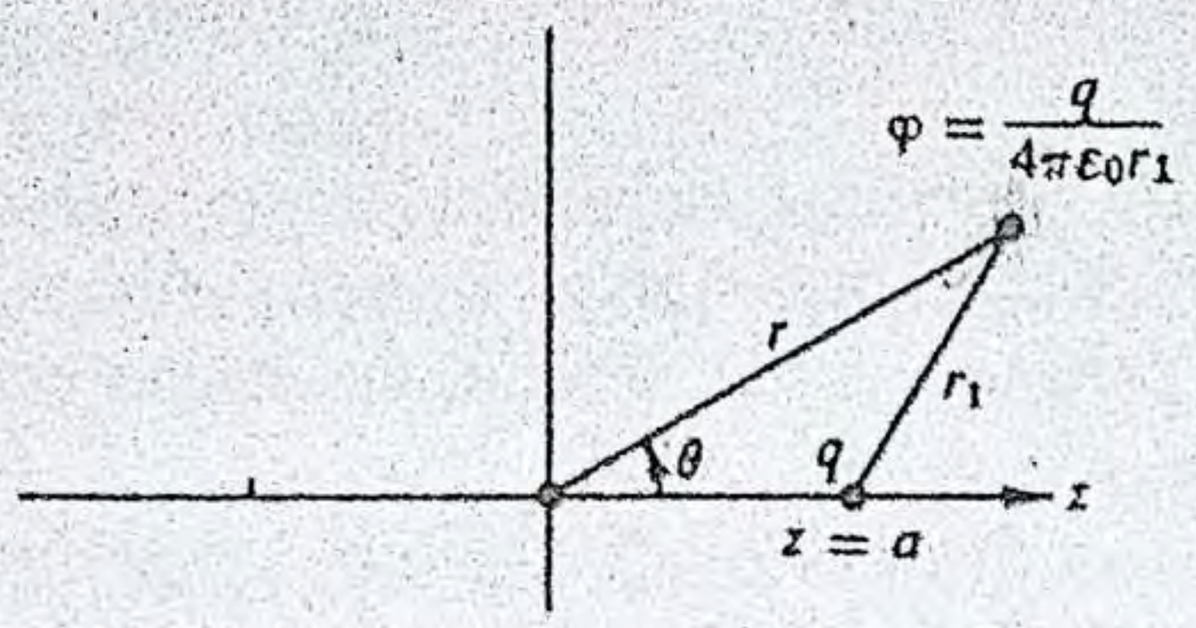


Fig. 12.1 Potencial electrostático. Carga q desplazada con respecto al origen

cosenos se obtiene

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^{-1/2}. \tag{12.2}$$

Polinomios de Legendre. Considere el caso $r > a$, con más precisión $r^2 > |a^2 - 2ar\cos\theta|$. El radical puede desarrollarse mediante la serie binomial para resultar en

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n, \tag{12.3}$$

una serie de potencias de (a/r) con el coeficiente de la enésima potencia designado por $P_n(\cos\theta)$. Los términos P_n son los polinomios de Legendre (Fig. 12.2) y pueden definirse mediante

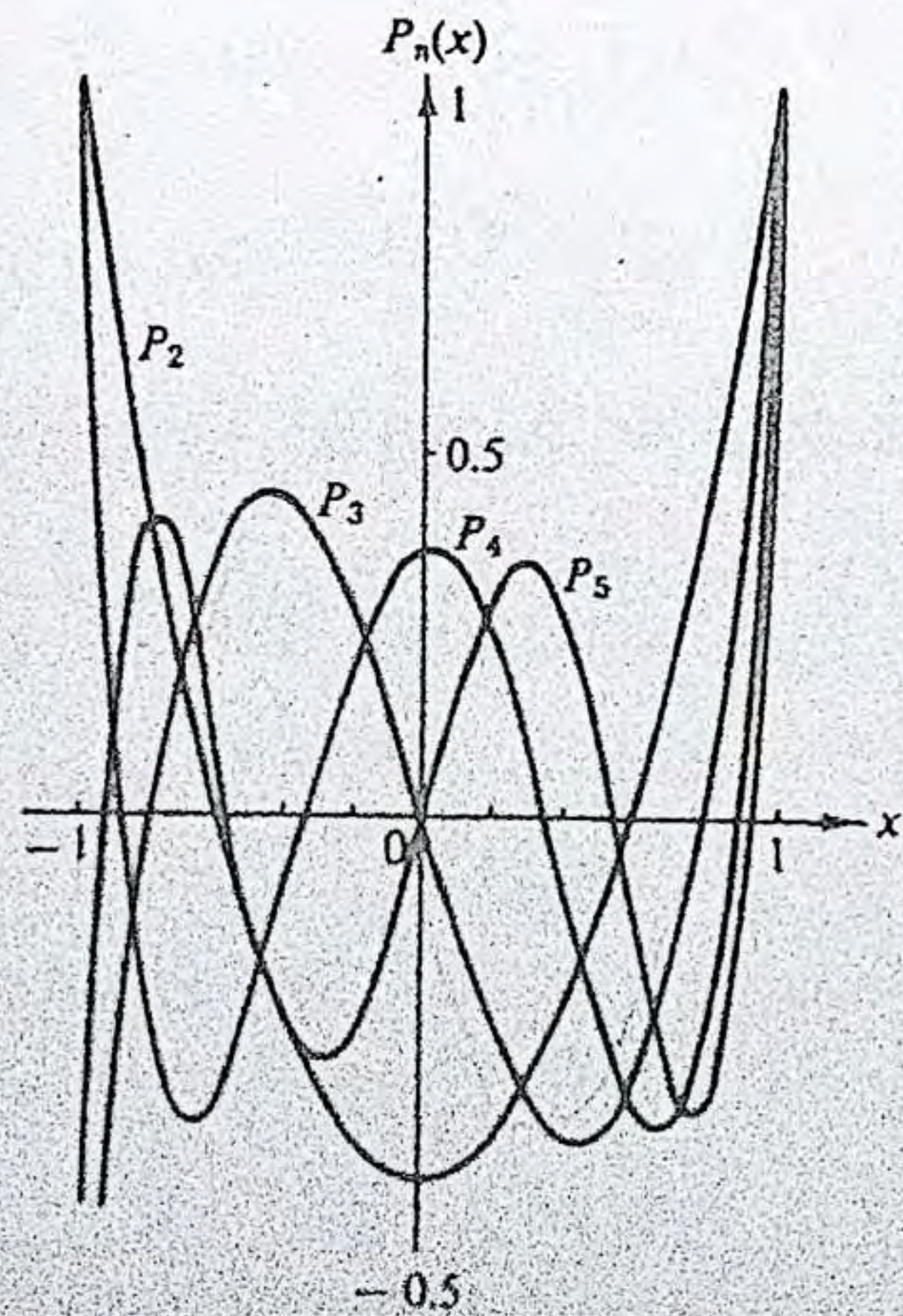


Fig. 12.2 Polinomios de Legendre, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \qquad |t| < 1. \tag{12.4}$$

Esta es nuestra función generadora. En la siguiente sección se demuestra que $|P_n(\cos\theta)| \leqslant 1$, lo cual significa que el desarrollo en serie (Ec. 12.4) es convergente para $|t| < 1$.[1] De hecho, la serie es convergente para $|t| = 1$, excepto para $|x| = 1$.

De hecho, ya que la Ec. 12.4 define los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, la convergencia de la serie no es necesaria. Aun se pueden obtener los valores explícitos de los polinomios y desarrollar relaciones útiles entre los mismos aun cuando la serie diverja. Sin embargo, la propiedad de convergencia es conveniente con objeto de explotar las propiedades de la serie de potencias (Sección 5.7).

En las aplicaciones físicas, la Ec. 12.4 frecuentemente aparece en la forma vectorial

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{r_>} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n P_n(\cos\theta) \tag{12.4a}$$

en donde

$$\left.\begin{aligned} r_> &= |\mathbf{r}_1| \\ r_< &= |\mathbf{r}_2| \end{aligned}\right\} \quad \text{para } |\mathbf{r}_1| > |\mathbf{r}_2|,$$

y

$$\left.\begin{aligned} r_> &= |\mathbf{r}_2| \\ r_< &= |\mathbf{r}_1| \end{aligned}\right\} \quad \text{para } |\mathbf{r}_2| > |\mathbf{r}_1|.$$

Utilizando el teorema binomial (Sección 5.6) y el Ejercicio 10.1.16, la función generadora se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (2xt - t^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (2xt - t^2)^n. \end{aligned} \tag{12.5}$$

El desarrollo binomial del factor $(2xt - t^2)^n$ proporciona la serie doble

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (2x)^{n-k} t^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n)!}{2^{2n} n!\, k!(n-k)!} (2x)^{n-k} t^{n+k}. \end{aligned} \tag{12.6}$$

De acuerdo con la Ec. 5.64 de la Sección 5.4 (readaptando el orden de la suma), la Ec. 12.6 se transforma en

[1] Observe que la serie en la Ec. 12.3 es convergente para $r > a$ par aun cuando el desarrollo binomial involucrado es válido solamente para $r > (a^2 + 2ar)^{1/2}$, $\cos\theta = -1$.

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}k!(n-k)!(n-2k)!}\cdot(2x)^{n-2k}t^n. \tag{12.7}$$

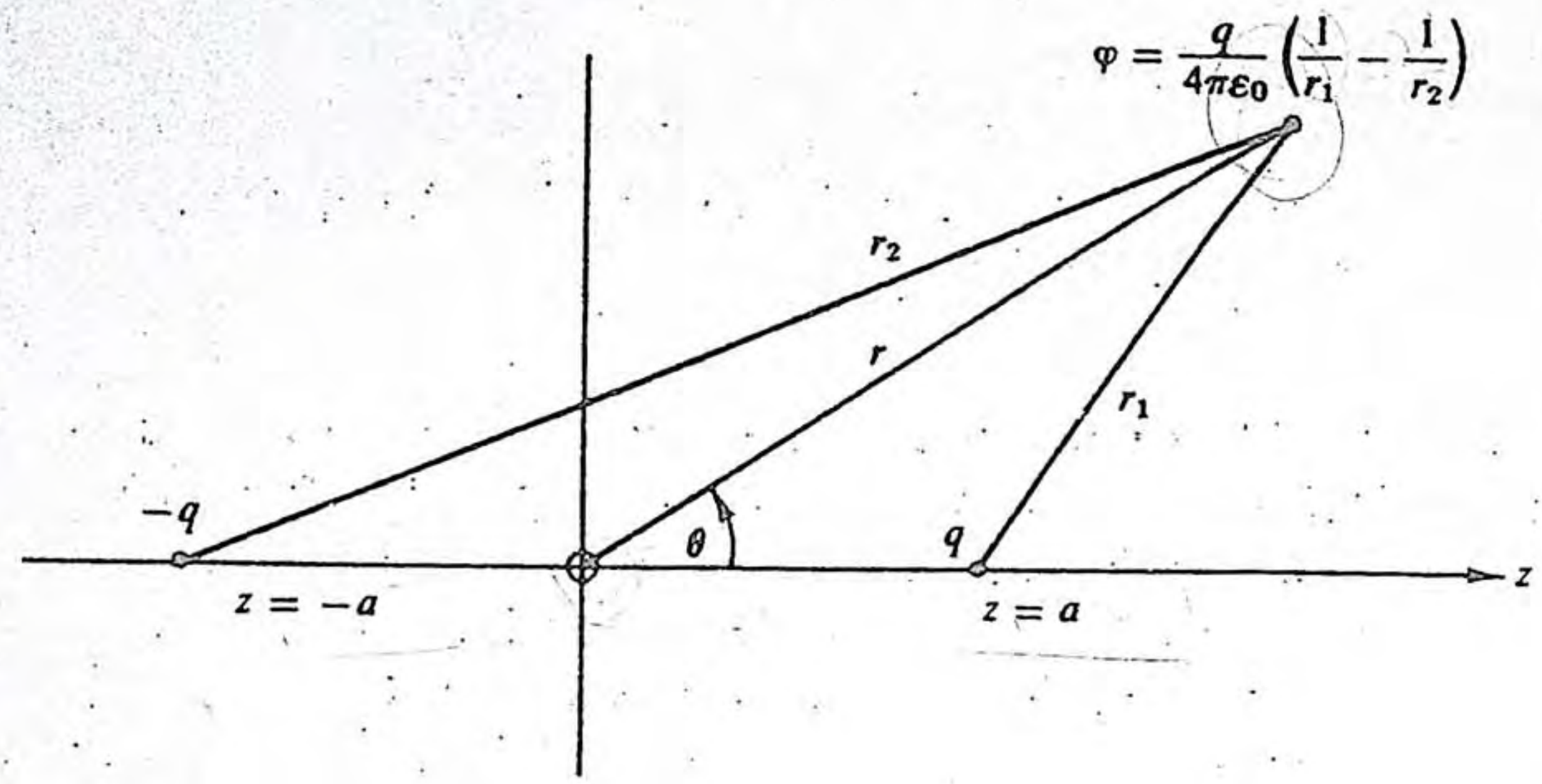


Fig. 12.3 Dipolo eléctrico

con la variable t independiente del índice k.[1] Ahora bien, igualando las dos series de potencias (Ecs. 12.4 y 12.7) término por término, se tiene

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}. \tag{12.8}$$

Regresando a la carga eléctrica en el eje z, se demuestra la utilidad poderío de la función generadora mediante la adición de una carga $-q$ en $z=-a$, tal como se muestra en la Fig. 12.3. El potencial se transforma en

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right), \tag{12.9}$$

y mediante el uso de la ley de los cosenos, se tiene

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\left[1-2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^{-1/2}-\left[1+2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}, \tag{12.10}$$

$$(r>a)$$

Evidentemente, el segundo radical es similar al primero, excepto que a ha sido sustituido por $-a$. Siendo así, usando la Ec. 12.4, se obtiene

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)(-1)^n\left(\frac{a}{r}\right)^n\right]$$

[1] $[n/2]=n/2$ para n par, $(n-1)/2$ para n impar.

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[P_1(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right) + P_3(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \cdots\right]. \tag{12.11}$$

El primer término (y el término dominante para $r \gg a$) es

$$\varphi = \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2}, \tag{12.12}$$

lo cual constituye el potencial de dipolo eléctrico. Aquí, $2aq$ es el momento dipolo (Fig. 12.3).

Multipolos Eléctricos Lineales. Este análisis se puede ampliar mediante cargas adicionales en el eje z, de modo que el término P_1 así como el término P_0 (monopolo) se cancelen. Por ejemplo, las cargas q en $z = a$ y $z = -a$, $-2q$ en $z = 0$ originan un potencial cuyo desarrollo en serie se inicia en $P_2(\cos\theta)$. Esto constituye un cuadripolo eléctrico lineal. Se pueden colocar dos cuadripolos lineales de modo que el término de cuadripolo se cancele, pero de manera que P_3, el término de octapolo, permanezca. Existe la posibilidad de otras configuraciones. Por ejemplo (Fig. 12.4), las cargas positiva y negativa alternadas en los vértices de un cuadrado (o paralelogramo) proporcionan un campo de cuadripolo, cargas alternadas en los vértices de un cubo, un campo octapolo. Información adicional acerca de los multipolos y otros métodos para el tratamiento de los mismos se puede encontrar en los textos de la teoría electromagnética que se mencionan en la introducción.

Antes de dejar los campos de multipolo, probablemente sea de importancia mencionar dos aspectos. En primer lugar, un multipolo eléctrico (o magnético) tiene significado absoluto solamente si todos los términos de orden inferior desaparecen. Por ejemplo, el potencial en una carga en q a $z = a$ se ha desarrollado a modo de una serie de polinomios de Legendre. Aun cuando podríamos referirnos al mismo como el término $P_1(\cos\theta)$ en este desarrollo como un término dipolo, es de recordarse que este término solamente existe debido a la selección de las coordenadas. De hecho se tiene un monopolo, $P_0(\cos\theta)$.

En segundo lugar, en los sistemas físicos no se encuentran multipolos puros. Como ejemplo, el potencial del dipolo finito (q en $z = a$, $-q$ en $z = -a$) contiene un término $P_3(\cos\theta)$. Estos términos de orden superior se pueden eliminar mediante la contracción del multipolo a un multipolo de

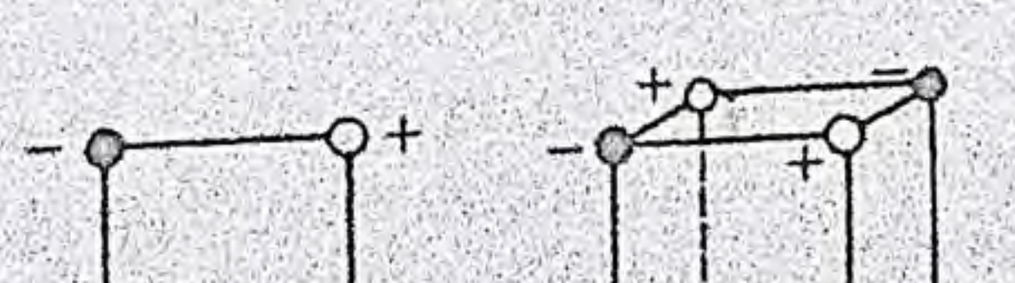


Fig. 12.4 Cuadripolo eléctrico, octipolo eléctrico

punto, manteniendo en este caso el producto qa constante ($a \to 0$, $q \to \infty$) para mantener el mismo momento dipolo.

También es de hacerse notar que el desarrollo de multipolo de hecho es una descomposición a las representaciones irreducibles del grupo de rotación (Sección 4.9).

Extensión a los Polinomios de Gegenbauer. La función generadora $g(t, x)$ utilizada aquí es de hecho un caso especial de una función generadora más general,

$$\frac{2^m}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{(m-\frac{1}{2})!} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^m(x) t^n. \tag{12.13}$$

Los coeficientes $T_n^m(x)$ frecuentemente se llaman polinomios de Gegenbauer. Para $m = 0$, esto se reduce a la Ec. 12.4; es decir, $T_n^0(x) = P_n(x)$. Los casos $m = \pm\frac{1}{2}$ se consideran en el Capítulo 13 con relación a los polinomios de Chebyshev.

EJERCICIOS

12.1.1 Desarrolle el potencial electrostático para el arreglo de cargas mostrado. Este constituye un cuadripolo eléctrico lineal (Fig. 12.5).

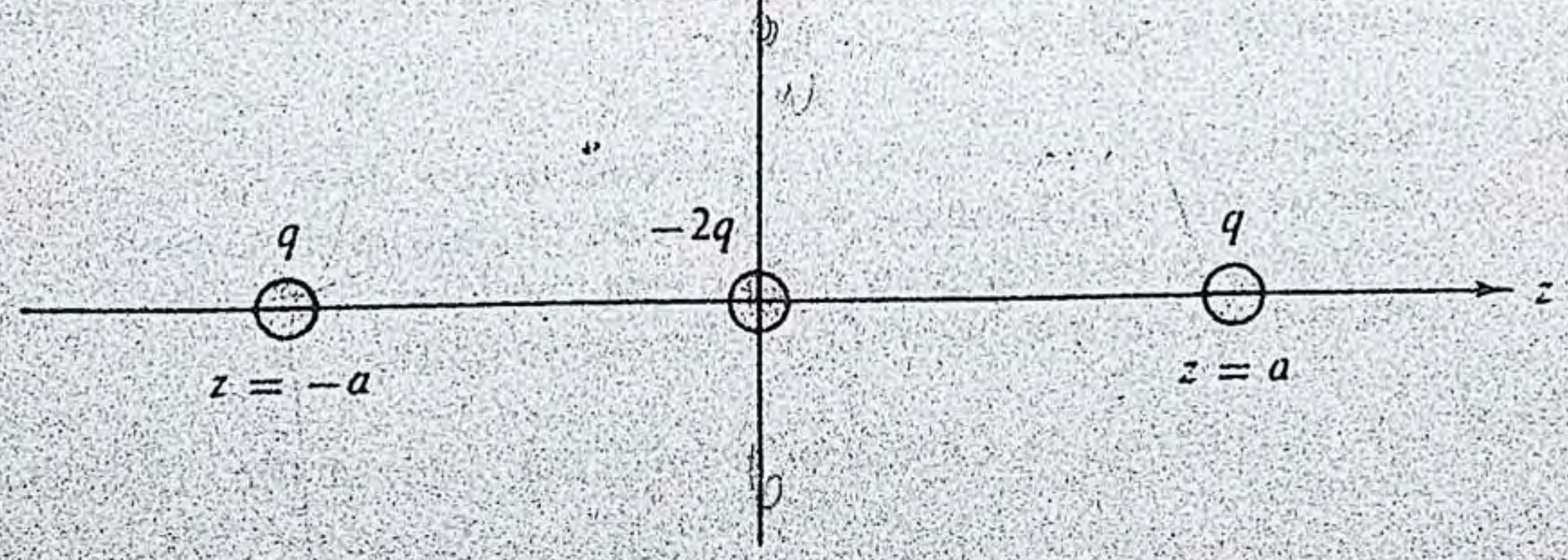


Fig. 12.5 Cuadripolo eléctrico lineal

12.1.2 Demuestre que el potencial electrostático producido por una carga q en $z = a$ para $r < a$ es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

12.1.3 Utilizando $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, determine los componentes del campo eléctrico correspondiente al potencial de dipolo eléctrico (puro)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{2aq\, P_1(\cos\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Aquí se supone que $r \gg a$.

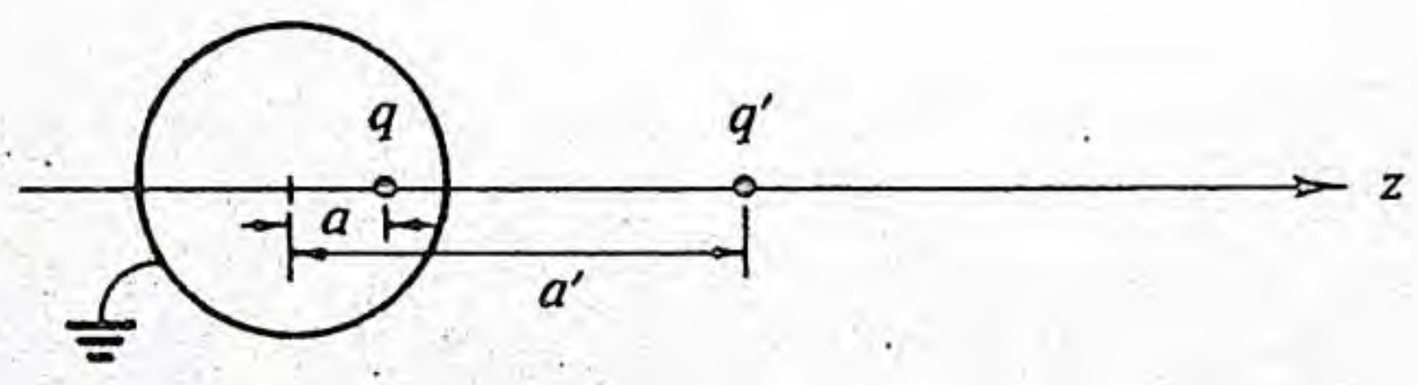
$$E_r = +\frac{4aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

$$E_\theta = +\frac{2aq\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

$$E_\varphi = 0.$$

12.1.4 Un dipolo eléctrico de punto con intensidad $p^{(1)}$ se coloca en $z = a$; un segundo dipolo eléctrico de punto con la misma intensidad, pero opuesta, se encuentra en el origen. Manteniendo el producto $p^{(1)}a$ constante, permita que $a \to 0$. Demuestre que esto resulta en un cuadripolo eléctrico de punto.
Sugerencia. El Ejercicio 12.2.4 (cuando se demuestre) será de utilidad.

12.1.5 Una carga de punto q se encuentra en el interior de una esfera conductora hueca de radio r_0. La carga q se desplaza a la distancia a del centro de la esfera. Si la esfera conductora se conecta a tierra, demuestre que el potencial en el interior producido por q y la carga inducida distribuida es la misma que la producida por q y su carga de imagen q'. La carga de imagen se encuentra a la distancia $a' = r_0^2/a$ con respecto al centro, colineal con q y el origen



Sugerencia. Calcule el potencial electrostático para $a < r_0 < a'$. Demuestre que el potencial desaparece para $r = r_0$ si se considera $q' = -qr_0/a$.

12.1.6 Demuestre que

$$P_n(\cos\theta) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Sugerencia. Compare el desarrollo polinomial de Legendre de la función generadora con un desarrollo en serie de Taylor.

12.1.7 Mediante la diferenciación y sustitución directa de la forma de serie, Ec. 12.8, demuestre que $P_n(x)$ satisface la ecuación diferencial de Legendre. Observe que no se tiene alguna restricción en x. Se puede considerar cualquier x, $-\infty < x < \infty$ y de hecho cualquier z en todo el plano complejo finito.

12.1.8 Los polinomios de Chebyshev (tipo II) se generan (Ec. 13.64, Sección 13.3) por medio de

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n.$$

Utilizando las técnicas de la Sección 5.4 para la transformación de series, desarrolle una representación de serie para $U_n(x)$.

Respuesta. $U_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$

12.2 Relaciones de Recurrencia y Propiedades Especiales

Relaciones de Recurrencia. La función generadora polinomial de Legendre proporciona un procedimiento conveniente para derivar las relaciones de recurrencia[1] y algunas propiedades especiales. Si la función generadora (Ec. 12.4) se diferencia con respecto a t, se obtiene

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n(x) t^{n-1}. \tag{12.14}$$

Mediante la sustitución de la Ec. 12.4 en esto y readaptando los términos, se tiene

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n(x)t^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0. \tag{12.15}$$

El lado izquierdo es una serie de potencias en t. Ya que esta serie de potencias desaparece para todos los valores de t, se iguala a cero el coeficiente de cada potencia de t, es decir la serie de potencias es única (Sección 5.7). Esto puede realizarse fácilmente mediante la separación de las sumas individuales y utilizando índices de suma distintivos,

$$\sum_{m=0}^{\infty} m\, P_m(x)t^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nx\, P_n(x)t^n + \sum_{s=0}^{\infty} s\, P_s(x)t^{s+1} + \sum_{s=0}^{\infty} P_s(x)t^{s+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x\, P_n(x)t^n = 0. \tag{12.16}$$

Ahora, permitiendo que $m = n+1$, $s = n-1$, se encuentra

$$(2n+1)x\, P_n(x) = (n+1)\, P_{n+1}(x) + n\, P_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12.17}$$

Esta es otra relación de recurrencia de tres términos similar (pero no idéntica) a la relación de recurrencia para las funciones de Bessel. Con esta relación de recurrencia se pueden construir fácilmente los polinomios de

[1] También se puede aplicar la forma de la serie explícita (Ec. 12.8) de manera directa.

TABLA 12.1

Polinomios de Legendre

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Legendre superiores. Si se considera $n = 1$ y se incorporan los valores fácilmente determinables de $P_0(x)$ y $P_1(x)$ (Ejercicio 12.1.5 o la Ec. 12.8),

$$3x\, P_1(x) = 2P_2(x) + P_0(x) \tag{12.18}$$

o

$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1). \tag{12.19}$$

Este proceso se puede continuar indefinidamente. Los primeros polinomios de Legendre se incluyen en la Tabla 12.1.

Aun cuando esta técnica pudiera parecer dificultosa al principio, de hecho es más eficiente para una computadora digital de gran capacidad que la evaluación directa de la serie (Ec. 12.8). Para una mayor estabilidad (con objeto de evitar la acumulación indebida y la amplificación del error de redondeo), la Ec. 12.17 se puede volver a establecer en la forma

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - [xP_n(x) - P_{n-1}(x)]/(n + 1). \tag{12.17a}$$

Se principia con $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, y se calculan los valores *numéricos* de todos los términos $P_n(x)$ para cierto valor de x hasta la $P_N(x)$ deseada. Los valores de $P_n(x)$, $0 \leqslant n < N$ se encuentran disponibles con un beneficio marginal.

Ecuaciones Diferenciales. Una mayor información acerca del comportamiento de los polinomios de Legendre se puede obtener si se procede a diferenciar la Ec. 12.4 con respecto a x. Esto proporciona

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \frac{t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n \tag{12.20}$$

o

$$(1 - 2xt + t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0. \tag{12.21}$$

Como antes, el coeficiente de cada potencia de t se establece igual a cero y se obtiene

$$P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) = 2xP_n'(x) + P_n(x). \tag{12.22}$$

Una relación de mayor utilidad se puede encontrar mediante la diferenciación de la Ec. 12.17 con respecto a x y multiplicando por dos. A esto se agrega $(2n + 1)$ veces la Ec. 12.22, cancelando así el término P'_n. El resultado es

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)\, P_n(x). \tag{12.23}$$

De acuerdo con las Ecs. 12.17 y 12.23, se pueden desarrollar otra gran diversidad de ecuaciones, incluyendo

$$P'_{n+1}(x) = (n + 1)\, P_n(x) + x\, P'_n(x), \tag{12.24}$$

$$P'_{n-1}(x) = -n\, P_n(x) + x\, P'_n(x), \tag{12.25}$$

$$(1 - x^2)\, P'_n(x) = n\, P_{n-1}(x) - nx\, P_n(x), \tag{12.26}$$

$$(1 - x^2)\, P'_n(x) = (n + 1)xP_n(x) - (n + 1)P_{n+1}(x). \tag{12.27}$$

Mediante la diferenciación de la Ec. 12.26 y utilizando la Ec. 12.25 para eliminar $P'_{n-1}(x)$ se encuentra que $P_n(x)$ satisface la ecuación diferencial de segundo orden lineal

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2x\, P'_n(x) + n(n + 1)\, P_n(x) = 0. \tag{12.28}$$

Las ecuaciones anteriores, Ecs. 12.22-12.27, son todas ecuaciones diferenciales de primer orden, pero con polinomios de dos índices diferentes. El precio de tener todos los índices iguales es una ecuación diferencial de segundo orden. La Ec. 12.28 es la ecuación diferencial de Legendre. Ahora se puede observar que los polinomios $P_n(x)$ generados por el desarrollo de $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ satisfacen la ecuación de Legendre que, evidentemente, es la causa de que se denominen polinomios de Legendre.

En la Ec. 12.28, la diferenciación es con respecto a x $(x = \cos\theta)$. Frecuentemente, la ecuación de Legendre se encuentra expresada en términos de la diferenciación con respecto a θ,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right) + n(n + 1)P_n(\cos\theta) = 0. \tag{12.29}$$

Nuestra función generadora proporciona más información acerca de los polinomios de Legendre. Si se establece $x = 1$, la Ec. 12.4 se transforma en

$$\frac{1}{(1 - 2t + t^2)^{1/2}} = \frac{1}{1 - t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n. \tag{12.30}$$

Pero

$$\frac{1}{(1 - 2tx + t^2)^{1/2}_{x=1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\, t^n.$$

Comparando los dos desarrollos de serie,

$$P_n(1) = 1. \tag{12.31}$$

Si se permite que $x = -1$, la misma clase de análisis demuestra que

$$P_n(-1) = (-1)^n. \tag{12.32}$$

Para obtener estos resultados, la función generadora es más conveniente que la forma de serie explícita.

Si se considera $x = 0$, utilizando el desarrollo

$$(1 + t^2)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{8}t^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n} + \cdots, \tag{12.33}$$

se tiene

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \tag{12.34}$$

$$P_{2n+1}(0) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12.35}$$

Estos resultados también se obtienen de la Ec. 12.8, mediante inspección.

Paridad. Algunos de los resultados constituyen casos especiales de la propiedad de paridad de los polinomios de Legendre. Una vez más habremos de referirnos a la Ec. 12.4. Si se sustituye x por $-x$ y t por $-t$, la función generadora permanece sin cambiar. En consecuencia,

$$\begin{aligned} g(t, x) &= g(-t, -x) \\ &= [1 - 2(-t)(-x) + (-t)^2]^{-1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-t)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \end{aligned} \tag{12.36}$$

Comparando las dos series, se tiene

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x); \tag{12.37}$$

es decir, las funciones polinomiales son pares o impares (con respecto a $x = 0$, $\theta = \pi/2$) de acuerdo con el hecho de que el índice n sea par o impar. Esta es la propiedad de paridad o reflexión que tiene gran importancia en la mecánica cuántica. Para las fuerzas centrales, el índice n es una medida del momento angular orbital, relacionando así la paridad y el momento angular orbital.

El lector podrá observar que esta propiedad de paridad se confirma mediante la solución en serie para los valores especiales que se han tabulado en la Tabla 12.1. También es de hacerse notar que la Ec. 12.37 se puede predecir mediante la inspección de la Ec. 12.17, la relación de recu-

rrencia. Específicamente, si $P_{n-1}(x)$ y $xP_n(x)$ son pares, entonces $P_{n+1}(x)$ debe ser par.

Límites Superior e Inferior de $P_n(\cos\theta)$. Finalmente, además de estos resultados, nuestra función generadora nos permite establecer un límite superior para $|P_n(\cos\theta)|$. Se tiene

$$\begin{aligned}(1-2t\cos\theta+t^2)^{-1/2} &= (1-te^{i\theta})^{-1/2}(1-te^{-i\theta})^{-1/2}\\ &= (1+\tfrac{1}{2}te^{i\theta}+\tfrac{3}{8}t^2e^{2i\theta}+\cdots)\\ &\quad\cdot(1+\tfrac{1}{2}te^{-i\theta}+\tfrac{3}{8}t^2e^{-2i\theta}+\cdots),\end{aligned} \tag{12.38}$$

en donde todos los coeficientes son *positivos*. Nuestro polinomio de Legendre, $P_n(\cos\theta)$, que aun es el coeficiente de t^n, se puede establecer ahora en términos de la forma

$$\begin{aligned}a_m(e^{im\theta}+e^{-im\theta})/2 &= a_m\cosh im\theta\\ &= a_m\cos m\theta\end{aligned} \tag{12.39a}$$

en que todos los términos a_m son positivos. Siendo así,

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{m=0\text{ or }1}^{n} a_m\cos m\theta. \tag{12.39b}$$

Esta serie evidentemente es un máximo cuando $\theta = 0$ y $\cos m\theta = 1$. Sin embargo, para $x = \cos\theta = 1$ la Ec. 12.31 demuestra que $P_n(1) = 1$.

En consecuencia,

TABLA 12.2

Comparación de la función generadora más las relaciones de recurrencia y el desarrollo en serie, Ec. 12.8

Aplicación	Función generadora y relaciones de recurrencia, Ecs. 12.4, 12.17 y 12.22	Serie, Ec. 12.8
Valor numérico, Tabla 12.1	oportunidad de la computadora	más directa
Derivación de la ecuación diferencial, Ec. 12.27	involucrada moderadamente	verificación sencilla; la derivación requiere de la capacidad de discernimient
$P_n(1)$, Ec. 12.30	fácil	dificultoso
$P_n(0)$, Ec. 12.34	fácil	por inspección
Paridad, Ec. 12.36	fácil	por inspección
Límites, Ec. 12.38	relativamente fácil	dificultoso

$$|P_n(\cos\theta)| \leqslant P_n(1) = 1. \tag{12.39c}$$

En esta sección se derivan varias propiedades útiles de los polinomios de Legendre a partir de la función generadora, Ec. 12.4. La representación de serie explícita, Ec. 12.8, ofrece un procedimiento alternativo y algunas veces superior. La Tabla 12.2 ofrece una comparación de estos dos procedimientos.

EJERCICIOS

12.2.1 Teniendo la serie

$$\alpha_0 + \alpha_2\cos^2\theta + \alpha_4\cos^4\theta + \alpha_6\cos^6\theta = a_0P_0 + a_2P_2 + a_4P_4 + a_6P_6.$$

Exprese los coeficientes α_i como vector de columna α y los coeficientes a_i como un vector de columna a y determine las matrices A y B tales que

$$\mathsf{A}\alpha = \mathsf{a} \quad \text{y} \quad \mathsf{B}\mathsf{a} = \alpha.$$

Compruebe el cómputo al demostrar que $\mathsf{AB} = 1$ (matriz unitaria). Repita para el caso impar,

$$\alpha_1\cos\theta + \alpha_3\cos^3\theta + \alpha_5\cos^5\theta + \alpha_7\cos^7\theta = a_1P_1 + a_3P_3 + a_5P_5 + a_7P_7.$$

12.2.2 Mediante la diferenciación de la función generadora, $g(t, x)$, con respecto a t, multiplicando por $2t$, y luego agregando $g(t, x)$, demuestre que

$$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)t^n.$$

Este resultado es de utilidad en el cálculo de la carga inducida en una esfera de metal conectada a tierra por medio de una carga de punto q.

12.2.3 Un octapolo eléctrico de punto se puede al construir al colocar un cuadripolo eléctrico de punto (intensidad de polo $p^{(2)}$ en la dirección z) en $z = a$ y un cuadripolo eléctrico de punto opuesto en $z = 0$ y luego permitiendo que $a \to 0$, sujeto a $p^{(2)}a =$ constante. Encuentre el potencial electrostático correspondiente al octapolo eléctrico de punto. Demuestre, a partir de la construcción del octapolo eléctrico de punto, que el potencial correspondiente se puede obtener mediante la diferenciación del potencial de cuadripolo de punto.

12.2.4 Operando en *coordenadas polares esféricas* demuestre que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right] = -(n+1)\frac{P_{n+1}(\cos\theta)}{r^{n+2}}.$$

Esta es la etapa clave en el argumento matemático de que la derivada de un multipolo origina el siguiente múltiplo superior.
Sugerencia. Cf. Ejercicio 2.4.10.

12.2.5 A partir de

$$P_L(\cos\theta) = \frac{1}{L!}\frac{\partial^L}{\partial t^L}(1 - 2t\cos\theta + t^2)^{-1/2}\big|_{t=0}$$

demuestre que

$$P_L(1) = 1, \qquad P_L(-1) = (-1)^L.$$

12.2.6 Demuestre que

$$P_n'(1) = \frac{d}{dx} P_n(x)\big|_{x=1} = \frac{1}{2} n(n+1).$$

12.2.7 Demuestre que $P_n(\cos\theta) = (-1)^n P_n(-\cos\theta)$ mediante el uso de la relación de recurrencia que relaciona P_n, P_{n+1} y P_{n-1} y el conocimiento de P_0 y P_1.

12.2.8 De acuerdo con la Ec. 12.38 establezca el coeficiente de t^2 en términos de $\cos n\theta$, $n \leqslant 2$. Este coeficiente es $P_2(\cos\theta)$.

12.3 Ortogonalidad

La ecuación diferencial de Legendre (12.28) se puede indicar en la forma

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\,P_n'(x)] + n(n+1)\,P_n(x) = 0, \tag{12.40}$$

mostrando evidentemente que es autoadjunta. Siendo así, sujetas a satisfacer ciertas condiciones limitantes, se conoce que las soluciones $P_n(x)$ son ortogonales. Repitiendo el análisis de Sturm-Liouville (Sección 9.2), la Ec. 12.40 se multiplica por $P_m(x)$ y se resta la ecuación correspondiente con m y n intercambiadas. Integrando desde -1 hasta $+1$, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left\{P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)\,P_n'(x)] - P_n(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)\,P_m'(x)]\right\}dx \\ = [m(m+1) - n(n+1)]\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx.\end{aligned} \tag{12.41}$$

Integrando por partes, en que la parte integrada desaparece debido al factor $(1-x^2)$,[1] se obtiene

$$[m(m+1) - n(n+1)]\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0. \tag{12.42}$$

Siendo así, para $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx &= 0, \\ \int_{0}^{\pi} P_n(\cos\theta)\,P_m(\cos\theta)\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta &= 0,\end{aligned} \tag{12.43}$$

[1] Esto, evidentemente, es la causa de haber escogido los límites en la forma de -1 y $+1$.

demostrando que $P_n(x)$ y $P_m(x)$ son ortogonales para el intervalo $[-1, 1]$. Esta ortogonalidad también se puede demostrar con bastante facilidad mediante el uso de la definición de Rodrigues de $P_n(x)$ (cf. Sección 12.4, Ejercicio 12.4.2).

Aun se requiere de la evaluación de la integral (Ec. 12.42) cuando $n = m$. Ciertamente ya no es igual a cero. A partir de la función generadora

$$(1 - 2tx + t^2)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n\right]^2. \tag{12.44}$$

Integrando desde $x = -1$ hasta $x = +1$, se tiene

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx; \tag{12.45}$$

en donde los términos cruzados de la serie desaparecen mediante la Ec. 12.43. Utilizando $y = 1 - 2tx + t^2$, se obtiene

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right). \tag{12.46}$$

Desarrollando esto en una serie de potencias (Ejercicio 5.4.1), se obtiene

$$\frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}. \tag{12.47}$$

Ya que la representación de serie de potencias es conocida por ser única, se debe tener

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{12.48}$$

Regresaremos a este resultado en la Sección 12.6 cuando se construyan los armónicos esféricos ortonormales.

Desarrollo de Funciones, Serie de Legendre. Además de la ortogonalidad, la teoría de Sturm-Liouville demuestra que los polinomios de Legendre forman un conjunto completo. Siendo así, suponga que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = f(x), \tag{12.49}$$

converge de manera uniforme a $j(x)$ en $[-1, 1]$. Esto requiere que $f(x)$ y $f'(x)$ sean al menos seccionalmente continuas en este intervalo. Los coeficientes a_n se encuentran al multiplicar la serie por $P_m(x)$ e integrando término por término. Utilizando la propiedad de ortogonalidad expresada en las Ecs. 12.43 y 12.48, se obtiene

$$\frac{2}{2m+1} a_m = \int_{-1}^{1} f(x)\, P_m(x)\, dx \tag{12.50}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)\,dt\right)P_n(x). \tag{12.51}$$

Este desarrollo en una serie de polinomios de Legendre normalmente se denomina serie de Legendre.[1] Sus propiedades son bastante similares a las de la ya conocida serie de Fourier (Capítulo 14). En particular se puede utilizar la propiedad de ortogonalidad (Ec. 12.43) para demostrar que la serie es única.

La Ec. 12.3, que origina directamente la definición de una función generadora de los polinomios de Legendre, es un desarrollo de Legendre para $1/r_1$. Este desarrollo de Legendre para $1/r_1$ o $1/r_{12}$ aparece en varios Ejercicios de la Sección 12.8. Al considerar un caso más complicado que el simple campo de Coulomb, el término $1/r_{12}$ frecuentemente se sustituye por un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ y la solución del problema se logra nuevamente por medio del desarrollo de Legendre. En los cálculos de la física nuclear, los coeficientes a_n se pueden computar (por medio de una máquina computadora) hasta a_{100}.

EJEMPLO 12.3.1 CAMPO GRAVITACIONAL DE LA TIERRA

Un ejemplo de la serie de Legendre lo proporciona la descripción del potencial gravitacional de la Tierra v (para los puntos exteriores), despreciando los efectos acimutales. Con

$$R = \text{radio ecuatorial}$$
$$= 6378.1 \pm 0.1 \text{ km}$$
$$\frac{GM}{R} = 62.494 \pm 0.001 \text{ km}^2/\text{seg}^2$$

se establece

$$U(r,\theta) = \frac{GM}{R}\left[\frac{R}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\right], \tag{12.52}$$

es decir una serie de Legendre. Los movimientos de satélite artificial han demostrado que

$$a_2 = (1.08279 \pm 0.00015) \times 10^{-3}$$
$$a_3 = (-2.4 \pm 0.3) \times 10^{-6}.$$

Esta es la famosa deformación con modelo de pera de la Tierra.

$$a_4 = (-1.4 \pm 0.2) \times 10^{-6}.$$

[1] Observe que la Ec. 12.50 proporciona a_m como una integral *definida*, es decir un número para cierta $f(x)$.

Los coeficientes de orden superior son aproximadamente cero dentro de lo que puede considerarse como precisión experimental. El lector habrá de notar que P_1 se omite ya que representa un desplazamiento y no una deformación.

Los datos de satélite más recientes permiten la determinación de la dependencia longitudinal del campo gravitacional de la Tierra. Tal dependencia puede describirse por medio de una serie de Laplace (Sección 12.6).

EJEMPLO 12.3.2 ESFERA EN UN CAMPO UNIFORME

Otra ilustración del uso de los polinomios de Legendre la proporciona el problema de una esfera conductora neutra (radio r_0) colocada en un campo eléctrico (previamente) uniforme. El problema consiste en encontrar el nuevo potencial electrostático perturbado. Denominando al potencial electrostático V[1],

$$\nabla^2 V = 0, \tag{12.53}$$

o sea la ecuación de Laplace. Se han seleccionado las coordenadas polares esféricas debido a la forma esférica del conductor. (Esto puede simplificar la aplicación de la condición limitante a la superficie del conductor.) Separando las variables y tomando como referencia la Tabla 8.1 en caso necesario, se obtiene

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}. \tag{12.54}$$

(independencia)

La dependencia en φ aparece debido a la simetría axial del problema. (El centro de la esfera conductora se considera en el origen y el eje z se encuentra orientado paralelo al campo uniforme original.)

Es de hacerse notar que n es un número entero *debido* solamente a que para n integral (entero) se tiene la dependencia en θ de comportamiento adecuado en $\cos\theta = \pm 1$. Para n no integral, las soluciones de la ecuación de Legendre divergen en los extremos del intervalo $[-1, 1]$, los polos $\theta = 0, \pi$ de la esfera (cf. Ejemplo 5.2.4 y los Ejercicios 5.2.15 y 8.4.4). Debido a esto mi razón es que la *segunda* solución de la ecuación de Legendre, Q_n, también se excluye.

En este momento intervienen las condiciones limitantes (Dirichlet). Si el campo electrostático original sin perturbar es E_0, se requiere

$$\begin{aligned} V(r \to \infty) &= -E_0 z = -E_0 r\cos\theta \\ &= -E_0 r P_1(\cos\theta). \end{aligned} \tag{12.55}$$

[1] Es de hacerse notar que esto no constituye una presentación del desarrollo en serie de Legendre para una $V(\cos\theta)$ conocida. En este caso nuevamente se trata de los problemas de *valor limitante.*

Ya que la serie de Legendre es única, se pueden igualar los coeficientes de $P_n(\cos\theta)$ en la Ec. 12.54 ($r \to \infty$) y la Ec. 12.55 para obtener

$$a_n = 0, \qquad n > 1,$$
$$a_1 = -E_0. \tag{12.56}$$

Si $a_n \neq 0$ para $n > 1$, estos términos predominan a r grande y la condición limitante (Ec. 12.55) no queda satisfecha. Se puede seleccionar que la esfera conductora y el plano $\theta = \pi/2$ se encuentren al potencial cero, lo cual significa que la Ec. 12.54 se transforma ahora en

$$V(r = r_0) = a_0 + \frac{b_0}{r_0} + \left(\frac{b_1}{r_0^2} - E_0 r_0\right) P_1(\cos\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r_0^{n+1}}$$
$$= 0. \tag{12.57}$$

Con objeto de que esto sea consistente para todos los valores de θ, cada coeficiente de $P_n(\cos\theta)$ debe desaparecer.[1] En consecuencia,

$$a_0 = b_0 = 0,^{2}$$
$$b_n = 0, \qquad n \geqslant 2, \tag{12.58}$$

mientras que

$$b_1 = E_0 r_0^3. \tag{12.59}$$

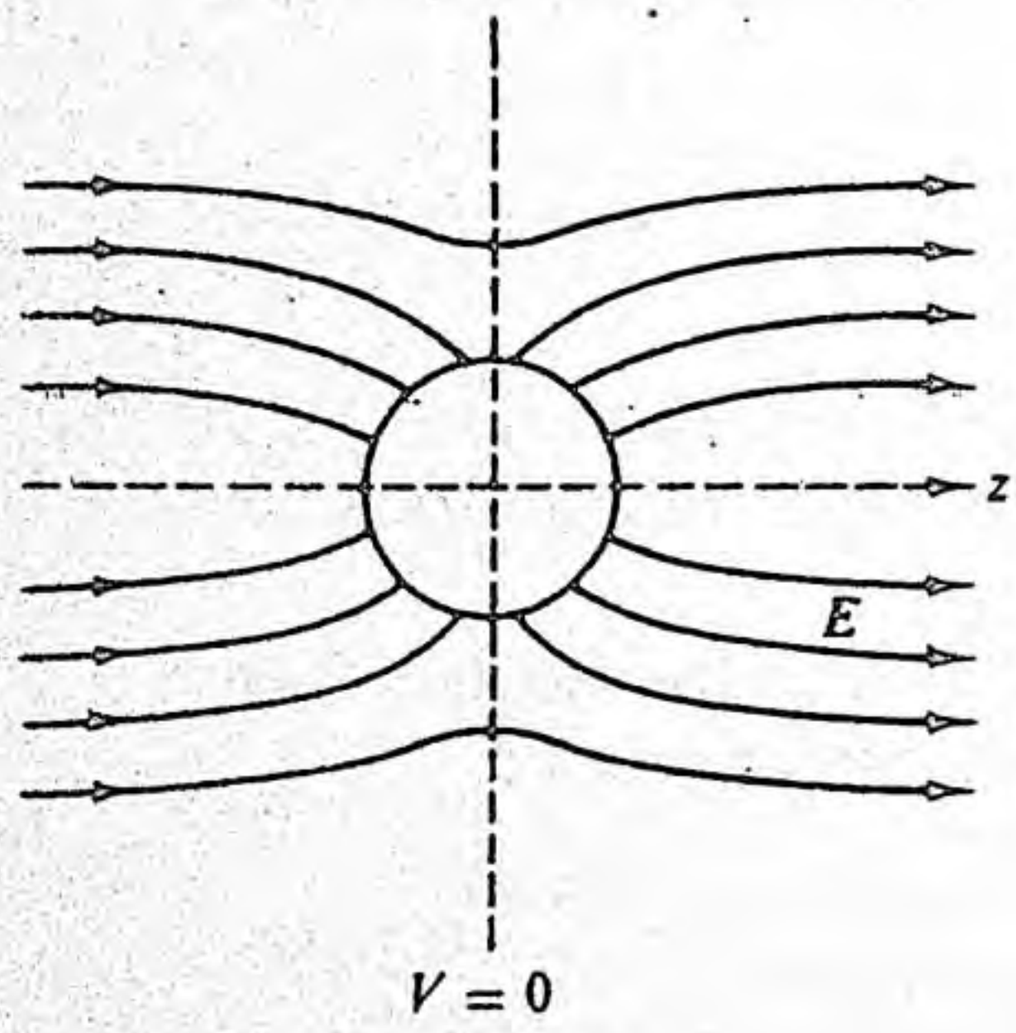


Fig. 12.6 Esfera conductora en un campo uniforme

El potencial electrostático (fuera de la esfera) resulta ser entonces

$$V = -E_0 r\, P_1(\cos\theta) + \frac{E_0 r_0^3}{r^2} P_1(\cos\theta)$$
$$= -E_0 r\, P_1(\cos\theta)\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right). \tag{12.60}$$

En la Sección 1.15 se demostró que una solución de la ecuación de Laplace que satisface las condiciones limitantes sobre todo el límite era única. El potencial electrostático V, tal como se define mediante la Ec. 12.60, es una solución de la ecuación de Laplace. Si satisface las condi-

[1] Nuevamente, esto equivale a decir que un desarrollo en serie en los polinomios de Legendre (o cualquier conjunto ortogonal completo) es único.

[2] El coeficiente de P_0 es $a_0 + b_0/r_0$. Se establece $b_0 = 0$ (y consecuentemente $a_0 = 0$ también) ya que no se tiene carga neta en la esfera. Si se tiene una carga neta q, entonces $b_0 \neq 0$.

ciones limitantes y, consecuentemente, es una solución de la ecuación de Laplace para este problema.

También se puede demostrar (Ejercicio 12.3.9) que existe una densidad de carga superficial inducida

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{12.61}$$

en la superficie de la esfera y un momento dipolo eléctrico inducido (Ejercicio 12.3.9)

$$P = 4\pi r_0^3 \varepsilon_0 E_0 . \tag{12.62}$$

EJEMPLO 12.3.3 POTENCIAL ELECTROSTATICO DE UN ANILLO DE CARGA

Como ejemplo adicional considere el potencial electrostático producido por un anillo conductor que lleva una carga eléctrica total q. De acuerdo con la electrostática (y la Sección 1.14), el potencial ψ satisface la ecuación de Laplace. Separando las variables en coordenadas polares esféricas (cf. Tabla 8.1),

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), \qquad r > a. \tag{12.63a}$$

Aquí a es el radio del anillo que se supone se encuentra en el plano $\theta = \pi/2$ No se tiene dependencia en φ (acimutal) debido a la simetría cilíndrica del sistema.

Los términos con dependencia radial de exponente positivo se desechan debido a que el potencial debe tener un comportamiento asintótico

$$\psi \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \qquad r \gg a. \tag{12.63b}$$

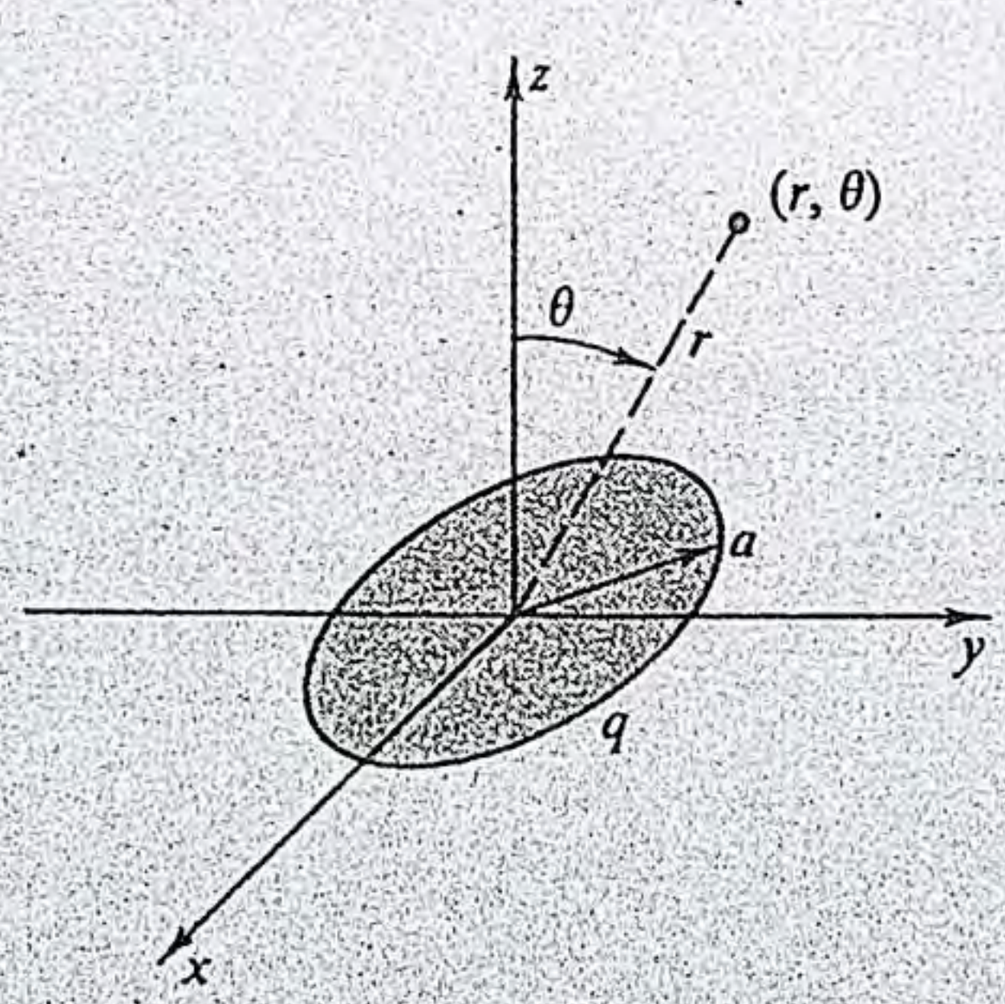


Fig. 12.7 Anillo conductor cargado

El problema consiste en determinar los coeficientes a_n en la Ec. 12.63a. Esto puede lograrse mediante la evaluación de $\psi(r, \theta)$ en $\theta = 0$, $r = z$, y comparando con el cálculo independiente del potencial a partir de la ley de Coulomb. De hecho, se utiliza una condición limitante a lo largo del eje z. De acuerdo con la ley de Coulomb (con todas las cargas equidistantes),

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}}, \qquad r = z,$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2} \left(\frac{a}{z}\right)^{2s}, \qquad z > a. \tag{12.63c}$$

La última etapa hace uso del resultado del Ejercicio 10.1.16. Ahora la Ec. 12.63a evaluada en $\theta = 0$, $r = z$ con $P_n(1) = 1$), proporciona

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{a^n}{z^{n+1}}, \qquad r = z. \tag{12.63d}$$

Comparando las Ecs. 12.63c y 12.63d, $a_n = 0$ para n impar. Estableciendo $n = 2s$,

$$a_{2s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}, \tag{12.63e}$$

y el potencial electrostático $\psi(r, \theta)$ está definido por

$$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2s} P_{2s}(\cos\theta), \qquad r > a. \tag{12.63f}$$

El análogo magnético de este problema aparece en la Sección 12.5, Ejemplo 12.5.1.

EJERCICIOS

12.3.1 Con anterioridad se ha construido un conjunto de funciones ortogonales mediante el procedimiento de Schmidt (Sección 9.3), considerando $u_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ en orden creciente con $w(x) = 1$ y el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Demuestre que la enésima función de este tipo construida es proporcional a $P_n(x)$. *Sugerencia.* Utilice la inducción matemática.

12.3.2 Desarrolle la función delta de Dirac en una serie de polinomios de Legendre utilizando el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

12.3.3 Una función particular $f(x)$ definida dentro del intervalo $[-1, 1]$ se desarrolla una serie de Legendre dentro del mismo intervalo. Demuestre que el desarrollo único.

12.3.4 Derive la relación de recurrencia

$$(1-x^2)P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$

a partir de la función generadora polinomial de Legendre.

12.3.5 Evalúe $\int_0^1 P_n(x)\,dx$.

Respuesta. $n = 2s$; 1 para $s = 0$, 0 para $s > 0$,
$n = 2s+1$; $P_{2s}(0)/(2s+2) = (-1)^s(2s-1)!!/(2s+2)!!$

Sugerencia. Utilice la relación de recurrencia para sustituir $P_n(x)$ por derivadas y luego integre por inspección.

12.3.6 Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} x(1-x^2)\,P_n'\,P_m'\,dx = 0, \quad \text{a menos que } m = n \pm 1.$$

12.3.7 La amplitud de una onda dispersada será definida por

$$f(\theta) = \lambda\!\!\!^{-} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\exp[i\delta_l]\,\mathrm{sen}\,\delta_l\,P_l(\cos\theta).$$

Aquí θ es el ángulo de dispersión, l es el momento angular y δ_l es el desplazamiento de fase producido por el potencial central que realiza la dispersión. La sección transversal total es $\sigma_{tot} = \int f^*(\theta)\,f(\theta)\,d\Omega$. Demuestre que

$$\sigma_{tot} = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,\mathrm{sen}^2\,\delta_l.$$

12.3.8 La tasa de conteo de coincidencia, $W(\theta)$, en un experimento de correlación angular gamma-gamma, tiene la forma

$$W(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}P_{2n}(\cos\theta).$$

Demuestre que los datos en el intervalo $\pi/2 \le \theta \le \pi$ pueden, en principio, definir la función $W(\theta)$ (y permitir la determinación de los coeficientes a_{2n}). Esto significa que aun cuando los datos en el intervalo $0 \le \theta < \pi/2$ pueden ser de utilidad como comprobación, no son esenciales.

12.3.9 Una esfera conductora de radio r_0 se coloca en un campo eléctrico uniforme inicialmente, $\mathbf{E}_0$. Demuestre lo siguiente:

(a) La densidad de carga superficial inducida es

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta.$$

(b) El momento dipolo eléctrico inducido es

$$P = 4\pi r_0^3\,\varepsilon_0 E_0.$$

El momento dipolo eléctrico inducido se puede calcular ya sea a partir de la carga superficial [parte (a)] u observando que el campo eléctrico final $\mathbf{E}$ es el resultado de sobreponer un campo dipolo en el campo uniforme original.

12.3.10 Una carga q se desplaza a la distancia a a lo largo del eje z desde el centro de una cavidad esférica de radio R.

(a) Demuestre que el campo eléctrico ponderado sobre el volumen $a \le r \le R$ es cero

(b) Demuestre que el campo eléctrico ponderado sobre el volumen $0 \le r \le a$ es

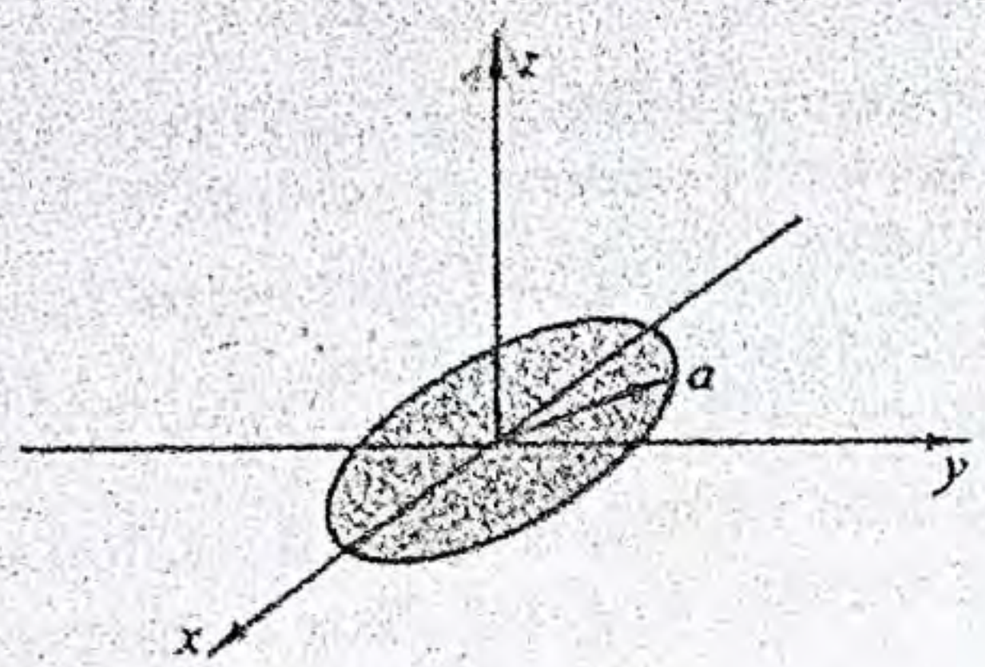


Fig. 12.8 Disco conductor cargado

$$\mathbf{E} = \mathrm{k}E_z = -\mathrm{k}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}, \qquad \text{(unidades mks)}$$

$$= -\mathrm{k}\frac{nqa}{3\varepsilon_0},$$

en donde n es el número de cargas desplazadas por unidad de volumen. Esto constituye el cálculo básico en la polarización de un dieléctrico. *Sugerencia.* $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

12.3.11 Como extensión del Ejemplo 12.3.3, encuentre el potencial $\psi(r, \theta)$ producido por un disco conductor cargado, Fig. 12.8, para $r > a$, el radio del disco.
De acuerdo con el Ejercicio 2.11.2, la densidad de carga σ (en cada lado del disco) es

$$\sigma(\rho) = \frac{q}{4\pi a(a^2 - \rho^2)^{1/2}}, \qquad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Respuesta. $$\psi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{1}{2l+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\theta).$$

12.3.12 (a) De acuerdo con el resultado del Ejercicio 12.3.11, calcule el potencial del disco. Ya que se ha violado la condición $r > a$, justifique cuidadosamente el cálculo.
Sugerencia. Se puede considerar la serie proporcionada en el Ejercicio 5.2.19.
(b) Calcule la capacitancia del disco. Compare con el Ejercicio 2.11.2.

12.3.13 El hemisferio definido por $r = a, 0 \le \theta < \pi/2$ tiene el potencial electrostático $+V_0$. El hemisferio $r = a, \pi/2 < \theta \le \pi$ tiene el potencial electrostático $-V_0$. Demuestre que el potencial en los puntos *interiores* es

$$V = V_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{2n+2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n}(0)P_{2n+1}(\cos\theta)$$

$$= V_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

Sugerencia. Se requiere del Ejercicio 12.3.5.

12.3.14 Una esfera conductora de radio a se divide en dos hemisferios separados eléctricamente por medio de una barrera aislante delgada en su ecuador. El hemisferio superior se mantiene al potencial V_0 y el hemisferio inferior a $-V_0$.

(a) Demuestre que el potencial electrostático exterior de los dos hemisferios es

$$V(r,\theta) = V_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) \frac{(2s-1)!!}{(2s+2)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2s+2} P_{2s+1}(\cos\theta).$$

(b) Calcule la densidad eléctrica σ en la superficie exterior. Observe que la serie diverge en $\cos\theta = \pm 1$ como era de esperarse a partir de la capacitancia infinita de este sistema (espesor cero para la barrera aislante).

Respuesta.

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (4s+3) \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} P_{2s+1}(\cos\theta).$$

12.4 Definiciones Alternativas de los Polinomios de Legendre

Fórmula de Rodrigues. La forma de serie de los polinomios de Legendre (Ec. 12.8), de la Sección 12.1, se puede transformar como sigue. De acuerdo con la Ec. 12.8

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} x^{n-2r} \tag{12.64}$$

para n número entero

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{1}{2^n r!(n-r)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{2n-2r}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!} x^{2n-2r}. \tag{12.64a}$$

Observe la extensión del límite superior. En el Ejercicio 12.4.1 se ha requerido del lector que demuestre el hecho de que los términos adicionales $[n/2]+1$ hasta n en la suma contribuyen en nada. Sin embargo, el efecto de los términos adicionales consiste en permitir la sustitución de la nueva suma por $(x^2-1)^n$ (nuevamente el teorema binomial) para obtener

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n. \tag{12.65}$$

Esta es la fórmula de Rodrigues. Es de utilidad para demostrar muchas de las propiedades de los polinomios de Legendre tal como la ortogonalidad. En el Ejercicio 12.4.3 se presenta una aplicación relacionada con esto.

Integral de Schlaefli. La fórmula de Rodrigues proporciona un procedimiento para establecer una representación de integral de $P_n(z)$. Utilizando la fórmula de la integral de Cauchy (Sección 6.4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t-z}\, dt \tag{12.66}$$

$$f(z) = (z^2 - 1)^n, \tag{12.67}$$

se tiene

$$(z^2 - 1)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t^2 - 1)^n}{t - z}\, dt. \tag{12.68}$$

Diferenciando n veces con respecto a z y multiplicando por $1/2^n n!$ se obtiene

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

$$= \frac{2^{-n}}{2\pi i} \oint \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}}\, dt \tag{12.69}$$

en que el contorno encierra el punto $t = z$.

Esta es la integral de Schlaefli. Margenau y Murphy[1] utilizan esto para derivar las relaciones de recurrencia obtenidas de la función generadora.

Se puede demostrar fácilmente que la integral de Schlaefli satisface la ecuación de Legendre por medio de la diferenciación y sustitución directa. Se obtiene

$$(1 - z^2) \frac{d^2 P_n}{dz^2} - 2z \frac{dP_n}{dz} + n(n + 1)P_n = \frac{n + 1}{2^n 2\pi i} \oint \frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{(t - z)^{n+2}}\right] dt. \tag{12.70}$$

Para n integral, la función $(t^2 - 1)^{n+1}/(t - z)^{n+2}$ es de valor simple y la integral alrededor de la trayectoria cerrada desaparece. La integral de Schlaefli también se puede utilizar para definir $P_\nu(z)$ para ν no integral mediante la integración alrededor de los puntos $t = z, t = 1$, pero sin cruzar la línea de corte -1 a $-\infty$. Del mismo modo se podrían circundar los pun-

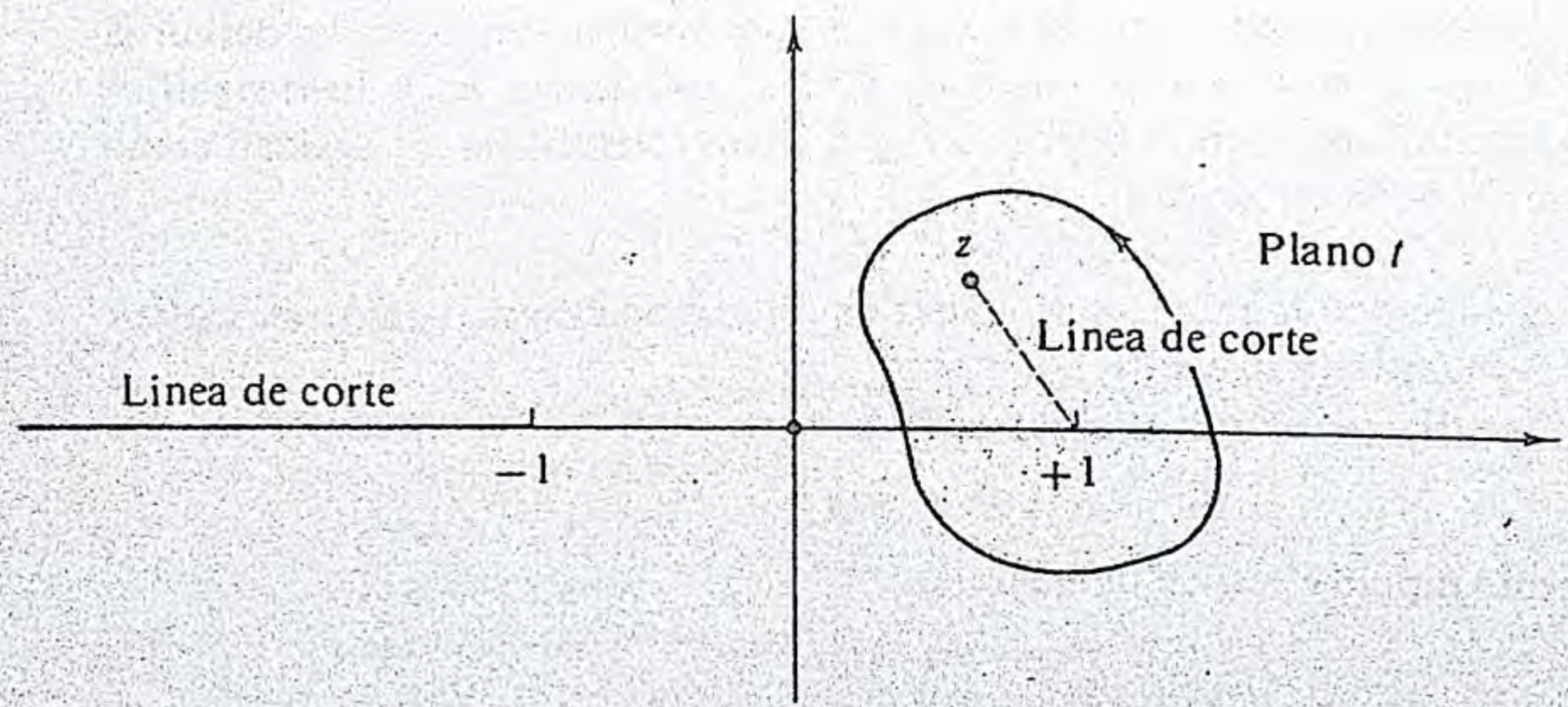


Fig. 12.9 Contorno de la integral de Schlaefli

[1] Margenau, H. y Murphy, G. M., *The Mathematics of Physics and Chemistry*, segunda edición, Sección 3.5. Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey (1956).

tos $t = z$ y $t = -1$, pero esto no daría lugar a nada nuevo. Un contorno alrededor de $t = +1$ y $t = -1$ podría originar una segunda solución $Q_\nu(z)$ como se describe en la Sección 12.10.

El cambio de variable

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1}\, e^{i\varphi} \tag{12.71}$$

con $\mathscr{R}(z) > 0$ de modo que encierre al punto $t = 1$ y no al punto $t = -1$ proporciona

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{2^n (z^2 - 1)^{n/2} e^{in\varphi} (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n i \sqrt{z^2 - 1}\, e^{i\varphi}}{2^n (\sqrt{z^2 - 1}\, e^{i\varphi})^{n+1}}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n\, d\varphi. \tag{12.72}$$

Esta es la primera representación de integral de Laplace. El contorno es un círculo de radio $|\sqrt{z^2 - 1}|$ alrededor del punto $t = z$. Una segunda representación se puede obtener mediante la sustitución de n por $-n - 1$. La ecuación diferencial es invariante a esta sustitución

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^{-n-1}\, d\varphi. \tag{12.73}$$

La justificación para denominar a esta integral $P_n(z)$ en lugar de $P_{-n-1}(z)$ es el tema del Ejercicio 12.4.13.

En la Sección 12.1, la función generadora, a pesar de su aplicación física inmediata e importante, de hecho fue establecida a partir de nada. Probablemente se pueda transformar en algo menos misterioso si se analiza un poco más profundamente. Utilizando la sustitución

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi, \tag{12.74}$$

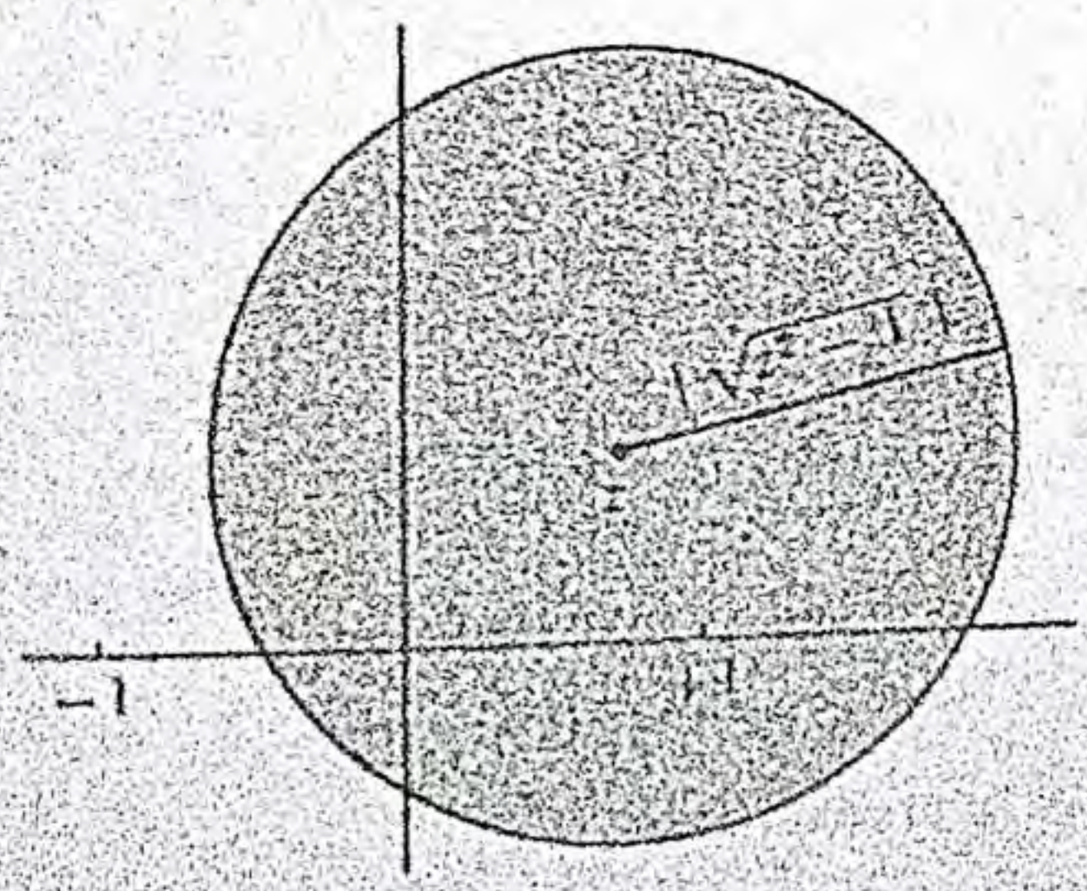


Fig. 12.10 Contorno para la representación de la integral de Laplace de la función de Legendre

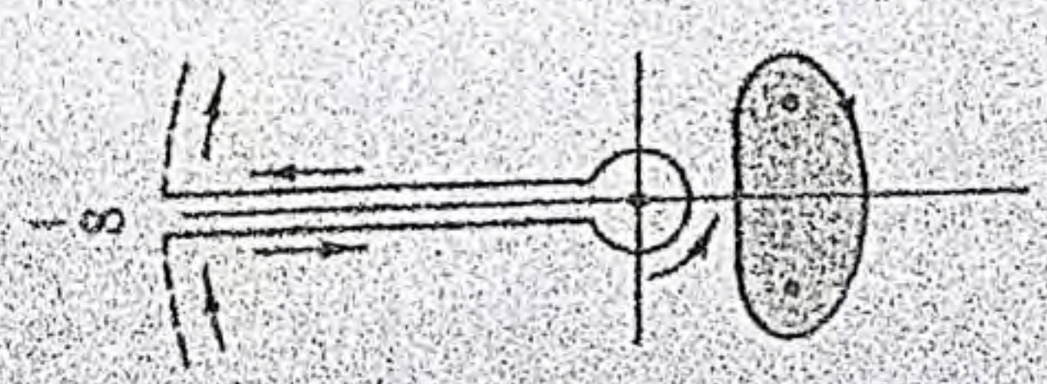


Fig. 12.11 Contorno para $P_\nu(\zeta)$, ν no integral

la Ec. 12.73 se transforma en

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t^{-n-1}}{[1 - 2tz + t^2]^{1/2}}\, dt, \tag{12.75}$$

el contorno que circunda el origen (n integral).[1] Mediante el cálculo de residuos (Sección 7.2) esto representa simplemente el coeficiente de t^n en el desarrollo $(1 - 2tz + t^2)^{-1/2}, |t^2 - 2tz| < 1$. Siendo así, al comenzar con la integral de Schlaefli, una solución de la ecuación de Legendre, hemos establecido una función generadora para los polinomios de Legendre.[2]

EJERCICIOS

12.4.1 Demuestre que *cada* término en la suma

$$\sum_{r=[n/2]+1}^{n} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{(-1)^r\, n!}{r!\,(n-r)!}\, x^{2n-2r}$$

desaparece (r y n integrales).

12.4.2 Utilizando la fórmula de Rodrigues, demuestre que $P_n(x)$ son ortogonales y que

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

12.4.3 Demuestre que $\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\, dx = 0$ cuando $m < n$. *Sugerencia.* Utilice la fórmula de Rodrigues.

12.4.4 Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)\, dx = \frac{2^{n+1}\, n!\, n!}{(2n+1)!}.$$

12.4.5 Demuestre que

$$\int_{-1}^{1} x^{2r} P_{2n}(x)\, dx = \frac{2^{2n+1}(2r)!\,(r+n)!}{(2r+2n+1)!\,(r-n)!}.$$

[1] Si n no es un número entero, $t = 0$ es un punto de ramificación y la trayectoria de integración es un circuito alrededor de los puntos singulares $t = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$, en *sentido de las manecillas del reloj.*

[2] En caso de que esto pudiera parecer excesivo, como ir alrededor de un círculo, se podría comenzar con una solución de serie de potencias de la ecuación de Legendre, Ejercicio 8.4.4. La normalización se podría lograr al requerir que $P_n(1) = 1$, o desarrollando la fórmula de Rodrigues del mismo modo que en esta sección, y luego utilizando el Ejercicio 12.4.2. El resto de la derivación sería como se indica en esta sección.

12.4.6 Como una generalización de los Ejercicios 12.4.4 y 12.4.5, demuestre que los desarrollos de Legendre para x^s son

$$\text{(a)} \qquad x^{2r} = \sum_{n=0}^{r} \frac{2^{2n}(4n+1)(2r)!\,(r+n)!}{(2r+2n+1)!\,(r-n)!} P_{2n}(x), \qquad s = 2r,$$

$$\text{(b)} \quad x^{2r+1} = \sum_{n=0}^{r} \frac{2^{2n+1}(4n+3)(2r+1)!\,(r+n+1)!}{(2r+2n+3)!\,(r-n)!} P_{2n+1}(x), \qquad s = 2r+1.$$

12.4.7 Una onda planal se puede desarrollar en una serie de ondas esféricas por medio de la ecuación de Rayleigh

$$e^{ikr\cos\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kr)\, P_n(\cos\gamma).$$

Demuestre que $a_n = i^n(2n+1)$.

Sugerencia. 1. Utilice la ortogonalidad de P_n para resolver para $a_n j_n(kr)$.

2. Diferencie n veces con respecto a (Kr) y establezca $r=0$ para eliminar la dependencia en r.

3. Evalúe la integral remanente mediante el Ejercicio 12.4.4.

Nota. Este problema también se puede tratar al considerar que ambos lados de la ecuación satisfacen la ecuación de Helmholtz. La igualdad puede establecerse demostrando que las soluciones tienen el mismo comportamiento en el origen y que también se comportan de modo similar a grandes distancias.

12.4.8 Verifique la ecuación de Rayleigh del Ejercicio 12.4.7 comenzando con las siguientes etapas:

1. Diferencie con respecto a (kr) para establecer

$$\sum_n a_n j_n'(kr) P_n(\cos\gamma) = i\sum_n a_n j_n(kr) \cos\gamma P_n(\cos\gamma).$$

2. Utilice una relación de recurrencia para sustituir $\cos\gamma P_n(\cos\gamma)$ por una combinación lineal de P_{n-1} y P_{n+1}.

3. Utilice una relación de recurrencia para sustituir j_n' por una combinación lineal de j_{n-1} y j_{n+1}.

12.4.9 A partir del Ejercicio 12.4.7, demuestre que

$$j_n(kr) = \frac{1}{2i^n}\int_{-1}^{1} e^{ikr\mu} P_n(\mu)\, d\mu.$$

12.4.10 Los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel esféricas están relacionadas por

$$j_n(z) = \tfrac{1}{2}(-i)^n \int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta} P_n(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Verifique esta relación al transformar el lado derecho en

$$\frac{z^n}{2^{n+1}n!}\int_0^{\pi} \cos(z\cos\theta)\,\mathrm{sen}^{2n+1}\theta\, d\theta$$

y haciendo uso del Ejercicio 11.7.9.

12.4.11 Mediante la evaluación directa de la integral de Schlaefli, demuestre que $P_n(1) = 1$.

12.4.12 Explique por qué el contorno de la integral de Schlaefli, Ec. 12.69, se selecciona para circundar los puntos $t = z$ y $t = 1$ cuando $n \to \nu$, no un número entero.

12.4.13 Utilizando las representaciones de integral de Laplace, demuestre $P_n(z) = P_{-n-1}(z)$. *Sugerencia.* Ya que $P_{-n-1}(z)$ satisface la ecuación de Legendre, debe ser una combinación lineal de $P_{+n}(z)$, regular en $z = \pm 1$ y $Q_{+n}(z)$ divergente en $z = \pm 1$.

$$P_{-n-1}(z) = a_1 P_n(z) + a_2 Q_n(z).$$

Demuestre que

(a) $a_2 = 0$ y (b) $a_1 = 1$.

12.5 Funciones de Legendre Asociadas

Cuando la ecuación de Helmholtz se separa en coordenadas esferoidales prolatas, esferoidales oblatas o polares esféricas, una de las ecuaciones diferenciales ordinarias separadas es la ecuación de Legendre asociada. Solamente cuando la constante de separación acimutal m^2 es cero se tiene la ecuación de Legendre, Ec. 12.28.

Una forma de desarrollar la solución para la ecuación de Legendre asociada consiste en comenzar con la ecuación de Legendre regular y convertir la misma en la ecuación de Legendre asociada por medio de la diferenciación múltiple. Se considera la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \tag{12.76}$$

y con la ayuda de la fórmula de Leibnitz[1] se diferencia m veces. El resultado es

$$(1 - x^2)u'' - 2x(m+1)u' + (n-m)(n+m+1)u = 0, \tag{12.77}$$

en donde

$$u \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \tag{12.78}$$

Ahora se permite que

$$v(x) = (1 - x^2)^{m/2} u(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \tag{12.79}$$

Resolviendo para u y diferenciando se obtiene

$$u' = \left(v' + \frac{mxv}{1 - x^2}\right)(1 - x^2)^{-m/2}, \tag{12.80}$$

[1] La fórmula de Leibnitz para la enésima derivada de un producto es

$$\frac{d^n}{dx^n}[A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s}{dx^s} B(x), \qquad \binom{n}{s} = \frac{n!}{(n-s)!s!},$$

un coeficiente binomial.

$$u'' = \left[v'' + \frac{2mxv'}{1-x^2} + \frac{mv}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2v}{(1-x^2)^2}\right]\cdot(1-x^2)^{-m/2} \tag{12.81}$$

Sustituyendo en la Ec. 12.77, se encuentra que la nueva función v satisface la ecuación diferencial

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]v = 0, \tag{12.82}$$

lo cual es la ecuación de Legendre asociada reduciendo la ecuación de Legendre, tal como debe ser cuando m se establece igual a cero. Expresada en coordenadas polares esféricas, la ecuación de Legendre asociada es

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dv}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]v = 0. \tag{12.83}$$

Funciones de Legendre Asociadas. Las soluciones regulares, que ahora se han rotulado $P_n^m(x)$, son

$$v \equiv P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x). \tag{12.84}$$

Estas son las funciones de Legendre asociadas.[1]

De acuerdo con la forma de la Ec. 12.84, es de esperarse que m no sea negativo, diferenciando un número negativo de veces que no se ha definido. Sin embargo, cuando $P_n(x)$ se expresa mediante la fórmula de Rodrigues, la limitación de m se elimina y se puede tener $-n \leqslant m \leqslant n$, negativo mientras se permitan los valores positivos de m. Utilizando la fórmula de diferenciación de Leibnitz una vez más, el lector puede demostrar (Ejercicio 12.5.1) que $P_n^m(x)$ y $P_n^{-m}(x)$ están relacionadas por medio de

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x). \tag{12.84a}$$

De acuerdo con la definición de las funciones de Legendre asociadas, $P_n^m(x)$,

$$P_n^0(x) = P_n(x). \tag{12.85}$$

Asimismo, se puede desarrollar la Tabla 12.3.

Del mismo modo que con los polinomios de Legendre, existe una función generadora para las funciones de Legendre asociadas:

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s+m}^m(x)t^s. \tag{12.86}$$

[1] Ocasionalmente (tal como en AMS-55), el lector encontrará las funciones de Legendre asociadas definidas con un factor adicional de $(-1)^m$. Este factor $(-1)^m$ aparentemente es una complicación innecesaria en este momento. Se incluye en la definición de los armónicos esféricos $Y_n^m(\theta, \varphi)$ en la Sección 12.6.

TABLA 12.3

Funciones de Legendre Asociadas

$P_1^1(x) = (1 - x^2)^{1/2} = \operatorname{sen}\theta$
$P_2^1(x) = 3x(1 - x^2)^{1/2} = 3\cos\theta \operatorname{sen}\theta$
$P_2^2(x) = 3(1 - x^2) = 3\operatorname{sen}^2\theta$
$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2 - 1)(1 - x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\operatorname{sen}\theta$
$P_3^2(x) = 15x(1 - x^2) = 15\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$
$P_3^3(x) = 15(1 - x^2)^{3/2} = 15\operatorname{sen}^3\theta$
$P_4^1(x) = \frac{5}{2}(7x^3 - 3x)(1 - x^2)^{1/2} = \frac{5}{2}(7\cos^3\theta - 3\cos\theta)\operatorname{sen}\theta$
$P_4^2(x) = \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2) = \frac{15}{2}(7\cos^2\theta - 1)\operatorname{sen}^2\theta$
$P_4^3(x) = 105x(1 - x^2)^{3/2} = 105\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta$
$P_4^4(x) = 105(1 - x^2)^2 = 105\operatorname{sen}^4\theta$

Sin embargo, debido a su forma más dificultosa y a la falta de una aplicación física directa, rara vez se utiliza.

Relaciones de Recurrencia. Como era de esperarse, las funciones de Legendre asociadas satisfacen las relaciones de recurrencia. Debido a la existencia de dos índices en lugar de tan solo uno, se tiene una amplia variedad de relaciones de recurrencia:

$$P_n^{m+1} - \frac{2mx}{(1 - x^2)^{1/2}} P_n^m + [n(n + 1) - m(m - 1)]P_n^{m-1} = 0, \tag{12.87}$$

$$(2n + 1)xP_n^m = (n + m)P_{n-1}^m + (n - m + 1)P_{n+1}^m, \tag{12.88}$$

$$\begin{aligned}(2n + 1)(1 - x^2)^{1/2}P_n^m &= P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1} \\ &= (n + m)(n + m - 1)P_{n-1}^{m-1} - (n - m + 1)(n - m + 2)P_{n+1}^{m-1},\end{aligned} \tag{12.89}$$

$$(1 - x^2)^{1/2}P_n^{m\prime} = \tfrac{1}{2}P_n^{m+1} - \tfrac{1}{2}(n + m)(n - m + 1)P_n^{m-1}. \tag{12.90}$$

Estas relaciones y muchas otras similares se pueden verificar mediante el uso de la función generadora (Ec. 12.4), por medio de la sustitución de la solución en serie de la ecuación de Legendre asociada (12.82) o por la reducción a las relaciones de recurrencia polinomial de Legendre, utilizando la Ec. 12.84. Como ejemplo, de este último método, considere la tercera ecuación en el conjunto anterior. Es similar a la Ec. 12.23

$$(2n + 1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x). \tag{12.91}$$

Procedamos a diferenciar esta relación de recurrencia polinomial de Legendre m veces para obtener

$$(2n+1)\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) = \frac{d^m}{dx^m}P'_{n+1}(x) - \frac{d^m}{dx^m}P'_{n-1}(x)$$

$$= \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n+1}(x) - \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n-1}(x). \qquad (12.92)$$

Ahora, multiplicando por $(1-x^2)^{(m+1)/2}$ y utilizando la definición de $P_n^m(x)$, se obtiene la Ec. 12.89

Paridad. La relación de paridad satisfecha por las funciones de Legendre asociadas se puede determinar mediante el examen de la ecuación de definición (12.84). A medida que $x \to -x$, ya es conocido que $P_n(x)$ contribuye a $(-1)^n$. La diferenciación m veces proporciona un factor de $(-1)^m$. En consecuencia, se tiene

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m}P_n^m(x). \qquad (12.93)$$

Tomando como referencia la Tabla 12.3 se verifica esto para $m \leqslant 4$.

Asimismo, de acuerdo con la definición en la Ec. 12.84

$$P_n^m(\pm 1) = 0, \text{ para } m > 0. \qquad (12.94)$$

Ortogonalidad. La ortogonalidad de $P_n^m(x)$ se deriva de la ecuación diferencial del mismo modo que para $P_n(x)$ (Sección 12.3); el término siguiente $-m^2/(1-x^2)$ se cancela, suponiendo para esto que m es igual en ambos casos. Sin embargo, es instructivo demostrar la ortogonalidad mediante otro método, un método que también proporcione la constante de normalización.

Utilizando la definición en la Ec. 12.84 y la fórmula de Rodrigues (Ec. 12.65) para $P_n(x)$, se encuentra

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)\,P_q^m(x)\,dx = \frac{(-1)^m}{2^{p+q}p!q!}\int_{-1}^{1} X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}}X^p \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}}X^q\,dx. \qquad (12.95)$$

La función X está definida por $X \equiv (x^2-1)$. Si $p \neq q$, supongamos $p < q$. Observe que el subíndice m es el mismo para ambas funciones. Esto es una condición esencial. La técnica consiste en la integración repetida por partes; todas las partes integradas desaparecen siempre y cuando exista un factor $X = x^2 - 1$. Procedamos a integrar $q+m$ veces para obtener

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)\,P_q^m(x)\,dx = \frac{(-1)^m(-1)^{q+m}}{2^{p+q}p!q!}\int_{-1}^{1} \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}}\left(X^m\frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}}X^p\right)X^q\,dx. \qquad (12.96)$$

El *integrando* en el lado derecho se desarrolla ahora mediante la fórmula de Leibnitz para resultar en

$$X^q \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}}\left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p\right) = X^q \sum_{i=0}^{i=q+m} \frac{(q+m)!}{i!(q+m-i)!} \frac{d^{q+m-i}}{dx^{q+m-i}} X^m \frac{d^{p+m+i}}{dx^{p+m+i}} X^p. \tag{12.97}$$

Ya que el término X^m no contiene una potencia de x mayor que x^{2m}, se debe tener

$$q + m - i \leqslant 2m \tag{12.98}$$

es decir que la derivada desaparece. De modo similar,

$$p + m + i \leqslant 2p. \tag{12.99}$$

En la solución de estas ecuaciones para el índice i, las condiciones para la ausencia de un cero resultan en

$$i \geqslant q - m, \quad i \leqslant p - m. \tag{12.100}$$

Si $p < q$, tal como se ha supuesto, no existe solución y la integral desaparece. Evidentemente se obtiene el mismo resultado si $p > q$.

Para el caso restante, $p = q$, aun es posible tener un término simple correspondiente a $i = q - m$. Incorporando la Ec. 12.97 en la Ec. 12.96, se tiene

$$\int_{-1}^{1} [P_q^m(x)]^2\, dx = \frac{(-1)^{q+2m}(q+m)!}{2^{2q} q!q!(2m)!(q-m)!} \int_{-1}^{1} X^q \left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m\right)\left(\frac{d^{2q}}{dx^{2q}} X^q\right) dx. \tag{12.101}$$

Ya que

$$X^m = (x^2 - 1)^m = x^{2m} - mx^{2m-2} + \cdots, \tag{12.102}$$

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m = (2m)!, \tag{12.103}$$

la Ec. 12.101 se reduce a

$$\int_{-1}^{1} [P_q^m(x)]^2\, dx = \frac{(-1)^{q+2m}(2q)!(q+m)!}{2^{2q} q!q!(q-m)!} \int_{-1}^{1} X^q\, dx. \tag{12.104}$$

La integral del lado derecho es justamente

$$(-1)^q \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2q+1}\theta\, d\theta = \frac{(-1)^q 2^{2q+1} q!q!}{(2q+1)!} \tag{12.105}$$

(cf. Ejercicio 10.4.9). Combinando las Ecs. 12.104 y 12.105, se tiene la integral de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)\, P_q^m(x)\, dx = \frac{2}{2q+1} \cdot \frac{(q+m)!}{(q-m)!}\, \delta_{p,q} \tag{12.106}$$

o, en coordenadas polares esféricas,

$$\int_0^{\pi} P_p^m(\cos\theta)\, P_q^m(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = \frac{2}{2q+1}\cdot\frac{(q+m)!}{(q-m)!}\,\delta_{p,q}. \qquad (12.107)$$

La ortogonalidad de los polinomios de Legendre de hecho es un caso especial de este resultado, obtenido al establecer m igual a cero; es decir, para $m = 0$, la Ec. 12.106 se reduce a las Ecs. 12.43 y 12.48.

Existe la posibilidad de establecer una relación de ortogonalidad para las funciones de Legendre asociadas del mismo índice bajo pero con diferente índice superior. Se encuentra

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_n^k(x)(1-x^2)^{-1}\, dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!}\,\delta_{m,k}. \qquad (12.108)$$

Véase que se ha introducido un factor ponderante nuevo $(1-x^2)^{-1}$. Esta forma es esencialmente una curiosidad matemática. En los problemas físicos, la ortogonalidad de la dependencia en φ enlaza los dos índices superiores y origina la Ec. 12.107.

EJEMPLO 12.5.1 CAMPO DE INDUCCION MAGNETICA DE UN CIRCUITO DE CORRIENTE

Del mismo modo que las otras ecuaciones diferenciales de la física matemática, la ecuación de Legendre asociada tiene posibilidades de aparecer inesperadamente. Como ilustración, considere el campo de inducción magnética $\mathbb{B}$ y el potencial de vector magnético $\mathbb{A}$ creado por un circuito de corriente circular simple en el plano ecuatorial (Fig. 12.12).

De acuerdo con la teoría electromagnética, se conoce que la contribución del elemento de corriente $I\, d\lambda$ al potencial de vector magnético es

$$d\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, d\lambda}{r}. \qquad (12.109)$$

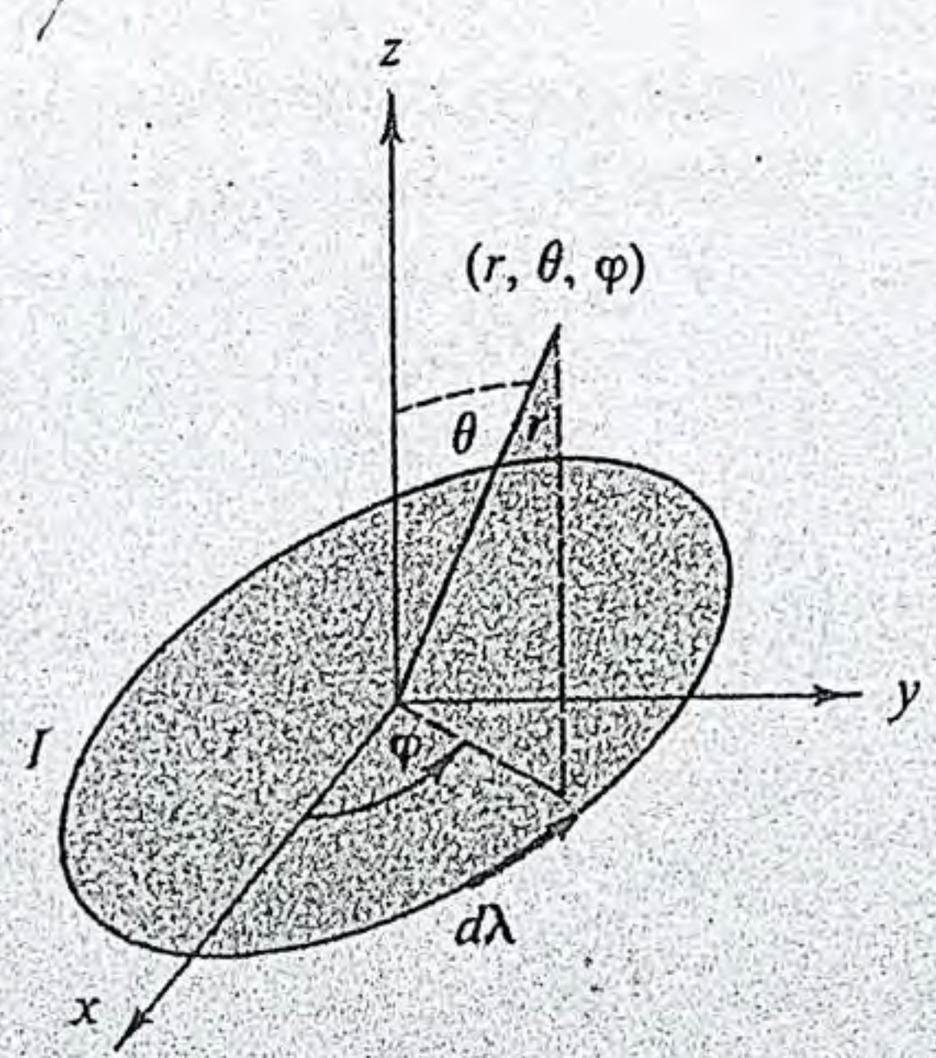


Fig. 12.12 Circuito de corriente circular

Esto, además de la simetría del sistema, demuestra que **A** tiene solamente un componente φ_0 y que el componente es independiente de φ[1]

$$\mathbf{A} = \varphi_0 A_\varphi(r, \theta). \tag{12.110}$$

Mediante las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \qquad (\partial \mathbf{D}/\partial t = 0, \text{ unidades mks}). \tag{12.111}$$

Ya que

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{12.112}$$

se tiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{12.113}$$

en donde **J** es la densidad de corriente. En nuestro problema, **J** es cero en todo lugar, excepto en el circuito de corriente. En consecuencia, lejos del circuito

$$\nabla \times \nabla \times \varphi_0 A_\varphi(r, \theta) = 0, \tag{12.114}$$

lo cual introduce a la Ec. 12.110.

Utilizando las expresiones para la ondulación en coordenadas polares esféricas (Sección 2.4), se obtiene (Ejemplo 2.4.2)

$$\nabla \times \nabla \times \varphi_0 A_\varphi(r, \theta) = \varphi_0 \left[-\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(\cot \theta A_\varphi) \right]$$

$$= 0. \tag{12.115}$$

Permitiendo que $A_\varphi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ y separando las variables, se tiene

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0, \tag{12.116}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + n(n+1)\Theta - \frac{\Theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = 0. \tag{12.117}$$

La segunda ecuación es la de Legendre asociada (12.83) con $m = 1$, e inmediatamente se puede indicar

$$\Theta(\theta) = P_n^1(\cos\theta). \tag{12.118}$$

La constante de separación $n(n+1)$ ha sido seleccionada para mantener esta solución con un comportamiento adecuado.

Mediante el método de ensayo y error, permitiendo que $R(r) = r^\alpha$, se encuentra que $\alpha = n, -n-1$. La primera posibilidad se desecha ya que la

[1] Empareje los elementos de corriente correspondiente $I\,d\lambda(\varphi_1)$ e $I\,d\lambda(\varphi_2)$, en donde $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$.

solución debe desaparecer a medida que $r \to \infty$. En consecuencia,

$$A_{\varphi n} = \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n^1(\cos \theta) = c_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^1(\cos \theta) \tag{12.119}$$

y

$$A_\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^1(\cos \theta), \qquad (r > a). \tag{12.120}$$

En este caso, a es el radio del circuito de corriente.

Ya que A_φ debe ser invariante a la reflexión en el plano ecuatorial por la simetría del problema,

$$A_\varphi(r, \cos \theta) = A_\varphi(r, -\cos \theta), \tag{12.121}$$

la propiedad de paridad de $P_n^m(\cos \theta)$ (Ec. 12.93) demuestra que $c_n = 0$ para n par.

Para completar la evaluación de las constantes, se puede hacer uso de la Ec. 12.120 con objeto de calcular B_z a lo largo del eje $[B_z = B_r(r, \theta = 0)]$ y comparar con la expresión obtenida a partir de la ley de Biot y Savart. Esta es la misma técnica empleada en el Ejemplo 12.3.3. Se tiene

$$\begin{aligned} B_r &= \nabla \times \mathbf{A}\,|_r \\ &= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta\, A_\varphi)\right] \\ &= \frac{\cot \theta}{r} A_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{12.122}$$

Utilizando

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} &= -\operatorname{sen}\theta \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} \\ &= -\frac{1}{2}P_n^2 + \frac{n(n+1)}{2} P_n^0 \end{aligned} \tag{12.123}$$

y la Ec. 12.87 con $m = 1$,

$$P_n^2(\cos \theta) - \frac{2 \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} P_n^1(\cos \theta) + n(n+1) P_n(\cos \theta) = 0, \tag{12.124}$$

se obtiene

$$B_r(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+1) \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} P_n(\cos \theta), \qquad r > a \tag{12.125}$$

(para todas las θ). En particular, para $\theta = 0$,

$$B_r(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+1) \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}}. \tag{12.126}$$

 También se puede obtener

$$B_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} P_n^1(\cos\theta), \qquad r > a. \tag{12.127}$$

La ley de Biot y Savart establece que

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}_0}{r^2} \qquad \text{(unidades mks)}. \tag{12.128}$$

Ahora se integra sobre el perímetro del circuito (radio a); el campo de inducción magnética a lo largo del eje z es $\mathbf{k}B_z$, en donde

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} a^2(a^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{z^3}\left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-3/2} \tag{12.129}$$

Desarrollando por medio del teorema binomial

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{z^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{15}{8}\left(\frac{a}{z}\right)^4 - \cdots\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{z^3}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{(2s+1)!!}{(2s)!!}\left(\frac{a}{z}\right)^{2s}, \qquad z > a. \tag{12.130}$$

Igualando las Ecs. 12.126 y 12.130 término por término (con $r = z$),[1] se encuentra

$$c_1 = \frac{\mu_0 I}{4}, \qquad c_3 = -\frac{\mu_0 I}{16}, \qquad c_2 = c_4 = \cdots = 0.$$

$$c_n = (-1)^{(n-1)/2}\frac{\mu_0 I}{2n(n+1)} \times \frac{(n/2)!}{[(n-1)/2]!(\frac{1}{2})!}, \qquad n \text{ impar} \tag{12.131}$$

De manera equivalente, se puede indicar

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{\mu_0 I}{2^{2n+2}} \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = (-1)^n \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \tag{12.132}$$

y

$$A_\varphi(r,\theta) = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n+1}^1(\cos\theta), \tag{12.133}$$

$$B_r(r,\theta) = \frac{a^2}{r^3}\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}(2n+1)(2n+2)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n+1}(\cos\theta), \tag{12.134}$$

[1] La serie de potencias descendente también es única.

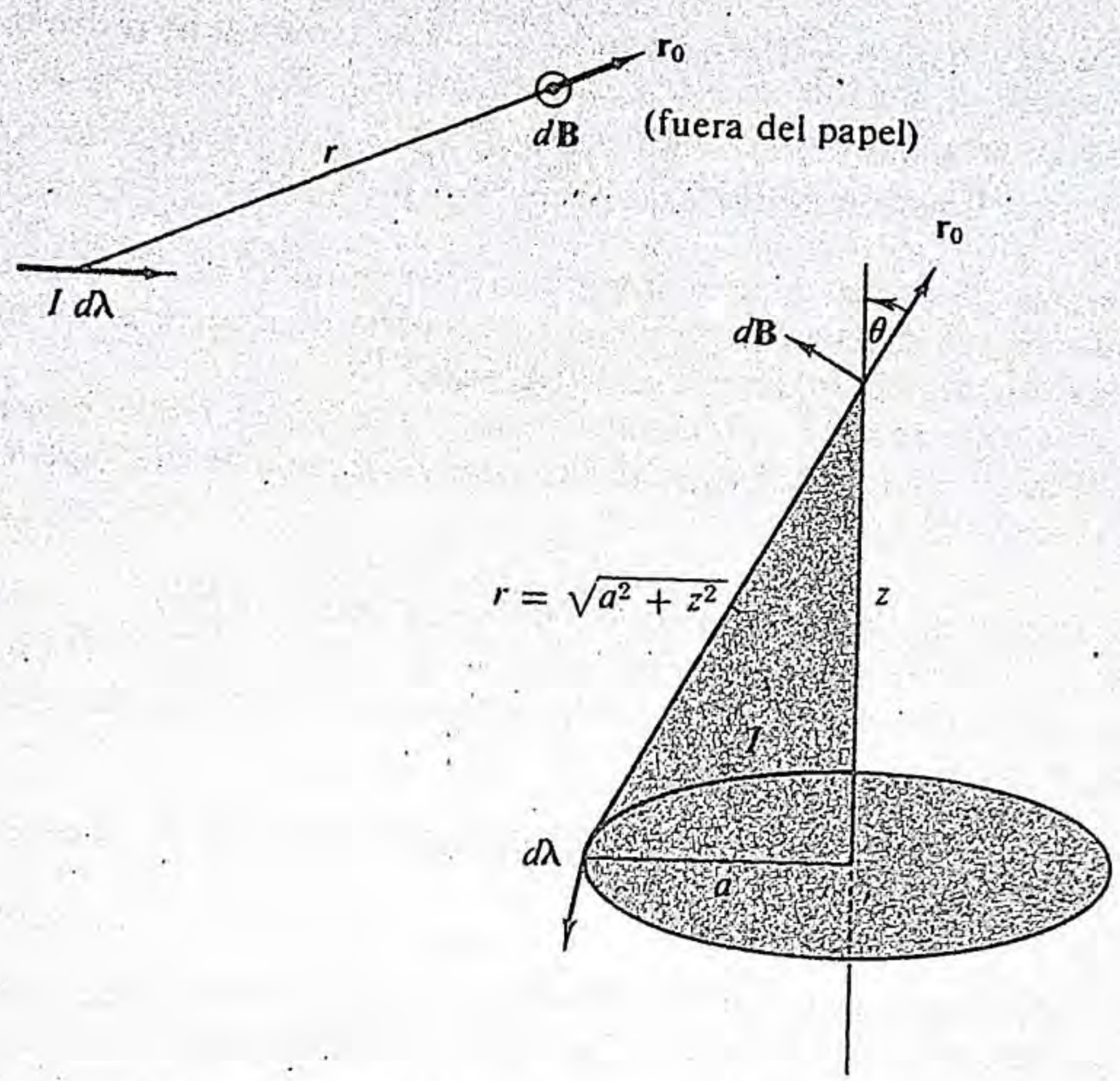


Fig. 12.13 Ley de Biot y Savart aplicada a un circuito circular

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{a^2}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}(2n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P^1_{2n+1}(\cos\theta). \tag{12.135}$$

Estos campos se pueden describir en una forma cerrada mediante el uso de las integrales elípticas. El Ejercicio 5.8.4 constituye una ilustración de este procedimiento. Una tercera posibilidad es la integración directa de la Ec. 12.109 mediante el desarrollo del factor $1/r$ en la forma de una función generadora polinomial de Legendre. La corriente se especifica por medio de las funciones delta de Dirac. Estos métodos tienen la ventaja de proporcionar directamente las constantes c_n.

La comparación de los campos dipolo de circuito de corriente magnética y los campos dipolo eléctrico finito puede ser de interés. Para el dipolo de circuito de corriente magnética, el análisis anterior proporciona

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{r^3}\left[P_1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3 + \cdots\right], \tag{12.136}$$

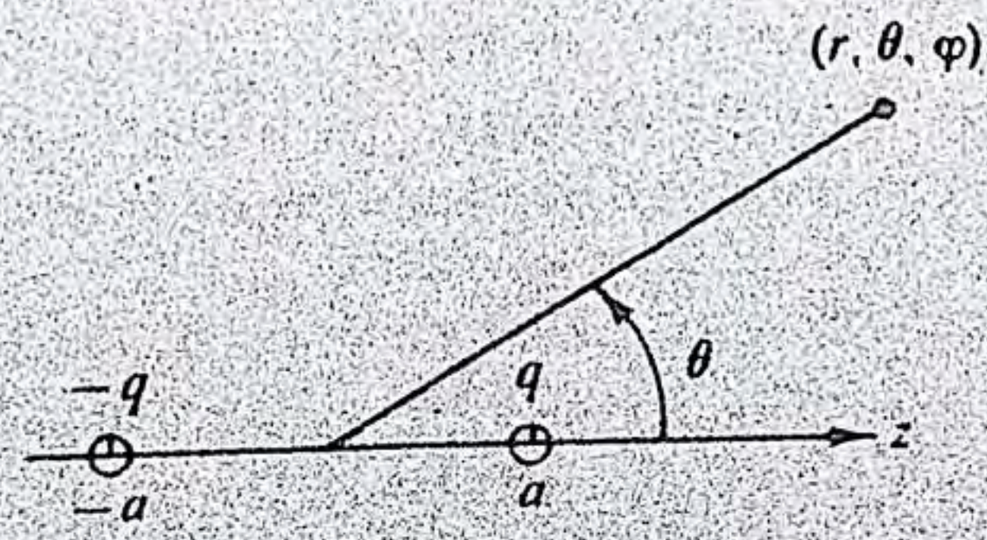


Fig. 12.14

$$B_\theta(r,\theta) = \frac{\mu_0 I}{4}\frac{a^2}{r^3}\left[P_1^1 - \frac{3}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3^1 + \cdots\right]. \tag{12.137}$$

De acuerdo con el potencial dipolo eléctrico finito de la Sección 12.1 se tiene

$$E_r(r,\theta) = \frac{qa}{\pi\varepsilon_0 r^3}\left[P_1 + 2P_3\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \cdots\right], \tag{12.138}$$

$$E_\theta(r,\theta) = \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\left[P_1^1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_3^1 + \cdots\right]. \tag{12.139}$$

Los dos campos concuerdan en forma, al menos en lo que se refiere al término principal, y esto constituye la base para denominar a los mismos campos dipolo.

Como en el caso de los multipolos eléctricos, algunas veces es conveniente hablar de los multipolos magnéticos de *punto*. Para el caso dipolo, las Ecs. 12.136 y 12.137, el dipolo de punto se forma al considerar el límite como $a \to 0$, $I \to \infty$ con Ia^2 constante. Siendo $\mathbf{n}$ vector unitario normal al circuito de corriente (sentido positivo según la regla de la mano derecha, Sec. 1.10), el momento magnético $\mathbf{m}$ está definido por $\mathbf{m} = \mathbf{n}I\pi a^2$.

EJERCICIOS

12.5.1 Demuestre que

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x),$$

en donde $P_n^m(x)$ está definido por

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n\, n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n.$$

Sugerencia. Un procedimiento aplica la fórmula de Leibnitz a $(x+1)^n(x-1)^n$.

12.5.2 Demuestre que

$$P_{2n}^1(0) = 0,$$

$$P_{2n+1}^1(0) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{(2^n n!)^2} = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!},$$

mediante cada uno de los tres métodos:
(a) uso de las relaciones de recurrencia,
(b) desarrollo de la función generadora, y
(c) fórmula de Rodrigues.

12.5.3 Evalúe $P_n^m(0)$.

$$\textit{Respuesta.}\quad P_n^m(0) = \begin{cases} (-1)^{(n-m)/2}\dfrac{(n+m)!}{2^n\left(\dfrac{n-m}{2}\right)!\left(\dfrac{n+m}{2}\right)!}, & n+m \text{ par}, \\ 0, & n+m \text{ impar}. \end{cases}$$

$$\text{Asimismo, } P_n^m(0) = (-1)^{(n-m)/2}\frac{(n+m-1)!!}{(n-m)!!}, \qquad n+m \text{ par}.$$

12.5.4 Demuestre que

$$P_n^n(\cos\theta) = (2n-1)!!\operatorname{sen}^n\theta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

12.5.5 Derive la relación de recurrencia de Legendre asociada

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}}P_n^m(x) + [n(n+1) - m(m-1)]P_n^{m-1}(x) = 0.$$

12.5.6 Demuestre que

$$\operatorname{sen}\theta\, P_n'(\cos\theta) = P_n^1(\cos\theta).$$

12.5.7 Demuestre que

(a) $$\int_0^\pi \left(\frac{dP_n^m}{d\theta}\frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + \frac{m^2P_n^mP_{n'}^m}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{2n(n+1)}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'},$$

(b) $$\int_0^\pi \left(\frac{P_n^1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{dP_{n'}^1}{d\theta} + \frac{P_{n'}^1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{dP_n^1}{d\theta}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0.$$

Estas integrales se presentan en la teoría de la dispersión de las ondas electromagnéticas por esferas.

12.5.8 Como repetición del Ejercicio 12.3.6, demuestre mediante el uso de las funciones de Legendre asociadas que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)\,dx &= \frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{2}{2n-1}\cdot\frac{n!}{(n-2)!}\delta_{m,n-1} \\ &\quad + \frac{n}{2n+1}\cdot\frac{2}{2n+3}\cdot\frac{(n+2)!}{n!}\delta_{m,n+1}.\end{aligned}$$

12.5.9 Evalúe

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta\, P_n^1(\cos\theta)\,d\theta.$$

12.5.10 El polinomio de Legendre asociado $P_n^m(x)$ satisface la ecuación diferencial autoadjunta

$$(1-x^2)P_n^{m\prime\prime}(x) - 2x\,P_n^{m\prime}(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x) = 0.$$

A partir de las ecuaciones diferenciales para $P_n^m(x)$ y $P_n^k(x)$, demuestre que

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x)P_n^k(x)\frac{dx}{1-x^2} = 0$$

para $k \neq m$.

12.5.11 Determine el potencial de vector de un cuadripolo magnético mediante la diferenciación del potencial de dipolo magnético.

$$\textit{Respuesta.}\ \mathbf{A}_{MQ} = \frac{\mu_0}{2}(Ia^2)(dz)\,\boldsymbol{\varphi}_0 \frac{P_2^1(\cos\theta)}{r^3} + \text{términos de orden superior.}$$

$$\mathbf{B}_{MQ} = \mu_0(Ia^2)(dz)\left[\mathbf{r}_0 \frac{3P_2(\cos\theta)}{r^4} + \boldsymbol{\theta}_0 \frac{P_2^1(\cos\theta)}{r^4}\right]$$

Esto corresponde a colocar un circuito de corriente de radio a en $z = dz$, un circuito de corriente dirigido opuestamente en $z = -dz$, y permitiendo que $a \to 0$ sujeto a que $(dz)x$ (intensidad del dipolo) igual a una constante.

Otro procedimiento consiste en integrar dA (Ec. 12.109), desarrollar el denominador en una serie de polinomios de Legendre y utilizar el teorema de adición polinomial de Legendre (Sección 12.8).

12.5.12 Un circuito simple de alambre con radio a lleva una corriente I.

(a) Encuentre la inducción magnética $\mathbf{B}$ para $r < a$.

(b) Calcule la integral del flujo magnético $(\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma})$ sobre el área del circuito de corriente, es decir

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} B_\theta\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}\right) d\varphi\, r\, dr.$$

Respuesta. ∞.

La Tierra se encuentra dentro de tal corriente anular en que I se aproxima a los millones de amperios originados por el arrastre de las partículas cargadas en el anillo de Van Allen.

12.5.13 Una cubierta esférica cargada uniformemente se hace girar con velocidad angular constante.

(a) Calcule la inducción magnética $\mathbf{B}$ a lo largo del eje de rotación fuera de la esfera.

(b) Utilizando la serie de potencial de vector de la Sección 12.5, encuentre $\mathbf{A}$ y luego $\mathbf{B}$ para todo el espacio fuera de la esfera.

12.5.14 En un modelo de gota líquida del núcleo, el núcleo esférico se somete a pequeñas deformaciones. Considere una esfera de radio r_0 que se deforma de modo que su nueva superficie está definida por

$$r = r_0[1 + \alpha_2 P_2(\cos\theta)].$$

Encuentre el área de la esfera deformada con términos del orden α_2^2.

Sugerencia.

$$dA = \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{1/2} r \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Respuesta. $A = 4\pi r_0^2[1 + \frac{4}{5}\alpha_2^2 + O(\alpha_2^3)]$.

12.5.15 Una partícula nuclear se encuentra en el potencial $V(r, \theta, \varphi) = 0$ para $0 \leq r < a$ y ∞ para $r > a$. La partícula se describe por medio de una función de onda $\psi(r, \theta, \varphi)$ que satisface la ecuación de onda

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + V_0\psi = E\psi$$

y la condición limitante

$$\psi(r = a) = 0.$$

Demuestre que para que la energía E sea mínima no tiene que existir dependencia angular en la función de onda, es decir $\psi = \psi(r)$.

Sugerencia. Este problema se centraliza en la condición limitante de la función radial.

12.6 Armónicos Esféricos

En la separación de variables de (a), la ecuación de Laplace, (b), la ecuación de Helmholtz o la dependencia con respecto al espacio de la ecuación de onda clásica, y (c), la ecuación de onda de Schrödinger para campos de fuerza central

$$\nabla^2\psi + k^2 f(r)\psi = 0, \tag{12.140}$$

en que la dependencia angular, que procede completamente del operador laplaciano, es

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{\Theta(\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + n(n+1)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi) = 0. \tag{12.141}$$

Dependencia Acimutal. Ortogonalidad. La ecuación acimutal separada es

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2, \tag{12.142}$$

con las soluciones

$$\Phi(\varphi) = e^{-im\varphi},\ e^{im\varphi}, \tag{12.143}$$

lo cual satisface la condición ortogonal

$$\int_0^{2\pi} e^{-im_1\varphi}e^{im_2\varphi}\,d\varphi = 2\pi\delta_{m_1,m_2}. \tag{12.144}$$

Observe que representa el producto $\Phi^*_{m_1}(\varphi)\,\Phi_{m_2}(\varphi)$ y que se considera que* se utiliza para indicar la función conjugada compleja. Esta selección no se requiere, pero es conveniente en los cálculos de la mecánica cuántica. Se podría haber usado

$$\Phi = \operatorname{sen} m\varphi, \qquad \cos m\varphi \tag{12.145}$$

y las condiciones de la ortogonalidad que forman la base de la serie de Fourier (Capítulo 14).

En la electrostática y en la mayor parte de los otros problemas de física se requiere que m sea un número entero con objeto de que $\Phi(\varphi)$ pueda ser una función de valor simple del ángulo acimutal. En la mecánica cuántica, este asunto queda mucho más involucrado debido a que la cantidad que puede observarse que debe ser de valor simple es el cuadrado de la magnitud de la función de onda, $\Phi^*\Phi$. Sin embargo se puede demostrar que se debe tener m integral ya que de otro modo resultan corrientes absurdas.

Por medio de la Ec. 12.144

$$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi} \tag{12.146}$$

es ortonormal (ortogonal y normalizada) con respecto a la integración sobre el ángulo acimutal φ.

Dependencia del Angulo Polar. Eliminando la dependencia acimutal, la dependencia del ángulo polar (θ) origina la ecuación de Legendre asociada (12.83), la cual se satisface por medio de las funciones de Legendre asociadas, es decir $\Theta(\theta)=P_n^m(\cos\theta)$. Para incluir los valores negativos de m, es conveniente el uso de la fórmula de Rodrigues, Ec. 12.65 en la definición de $P_n^m(\cos\theta)$. Esto origina

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^n, \qquad -n \leqslant m \leqslant n. \quad (12.147)$$

en que $P_n^m(\cos\theta)$ y $P_n^{-m}(\cos\theta)$ están relacionados como se indica en el Ejercicio 12.5.1. Una ventaja de este procedimiento con respecto al hecho de simplemente definir $P_n^m(\cos\theta)$ para $0 \leqslant m \leqslant n$ y requerir que $P_n^{-m} = P_n^m$ es que las relaciones de recurrencia válidas para $0 \leqslant m \leqslant n$ aún continuan siendo válidas para $-n \leqslant m < 0$.

Normalizando la función de Legendre asociada mediante la Ec. 12.106, se obtiene la función ortonormal

$$\mathscr{P}_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_n^m(\cos\theta), \qquad -n \leqslant m \leqslant n. \quad (12.148)$$

Armónicos Esféricos. La función $\Phi_m(\varphi)$ (Ec. 12.146) es ortonormal con respecto al ángulo acimutal φ, mientras que la función $\mathscr{P}_n^m(\cos\theta)$ (Ec. 12.148) es ortonormal con respecto al ángulo polar θ. Se considera el producto de ambos y se define

$$Y_n^m(\theta,\varphi) \equiv (-1)^m\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \quad (12.149)$$

para obtener las funciones de dos ángulos (y dos índices) que son ortonormales sobre la superficie esférica. Estos términos $Y_n^m(\theta,\varphi)$ son los armónicos esféricos. La integral de ortogonalidad completa se transforma en

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1}{}^*(\theta,\varphi)\,Y_{n_2}^{m_2}(\theta,\varphi)\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi = \delta_{n_1,n_2}\,\delta_{m_1,m_2}. \quad (12.150)$$

El término adicional $(-1)^m$ incluido en la ecuación de definición de $Y_n^m(\theta,\varphi)$ merece cierto comentario. Evidentemente es legítimo ya que la Ec. 12.140 es lineal y homogénea. No es necesario, pero al considerar ciertos cálculos de la mecánica cuántica, particularmente en la teoría cuántica del momento angular (Sección 12.7), resulta bastante conveniente. El factor $(-1)^m$ es un factor de fase, denominado frecuentemente la fase de Condon-Shortley en atención a los autores del texto clásico de la espectroscopia atómica. El efecto de $(-1)^m$ (Ec. 12.149) y de $(-1)^m$ de la Ec. 12.84*a*

TABLA 12.4

Armónicos Esféricos (Fase de Condon-Shortley)

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^2(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2\theta e^{2i\varphi}$$

$$Y_2^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^{-1}(\theta, \varphi) = +\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^{-2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2\theta\, e^{-2i\varphi}$$

para $P_n^{-m}(\cos\theta)$ consiste en introducir una alternativa de signo entre los armónicos esféricos de *m positiva.* Esto se muestra en la Tabla 12.4.

Serie de Laplace, Teorema de Desarrollo Fundamental. Parte de la importancia de los armónicos esféricos se encuentra en la propiedad de plenitud, una consecuencia de la forma de Sturm-Liouville de la ecuación de Laplace. Esta propiedad, en este caso, significa que cualquier función $f(\theta, \varphi)$ (con las suficientes propiedades de continuidad) evaluada sobre la superficie de una esfera se puede desarrollar en una serie doble convergente de manera uniforme en los armónicos esféricos[1] (Serie de Laplace).

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m,n} a_{mn}\, Y_n^m(\theta, \varphi). \tag{12.151}$$

Si $f(\theta, \varphi)$ es conocida, los coeficientes se pueden encontrar de inmediato mediante el uso de la integral de ortogonalidad.

[1] Para la demostración de este teorema fundamental, véase E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* Nueva York: Chelsea (1955), Capítulo VII.

EJERCICIOS

12.6.1 Demuestre que la paridad de $Y_L^M(\theta, \varphi)$ es $(-1)^L$. Observe la desaparición de cualquier dependencia en M.

12.6.2 Demuestre que

$$Y_L^M(0, \varphi) = \left(\frac{2L+1}{4\pi}\right)^{1/2} \delta_{M0}.$$

12.6.3 En la teoría de Coulomb para la excitación del núcleo se encuentra $Y_L^M(\pi/2, 0)$. Demuestre que

$$Y_L^M\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{2L+1}{4\pi}\right)^{1/2} \frac{[(L-M)!(L+M)!]^{1/2}}{(L-M)!!(L+M)!!} (-1)^{(L+M)/2} \text{ para } L+M \text{ par}$$

$$= 0 \text{ para } L+M \text{ impar}$$

Aquí $\quad (2n)!! = 2n(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2,$

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1.$$

12.6.4 (a) Exprese los elementos de un tensor de momento cuadripolo $x_i x_j$ como una combinación lineal de los armónicos esféricos Y_2^m e Y_0^0).
Nota. El tensor $x_i x_j$ *puede reducirse.* Y_0^0 indica la presencia de un componente escalar.

(b) El tensor de momento cuadripolo generalmente se define en la forma

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})\, \rho(\mathbf{r})\, d\tau,$$

con $\rho(\mathbf{r})$ la densidad de carga. Exprese los componentes de $(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})$ en términos de $r^2 Y_2^M$.

(c) ¿Cuál es el significado del término $-r^2\, \delta_{ij}$?
Sugerencia. Cf. Sección 3.4.

12.6.5 Las funciones acimutales ortogonales proporcionan una representación adecuada de la función delta de Dirac. Demuestre que

$$\delta(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

12.6.6 Derive la relación de cierre armónica esférica

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1)\, Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_1} \delta(\theta_1 - \theta_2)\, \delta(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$= \delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\, \delta(\varphi_1 - \varphi_2).$$

12.6.7 Los operadores de momento angular de la mecánica cuántica $L_x \pm iL_y$ están definidos por

$$L_x + iL_y = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_x - iL_y = -e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Demuestre que

(a) $(L_x + iL_y)\, Y_L^M(\theta, \varphi) = +\sqrt{(L-M)(L+M+1)}\; Y_L^{M+1}(\theta, \varphi)$

(b) $(L_x - iL_y)\, Y_L^M(\theta, \varphi) = +\sqrt{(L+M)(L-M+1)}\; Y_L^{M-1}(\theta, \varphi)$.

12.6.8 Con $L_\pm$ definida por

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \pm e^{\pm i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right],$$

demuestre que

(a) $Y_l^m = \sqrt{\dfrac{(l+m)!}{(2l)!\,(l-m)!}}\,(L_-)^{l-m} Y_l^l$,

(b) $Y_l^m = \sqrt{\dfrac{(l-m)!}{(2l)!\,(l+m)!}}\,(L_+)^{l+m} Y_l^{-l}$.

12.6.9 En algunas circunstancias es conveniente sustituir el exponencial imaginario del armónico esférico por el seno o el coseno. Morse y Feshbach definen

$$Y_{mn}^e = P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,$$
$$Y_{mn}^0 = P_n^m(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\, m\varphi,$$

en donde

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [Y_{mn}^{e\,o\,0}(\theta, \varphi)]^2 \,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi \begin{array}{l} = \dfrac{4\pi}{2(2n+1)}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots \\ = 4\pi \text{ para } n = 0 \ (Y_{00}^0 \text{ no existe}). \end{array}$$

Los armónicos esféricos frecuentemente se nombran de acuerdo con los modelos de sus regiones positiva y negativa en la superficie de la esfera, armónicos zonales para $m = 0$, armónicos sectoriales para $m = n$, y armónicos teserales para $0 < m < n$. Para Y_{mn}^e, $n = 4$, $m = 0, 2, 4$, indique en un diagrama de un hemisferio (un diagrama para cada armónico esférico) las regiones en donde el armónico esférico es positivo.

12.6.10 Una función $f(r, \theta, \varphi)$ se puede expresar en la forma de una serie de Laplace

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,\, m} a_{lm} r^l\, Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Con $\langle\ \rangle_{\text{esfera}}$ utilizado para representar un promedio sobre una esfera (centrada en el origen), demuestre que

$$\langle f(r, \theta, \varphi)\rangle_{\text{esfera}} = f(0, 0, 0).$$

12.7 Momento Angular y Operadores Sucesivos

Momento Angular Orbital. El concepto clásico del momento angular $\mathbf{L}_{\text{clásico}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ se presenta en la Sección 1.4 para introducir el producto vectorial. Siguiente a la representación de Schrödinger usual de la mecánica cuántica, el momento lineal clásico $\mathbf{p}$ se sustituye por el operador $-i\nabla$. El *operador* de momento angular de la mecánica cuántica se transforma en[1]

$$\mathbf{L}_{QM} = -i\mathbf{r} \times \nabla. \tag{12.152}$$

Esto se utiliza repetidamente en las Secciones 1.8, 1.9 y 2.4 para ilustrar los operadores diferenciales de vector. De acuerdo con el Ejercicio 1.8.6, los componentes del momento angular satisfacen una relación de conmutación

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k. \tag{12.153}$$

En donde ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita de la Sección 3.4. La suma con respecto al índice k queda implícita.

De acuerdo con los Ejercicios 2.4.10 y 2.4.11, se encuentra que

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{12.154}$$

en coordenadas polares esféricas. Siendo así

$$L_z Y_L^M(\theta, \varphi) = M Y_L^M(\theta, \varphi). \tag{12.155}$$

El operador diferencial correspondiente al cuadrado del momento angular

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{12.156}$$

se puede determinar a partir de

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = -(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot(\mathbf{r}\times\nabla) \tag{12.157}$$

lo cual es el tema de los Ejercicios 1.9.6 y 2.4.14 (b). A partir de estos, se encuentra que $\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}$ operando en el armónico esférico proporciona[2]

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}Y_L^M(\theta, \varphi) = -\left\{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}Y_L^M(\theta, \varphi), \tag{12.158}$$

o

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}Y_L^M(\theta, \varphi) = L(L+1)Y_L^M(\theta, \varphi). \tag{12.159}$$

Esto constituye el Ejercicio 8.2.3.

La Ec. 12.153 presenta las relaciones de conmutación básicas de los componentes correspondientes al momento angular de la mecánica cuántica. De hecho, dentro de la estructura de la mecánica cuántica, estas relaciones de conmutación *definen* el operador de momento angular. De

[1] Por simplicidad se ha eliminado $\hbar$. Esto significa que el momento angular se mide en unidades de $\hbar$.

[2] Además de las funciones de valor propio, la relación de $\mathbf{L}$ con las rotaciones de los sistemas coordenados y con las rotaciones de las funciones se examina en las Secciones 4.9-4.11.

acuerdo con la Ec. 12.155, el armónico esférico $Y_L^M(\theta, \varphi)$ es una función propia de L_z con el valor propio M. Finalmente, de acuerdo con la Ec. 12.159, $Y_L^M(\theta, \varphi)$ también es una función propia de $\mathbf{L}^2$ con el valor propio $L(L+1)$.

Procedimiento del Operador General. Además de la sustitución de $\mathbf{p}$ por $-i\nabla$, el análisis hasta ahora ha sido en términos de las matemáticas clásicas. Podemos comenzar de nuevo con un análisis de la mecánica cuántica más típico.

1. Se supone un operador hermitiano $\mathbf{J}$ cuyos componentes satisfacen las relaciones de conmutación

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k. \tag{12.160}$$

De otro modo, $\mathbf{J}$ es arbitrario.

2. Se supone que ψ_{JM} es simultáneamente una función propia normalizada (o vector propio) de J_z con el valor propio M, y una función propia de $\mathbf{J}^2$ con el valor propio $J(J+1)$:[1]

$$J_z\psi_{JM} = M\psi_{JM}, \tag{12.161}$$

$$\mathbf{J}^2\psi_{JM} = J(J+1)\psi_{JM}. \tag{12.162}$$

De otro modo, se supone que ψ_{JM} es desconocida.

Consideremos ahora las conclusiones generales que se pueden establecer. Luego, dejaremos que los operadores generales J_x, J_y y J_z se transformen en los operadores del momento angular *orbital* L_x, L_y, y L_z. ψ_{JM} se transformará en una función de los ángulos θ y φ de las coordenadas polares esféricas. Procederemos a derivar su forma, en términos de los polinomios de Legendre y los operadores diferenciales, e identificar la misma con el armónico esférico $Y_L^M(\theta, \varphi)$. Esto ilustrará la generalidad y poderío de las técnicas del operador, particularmente el uso de los *operadores sucesivos*. También hará evidente la base del factor de fase de Condon-Shortley, la asociación de $(-1)^M$ con los armónicos esféricos de M positiva.

Los operadores sucesivos se definen como

$$\begin{aligned} J_+ &= J_x + iJ_y, \\ J_- &= J_x - iJ_y. \end{aligned} \tag{12.163}$$

En términos de estos operadores, $\mathbf{J}^2$ se puede restablecer en la forma

$$\mathbf{J}^2 = \tfrac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2. \tag{12.164}$$

De acuerdo con las relaciones de conmutación, Ec. 12.160, se encuentra

[1] El hecho de que ψ_{JM} es una función propia tanto de J_z como de $\mathbf{J}^2$ es una consecuencia de $[J_z, \mathbf{J}^2] = 0$.

$$[J_z, J_+] = +J_+, \qquad [J_z, J_-] = -J_-, \qquad [J_+, J_-] = 2J_z. \tag{12.165}$$

Ya que J_+ conmuta con $\mathbf{J}^2$ (Ejercicio 12.7.1),

$$\mathbf{J}^2(J_+\psi_{JM}) = J_+(\mathbf{J}^2\psi_{JM}) = J(J+1)(J_+\psi_{JM}). \tag{12.166}$$

En consecuencia, $J_+\psi_{JM}$ aún es una función propia de $\mathbf{J}^2$ con valor propio $J(J+1)$. De manera similar para $J_-\psi_{JM}$. Sin embargo, de acuerdo con la Ec. 12.165

$$J_zJ_+ = J_+(J_z + 1), \tag{12.167}$$

o

$$J_z(J_+\psi_{JM}) = J_+(J_z + 1)\psi_{JM} = (M+1)(J_+\psi_{JM}). \tag{12.168}$$

En consecuencia, $J_+\psi_{JM}$ aún es una función propia de J_z pero ahora con el valor propio $M + 1$. J_+ ha *incrementado* el valor propio en 1 y por lo tanto frecuentemente se denomina operador de *incremento*. De modo similar, J_- *decrece* el valor propio en 1 y así se denomina frecuentemente *operador decreciente*.

Ahora bien, ¿cuál es el efecto de permitir que primero opere J_+ y luego J_- en ψ_{JM}? La respuesta se deriva del hecho de expresar J_-J_+ (y J_+J_-) en términos de $\mathbf{J}^2$ y J_z. De acuerdo con las Ecs. 12.160 y 12.164

$$\begin{aligned} J_-J_+ &= \mathbf{J}^2 - J_z(J_z + 1), \\ J_+J_- &= \mathbf{J}^2 - J_z(J_z - 1). \end{aligned} \tag{12.169}$$

Luego, utilizando las Ecs. 12.161, 12.162 y 12.169

$$\begin{aligned} J_-J_+\psi_{JM} &= [J(J+1) - M(M+1)]\psi_{JM} = (J-M)(J+M+1)\psi_{JM}, \\ J_+J_-\psi_{JM} &= [J(J+1) - M(M-1)]\psi_{JM} = (J+M)(J-M+1)\psi_{JM}. \end{aligned} \tag{12.170}$$

Ahora, se multiplica por ψ^*_{JM} y se integra (sobre todos los ángulos para los armónicos esféricos). Ya que ψ_{JM} se ha supuesto normalizada,

$$\begin{aligned} \int \psi^*_{JM} J_- J_+ \psi_{JM}\, d\tau &= (J-M)(J+M+1) \geqslant 0, \\ \int \psi^*_{JM} J_+ J_- \psi_{JM}\, d\tau &= (J+M)(J-M+1) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{12.171}$$

La parte $\geqslant 0$ es digna de comentarse. En el lenguaje de la mecánica cuántica, J_+ y J_- son conjugados hermitianos,[1]

$$J_+^\dagger = J_-, \qquad J_-^\dagger = J_+. \tag{12.172}$$

[1] La conjugación hermitiana u operación *adjunta* se define para las matrices en la Sección 4.5 y para los operadores diferenciales (*reales*) en la Sección 9.1.

Ejemplos de estos los proporcionan las matrices de los Ejercicios 4.2.12 (spin de 1/2), 4.2.14 (spin de 1) y 4.2.16 (spin de 3/2). En consecuencia,

$$J_- J_+ = J_+^\dagger J_+, \qquad J_+ J_- = J_-^\dagger J_-, \tag{12.173}$$

y los valores esperados, Ec.12.171, deben ser positivos o cero.[1]

Para los operadores sucesivos de momento angular orbital, L_+ y L_-, las formas explícitas se definen en los Ejercicios 2.4.12 y 12.6.7. El lector puede demostrar (Ejercicio 12.7.2) que

$$\int Y_L^{M*} L_-(L_+ Y_L^M)\, d\Omega = \int (L_+ Y_L^M)^*(L_+ Y_L^M)\, d\Omega. \tag{12.174}$$

Esto constituye cierta clase de integración por partes (con el signo menos adicional en L_- cancelado justamente por el signo menos en la fórmula de integración por partes). De hecho, la igualdad se puede verificar con facilidad al evaluar cada lado de la Ec. 12.174 utilizando el Ejercicio 12.6.7.

De acuerdo con el lado derecho de la Ec. 12.174, es evidente que la parte $\geqslant 0$ en la Ec. 12.171 es válida. Con la parte $\geqslant 0$ justificada, debemos tener a M restringida al intervalo $-J \leqslant M \leqslant J$.

Ya que J_+ aumenta el valor propio de M a $M+1$, se vuelve a rotular la función propia $\psi_{J,M+1}$. La normalización la proporciona la Ec. 12.171 en la forma

$$J_+\psi_{JM} = \sqrt{(J-M)(J+M+1)}\,\psi_{J,M+1}, \tag{12.175}$$

considerando la raíz cuadrada positiva y *sin* introducir ningún factor de fase. Mediante los mismos argumentos,

$$J_-\psi_{JM} = \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\,\psi_{J,M-1}. \tag{12.176}$$

Tanto $\psi_{J,M+1}$ como $\psi_{J,M-1}$ permanecen normalizadas a la unidad. El cálculo explícito de estos resultados (utilizando operadores sucesivos *conocidos* y armónicos esféricos *conocidos*) es el tema del Ejercicio 12.6.7. En las Ecs. 12.175 y 12.176 se ha considerado la raíz cuadrada positiva. De este modo, la fase relativa de $\psi_{J,M\pm1}$ y ψ_{JM} se determina por medio de los operadores sucesivos.

La aplicación repetida de J_+ origina

$$(J_+)^n\psi_{JM} = C_{JMn}\psi_{J,M+n}. \tag{12.177}$$

Esta operación *debe* interrumpirse en $M' = M + n = J$, ya que de otra forma saltaría a $M' > J$ y se tendría una contradicción con la conclusión de la Ec. 12.171, $M \leqslant J$. De manera equivalente, se puede decir que independientemente de lo que sea $M_{\text{máx}}$, ya que $J_+\psi_{JM_{\text{máx}}} = 0$, el lado izquierdo de la Ec.

[1] Para una excelente descripción de los operadores adjuntos y el espacio de Hilbert, véase A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Capítulo 7, Nueva York: Wiley (1961).

12.175 es cero y, consecuentemente, el lado derecho es cero. Esto proporciona $M_{\text{máx}} = J$. Del mismo modo,

$$(J_-)^n \psi_{JM} = D_{JMn} \psi_{J,M-n} \tag{12.178}$$

debe ser finito en $M'' = M - n = -J$. De lo anterior se concluye primeramente que

$$J_+ \psi_{J,J} = 0, \qquad J_- \psi_{J,-J} = 0. \tag{12.179}$$

En segundo lugar, ya que M varía desde $+J$ hasta $-J$ en etapas unitarias, 2J *debe ser un número entero.* J es un número entero o la mitad de un número impar entero. Tal como se indica más adelante, el momento angular orbital se describe con J integral. Sin embargo, de acuerdo con los espines de algunas partículas fundamentales y algunos núcleos, se obtiene $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \cdots$. El momento angular se encuentra cuantificado, esencialmente como resultado de las relaciones de conmutación.

Operadores de Momento Angular. Orbital. Ahora regresaremos a los operadores de momento angular *orbital,* L_x, L_y y L_z. La Ec. 12.161 se transforma en

$$L_z \psi_{LM}(\theta, \varphi) = M \psi_{LM}(\theta, \varphi).$$

La forma explícita de L_z indica que $\psi_{LM}(\theta, \varphi)$ tiene dependencia en φ de $e^{iM\varphi}$— con M un número entero para mantener a ψ_{LM} de valor simple. Y cuando M es un número entero, entonces L también es un número entero.

Para determinar la dependencia en θ de $\psi_{LM}(\theta, \varphi)$, se procede en dos pasos principales: primeramente la determinación de $\psi_{LL}(\theta, \varphi)$, y en segundo lugar el desarrollo de $\psi_{LM}(\theta, \varphi)$ en términos de ψ_{LL} con la fase fija por ψ_{LO}.

Sea

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \Theta_{LM}(\theta) e^{iM\varphi}. \tag{12.180}$$

De acuerdo con la Ec. 12.179, utilizando la forma de L_+ proporcionada en los Ejercicios 2.4.12 y 12.6.7,

$$e^{i(L+1)\varphi} \left[\frac{d}{d\theta} - L \cot \theta \right] \Theta_{LL}(\theta) = 0, \tag{12.181}$$

y

$$\psi_{LL}(\theta, \varphi) = c_L \operatorname{sen}^L \theta e^{iL\varphi}. \tag{12.182}$$

Normalizando

$$c_L^* c_L \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2L+1} \theta \, d\theta \, d\varphi = 1. \tag{12.183}$$

El término θ integral se puede evaluar como una función beta (Ejercicio 10.4.9) y

$$|c_L| = \sqrt{\frac{(2L+1)!!}{4\pi(2L)!!}} = \frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}. \tag{12.184}$$

Esto completa la primera etapa o paso.

Para obtener ψ_{LM}, $M \neq \pm L$, se regresa a los operadores sucesivos. De acuerdo con las Ecs. 12.175 y 12.176 (J_+ sustituido por L_+ y J_- sustituido por L_-),

$$\begin{aligned}\psi_{LM}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}}\,(L_-)^{L-M}\psi_{LL}(\theta, \varphi),\\ \psi_{LM}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}}\,(L_+)^{L+M}\psi_{L,-L}(\theta, \varphi).\end{aligned} \tag{12.185}$$

Nuevamente, observe que las fases relativas se establecen por medio de los operadores sucesivos. L_+ y L_- operando $\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi}$ se pueden indicar en la forma

$$\begin{aligned}L_+\,\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= e^{i(M+1)\varphi}\left[\frac{d}{d\theta} - M\cot\theta\right]\Theta_{LM}(\theta)\\ &= -e^{i(M+1)\varphi}\operatorname{sen}^{1+M}\theta\,\frac{d}{d(\cos\theta)}\operatorname{sen}^{-M}\theta\,\Theta_{LM}(\theta),\end{aligned} \tag{12.186}$$

$$\begin{aligned}L_-\,\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= -e^{i(M-1)\varphi}\left[\frac{d}{d\theta} + M\cot\theta\right]\Theta_{LM}(\theta)\\ &= e^{i(M-1)\varphi}\operatorname{sen}^{1-M}\theta\,\frac{d}{d(\cos\theta)}\operatorname{sen}^{M}\theta\,\Theta_{LM}(\theta).\end{aligned}$$

Repitiendo estas operaciones n veces,

$$\begin{aligned}(L_+)^n\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= (-1)^n\,e^{i(M+n)\varphi}\operatorname{sen}^{n+M}\theta\,\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}\operatorname{sen}^{-M}\theta\,\Theta_{LM}(\theta),\\ (L_-)^n\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= e^{i(M-n)\varphi}\operatorname{sen}^{n-M}\theta\,\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}\operatorname{sen}^{M}\theta\,\Theta_{LM}(\theta).\end{aligned} \tag{12.187}$$

De acuerdo con la Ec. 12.185

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = c_L\sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}}\,e^{iM\varphi}\operatorname{sen}^{-M}\theta\,\frac{d^{L-M}}{d(\cos\theta)^{L-M}}\operatorname{sen}^{2L}\theta, \tag{12.188}$$

y para $M = -L$,

$$\begin{aligned}\psi_{L,-L}(\theta, \varphi) &= \frac{c_L}{(2L)!}\,e^{-iL\varphi}\operatorname{sen}^{L}\theta\,\frac{d^{2L}}{d(\cos\theta)^{2L}}\operatorname{sen}^{2L}\theta\\ &= (-1)^L c_L\operatorname{sen}^{L}\theta\,e^{-iL\varphi}.\end{aligned} \tag{12.189}$$

Note la fase característica $(-1)^L$ de $\psi_{L,-L}$ relativa a $\psi_{L,L}$. Este término $(-1)^L$ interviene a partir de

$$\operatorname{sen}^{2L}\theta = (1-x^2)^L = (-1)^L(x^2-1)^L. \tag{12.190}$$

Combinando las Ecs. 12.185, 12.187 y 12.189,

$$\psi_{LM}(\theta,\varphi) =$$

$$(-1)^L c_L \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}}(-1)^{L+M}e^{iM\varphi}\operatorname{sen}^M\theta\,\frac{d^{L+M}}{d(\cos\theta)^{L+M}}\operatorname{sen}^{2L}\theta. \tag{12.191}$$

Las Ecs. 12.188 y 12.191 concuerdan en cuanto a que

$$\psi_{L0}(\theta,\varphi) = c_L\frac{1}{\sqrt{(2L)!}}\,\frac{d^L}{(d\cos\theta)^L}\operatorname{sen}^{2L}\theta. \tag{12.192}$$

Utilizando la fórmula de Rodrigues, Ec. 12.65,

$$\begin{aligned}\psi_{L0}(\theta,\varphi) &= (-1)^L c_L\frac{2^L L!}{\sqrt{(2L)!}}P_L(\cos\theta)\\ &= (-1)^L\frac{c_L}{|c_L|}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\,P_L(\cos\theta).\end{aligned} \tag{12.193}$$

La última igualdad se obtiene de la Ec. 12.184. Ahora habremos de requerir que $\psi_{L0}(0,0)$ sea real y positiva. En consecuencia,

$$c_L = (-1)^L|c_L| = (-1)^L\frac{\sqrt{(2L)!}}{2^2L!}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}. \tag{12.194}$$

Con $(-1)^L c_L/|c_L| = 1$, $\psi_{L0}(\theta,\varphi)$ en la Ec. 12.193 se puede identificar con el armónico esférico $Y_L^0(\theta,\varphi)$ de la Sección 12.6.

Cuando se sustituye $(-1)^L c_L$ en la Ec. 12.191

$$\begin{aligned}\psi_{LM}(\theta,\varphi) &= \frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}}(-1)^{L+M}\\ &\quad\cdot e^{iM\varphi}\operatorname{sen}^M\theta\,\frac{d^{L+M}}{d(\cos\theta)^{L+M}}\operatorname{sen}^{2L}\theta\\ &= \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(L-M)!}{(L+M)!}}\,e^{iM\varphi}(-1)^M\\ &\quad\cdot\left\{\frac{1}{2^L L!}(1-x^2)^{M/2}\frac{d^{L+M}}{dx^{L+M}}(x^2-1)^L\right\}, \qquad x=\cos\theta,\quad M\geqslant 0.\end{aligned} \tag{12.195}$$

La expresión en el paréntesis se identifica como la función de Legendre asociada (Ec. 12.147) y se tiene

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = Y_L^M(\theta, \varphi) = (-1)^M \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi} \cdot \frac{(L-M)!}{(L+M)!}} \tag{12.196}$$

$$\cdot P_L^M(\cos\theta) e^{iM\varphi}, \qquad M \geqslant 0,$$

lo cual concuerda completamente con la Sección 12.6. Luego, mediante la Ec. 12.84*a*, Y_L^M para un subíndice negativo está definido por

$$Y_L^{-M}(\theta, \varphi) = (-1)^M Y_L^{M*}(\theta, \varphi). \tag{12.197}$$

Las funciones propias de momento angular $\psi_{LM}(\theta, \varphi)$ se identifican con los armónicos esféricos. El factor de fase $(-1)^M$ se asocia con los valores positivos de M y se observa que es una consecuencia de los operadores sucesivos.

Nuestro desarrollo de los armónicos esféricos aquí puede considerarse como una porción del álgebra de Lie —relacionada con la teoría de los grupos— Sección 4.9.

EJERCICIOS

12.7.1 Demuestre que

(a) $[J_+, \mathbf{J}^2] = 0$,

(b) $[J_-, \mathbf{J}^2] = 0$.

12.7.2 Utilizando las formas conocidas de L_+ y L_- (Ejercicios 2.4.12 y 12.6.7), demuestre que

$$\int Y_L^{M*} L_-(L_+ Y_L^M)\, d\Omega = \int (L_+ Y_L^M)^*(L_+ Y_L^M)\, d\Omega.$$

12.7.3 Derive las relaciones

(a) $\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \sqrt{\dfrac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}}\,(L_-)^{L-M}\psi_{LL}(\theta, \varphi)$,

(b) $\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \sqrt{\dfrac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}}\,(L_+)^{L+M}\psi_{L,-L}(\theta, \varphi)$.

12.7.4 Derive las ecuaciones de operador múltiple

(a) $(L_+)^n\, \Theta_{LM}(\theta)\, e^{iM\varphi} = (-1)^n e^{i(M+n)\varphi} \operatorname{sen}^{n+M}\theta \dfrac{d^n}{d(\cos\theta)^n} \operatorname{sen}^{-M}\theta\, \Theta_{LM}(\theta)$,

(b) $(L_-)^n\, \Theta_{LM}(\theta)\, e^{iM\varphi} = e^{i(M-n)\varphi} \operatorname{sen}^{n-M}\theta \dfrac{d^n}{d(\cos\theta)^n} \operatorname{sen}^M\theta\, \Theta_{LM}(\theta).$

12.7.5 Demuestre, utilizando $(L_-)^n$, que

$$Y_L^{-M}(\theta, \varphi) = (-1)^M\, Y_L^{M*}(\theta, \varphi).$$

12.7.6 Verifique mediante el cálculo explícito que

(a) $L_+\, Y_1^0(\theta, \varphi) = -\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi} = \sqrt{2}\, Y_1^1(\theta, \varphi),$

(b) $L_-\, Y_1^0(\theta, \varphi) = +\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi} = \sqrt{2}\, Y_1^{-1}(\theta, \varphi).$

Estos signos (fase de Condon-Shortley) son una consecuencia de los operadores sucesivos, L_+ y L_-.

12.8 El Teorema de Adición para los Armónicos Esféricos

Identidad Trigonométrica. En la siguiente descripción, (θ_1, φ_1) y (θ_2, φ_2) designan dos direcciones diferentes en el sistema coordenado esférico, separadas por el ángulo γ. Estos ángulos satisfacen la identidad trigonométrica

$$\cos\gamma = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{12.198}$$

lo cual probablemente se demuestra con mayor facilidad mediante los métodos vectoriales (cf. Capítulo 1).

Siendo así, el teorema de adición asegura que

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} (-1)^m\, Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)\, Y_n^{-m}(\theta_2, \varphi_2) \tag{12.199}$$

o de manera equivalente

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) Y_n^{m*}(\theta_2, \varphi_2).^1 \tag{12.200}$$

En términos de las funciones de Legendre asociadas, el teorema de la adición es

$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta_1)\, P_n(\cos\theta_2)$

[1] El asterisco puede quedar en *cualquier* armónico esférico.

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_1)\, P_n^m(\cos\theta_2) \cos m(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (12.201)$$

La Ec. 12.198 constituye un caso especial de la Ec. 12.201.

Derivación del Teorema de la Adición. Ahora habremos de derivar la Ec. 12.200. Sea $g(\theta, \varphi)$ la función que puede desarrollarse en una serie de Laplace

$$\begin{aligned} g(\theta_1, \varphi_1) &= Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) \qquad \text{relativo a } x_1, y_1, z_1 \\ &= \sum_{m=-n}^{n} a_{nm} Y_n^m(\gamma, \psi) \qquad \text{relativo a } x_2, y_2, z_2. \end{aligned} \qquad (12.202)$$

De hecho, la selección del 0 para el ángulo acimutal ψ es irrelevante. A $\gamma = 0$, se tiene

$$g(\theta_1, \varphi_1)\,|_{\gamma=0} = a_{n0} \left(\frac{2n+1}{4\pi} \right)^{1/2} \qquad (12.203)$$

ya que $P_n(1) = 1$, mientras que $P_n^m(1) = 0$ $(m \neq 0)$. Multiplicando la Ec. (12.202) por $Y_n^{0*}(\gamma, \psi)$ e integrando sobre la esfera, se obtiene

$$\int g(\theta_1, \varphi_1) Y_n^{0*}(\gamma, \psi)\, d\Omega_{\gamma,\psi} = a_{n0}. \qquad (12.204)$$

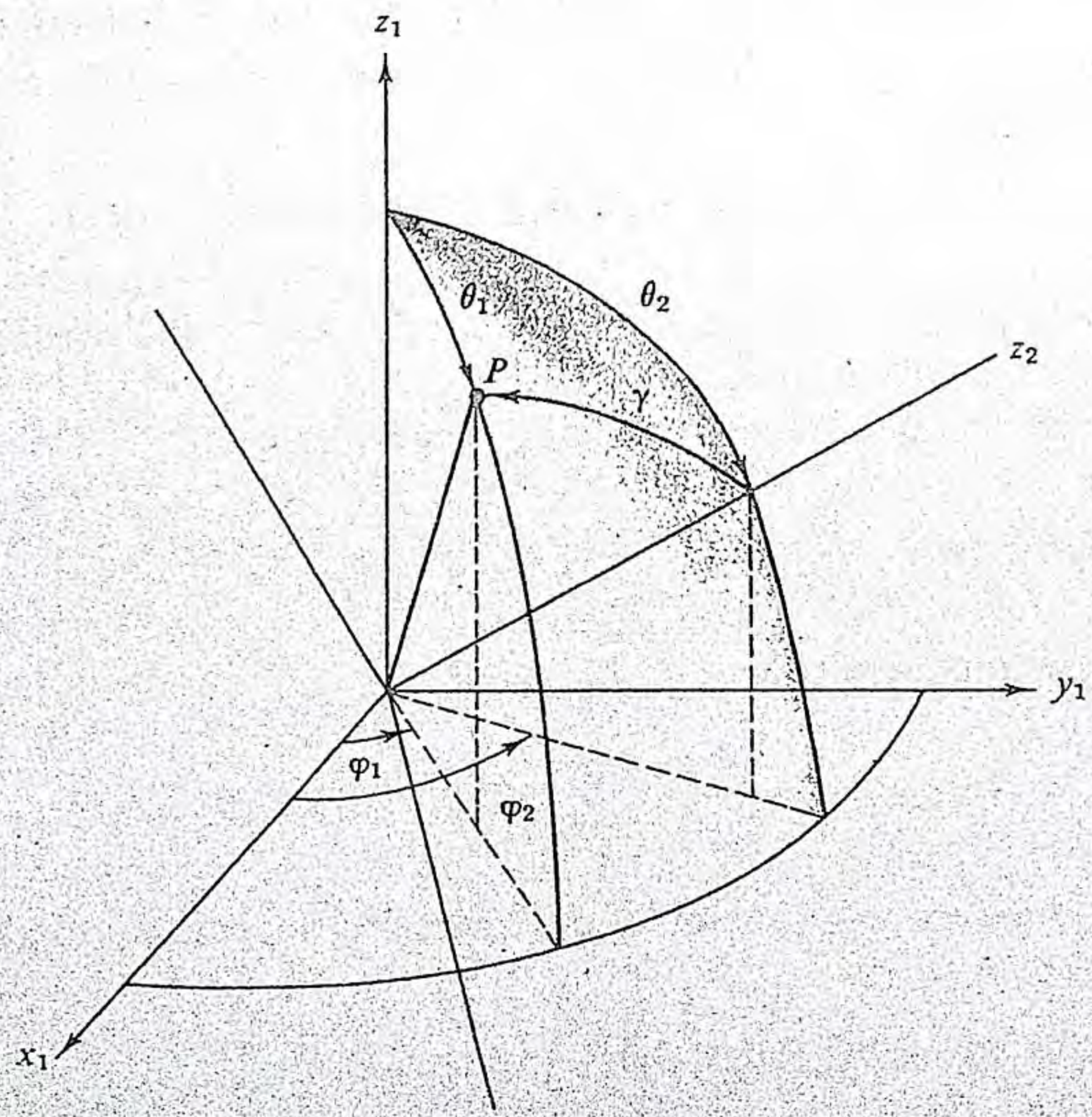


Fig. 12.15

Ahora, utilizando la Ec. 12.202, se puede volver a establecer la Ec. 12.204 en la forma

$$\int Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) Y_n^{0*}(\gamma, \psi)\, d\Omega = a_{n0}. \tag{12.205}$$

Del mismo modo que para la Ec. 12.202 se supone que $P_n(\cos\gamma)$ tiene un desarrollo de la forma

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=-n}^{n} b_{nm}\, Y_n^m(\theta_1, \varphi_1), \tag{12.206}$$

en donde b_{nm} evidentemente, dependerá de θ_2, φ_2, es decir de la orientación del eje z_2. Multiplicando por $Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)$ integrando con respecto a θ_1 y φ_1 sobre la esfera, se tiene

$$\int P_n(\cos\gamma) Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, d\Omega_{\theta_1, \varphi_1} = b_{nm}. \tag{12.207}$$

En términos de armónicos esféricos, la Ec. 12.207 se transforma en

$$\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)^{1/2} \int Y_n^0(\gamma, \psi) Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, d\Omega = b_{nm}. \tag{12.208}$$

Observe que los subíndices han sido eliminados del elemento de ángulo sólido $d\Omega$. Ya que el intervalo de integración es sobre todos los ángulos sólidos, la selección del eje polar es irrelevante. Siendo así, mediante la comparación de las Ecs. 12.205 y 12.208

$$\begin{aligned} b_{nm}^* &= a_{n0}\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)^{1/2} \\ &= \frac{4\pi}{2n+1}\, g(\theta_1, \varphi_1)\big|_{\gamma=0} \quad \text{según la Ec. 12.203} \\ &= \frac{4\pi}{2n+1}\, Y_n^m(\theta_2, \varphi_2) \quad \text{según la Ec. 12.202.} \end{aligned} \tag{12.209}$$

El cambio de subíndices ocurre debido a que

$$\begin{matrix} \theta_1 \to \theta_2 \\ \varphi_1 \to \varphi_2 \end{matrix} \quad \text{para} \quad \gamma \to 0.$$

Sustituyendo de nuevo en la Ec. 12.206 se obtiene la Ec. 12.200, originando así el teorema de la adición.

El lector que ya conoce la teoría de grupos podrá encontrar una demostración bastante más elegante de la Ec. 12.200 mediante el uso del grupo de rotación.[1] Esto constituye el Ejercicio 4.9.10.

[1] Cf. M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*. Nueva York: Wiley (1957).

Una de las aplicaciones del teorema de la adición se tiene en la construcción de la función de Green para la ecuación de Laplace tridimensional en coordenadas polares esféricas. Si la fuente se encuentra localizada en el eje polar en el punto $(r = a, \theta = 0, \varphi = 0)$, entonces mediante la Ec. 12.4

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{k}a|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{a^n}{r^{n+1}}, \qquad r > a$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{a^{n+1}}, \qquad r < a \tag{12.210}$$

Haciendo girar el sistema coordenado para situar la fuente en (a, θ_2, φ_2) y el punto de observación en (r, θ_1, φ_1), se obtiene

$$G(r, \theta_1, \varphi_1, a, \theta_2, \varphi_2) = \frac{1}{R}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)\frac{a^n}{r^{n+1}},$$

$$r > a,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)\frac{r^n}{a^{n+1}},$$

$$r < a. \tag{12.211}$$

En la Sección 16.6 se invierte este argumento para proporcionar otra derivación del teorema de la adición polinomial de Legendre.

EJERCICIOS

12.8.1 Al demostrar el teorema de la adición se supuso que $Y_n^k(\theta_1, \varphi_1)$ podría desarrollarse en una serie de $Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)$ en que m varía desde $-n$ hasta $+n$ pero manteniendo fija a n. ¿Cuáles argumentos puede usted establecer para justificar la suma tan solo sobre el índice superior m y *no* sobre el índice inferior n? *Sugerencias.* Una posibilidad es la de examinar la homogeneidad de los términos Y_n^m, es decir Y_n^m se puede expresar completamente en términos de la forma $\cos^{n-p}\theta \operatorname{sen}^p\theta$ o $x^{n-p-s}y^p z^s/r^n$. Otra posibilidad consiste en examinar el comportamiento de la ecuación de Legendre $[\nabla^2 + n(n+1)/r^2]\, P_n(\cos\theta) = 0$ bajo condiciones de rotación del sistema coordenado.

12.8.2 Un electrón atómico con el momento angular L y el número cuántico magnético M tiene la función de onda

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f(r)\, Y_L^M(\theta, \varphi).$$

Demuestre que la suma de las densidades electrónicas en una cubierta completa determinada es simétrica esféricamente, es decir $\sum_{M=-L}^{L} \psi^*(r, \theta, \varphi)\, \psi(r, \theta, \varphi)$ es independiente de θ y φ.

12.8.3 El potencial de un electrón en el punto $\mathbf{r}_e$ en el campo de Z protones a $\mathbf{r}_p$ es

$$\varphi = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{p=1}^{Z} \frac{1}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|}.$$

Demuestre que esto puede establecerse en la forma

$$\varphi = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} \sum_{p=1}^{Z} \sum_{L,M} \left(\frac{r_p}{r_e}\right)^L \frac{4\pi}{2L+1}\, Y_L^{M*}(\theta_p, \varphi_p)\, Y_L^M(\theta_e, \varphi_e),$$

en donde $r_e > r_p$. ¿Cómo debe indicarse φ para $r_e < r_p$?

12.8.4 Dos protones se encuentran distribuidos *uniformemente* dentro del mismo volumen esférico. Si las coordenadas de un elemento de carga son $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ y las coordenadas de otro son $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ y r_{12} es la distancia entre ambos, el elemento de la energía de repulsión estará dado por

$$d\psi = \rho^2 \frac{dv_1\, dv_2}{r_{12}} = \rho^2 \frac{r_1^2\, dr_1 \operatorname{sen}\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1\, r_2^2\, dr_2 \operatorname{sen}\theta_2\, d\theta_2\, d\varphi_2}{r_{12}}$$

Aquí $\rho = \dfrac{\text{carga}}{\text{volumen}} = \dfrac{3e}{4\pi R^3}$, densidad de carga,

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\gamma.$$

Calcule la energía electrostática total (de repulsión) de los dos protones. Este cálculo se utiliza para definir la diferencia de masa en los núcleos "a imagen de espejo", tal como O^{15} y N^{15}.

Respuesta. Para $r_2 > r_1$ $\quad \dfrac{3}{5}\dfrac{e^2}{R}$

$r_2 < r_1$ $\quad \dfrac{3}{5}\dfrac{e^2}{R}$

$\Big\}\ \dfrac{6}{5}\dfrac{e^2}{R}$ (total).

Esto representa el *doble* de lo requerido para crear una esfera cargada uniformemente debido a que se tienen dos cargas de nube separadas y *no* una carga que interactúa consigo misma (con la permutación de los pares *sin* considerar).

12.8.5 Cada uno de los dos electrones 1*s* en el helio se describe por la función de onda hidrogénica

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{Z^3}{\pi a_0^3}\right)^{1/2} e^{-Zr/a_0}$$

en ausencia del otro electrón. Aquí, Z, el número atómico, es 2. El símbolo a_0 es el radio de Bohr, $\hbar^2/me^2$. Encuentre la energía potencial mutual de los dos electrones definida por

$$\int \psi^*(\mathbf{r}_1)\psi^*(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{r_{12}} \psi(\mathbf{r}_1)\psi(\mathbf{r}_2)\, d^3r_1\, d^3r_2.$$

Respuesta. $\dfrac{5e^2Z}{8a_0}$.

Nota. $d^3r_1 = r_1^2 dr_1 \operatorname{sen}\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$,
$r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

12.8.6 La probabilidad de encontrar un electrón de hidrógeno 1*s* en un elemento de volumen $r^2\,dr\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi$ es

$$\frac{1}{\pi a_0^3}\exp\left[-2r/a_0\right]r^2\,dr\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Encuentre el potencial electrostático correspondiente. Calcule el potencial a partir de

$$V(\mathbf{r}_1)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{r_{12}}\,d^3r_2$$

con $\mathbf{r}_1$ *no* en el eje z. Desarrolle r_{12}. Aplique el teorema de la adición polinomial de Legendre y demuestre que la dependencia angular de $V(\mathbf{r}_1)$ desaparece.

Respuesta. $V(\mathbf{r}_1)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{1}{2r_1}\gamma\left(3,\dfrac{2r_1}{a_0}\right)+\dfrac{1}{a_0}\Gamma\left(2,\dfrac{2r_1}{a_0}\right)\right\}.$

12.8.7 Un electrón de hidrógeno en la órbita 2*p* tiene la distribución de carga

$$\rho=\frac{q}{64\pi a_0^5}r^2e^{-r/a_0}\,\text{sen}^2\,\theta,$$

en donde a_0 es el radio de Bohr, $\hbar^2/me^2$. Encuentre el potencial electrostático correspondiente a esta distribución de carga.

12.8.8 La densidad de corriente eléctrica producida por un electrón 2*p* en un átomo de hidrógeno es

$$\mathbf{J}=\varphi_0\frac{q\hbar}{32ma_0^5}e^{-r/a_0}\,r\,\text{sen}\,\theta.$$

Utilizando

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}d^3r_2$$

encuentre el potencial de vector magnético producido por este electrón de hidrógeno. *Sugerencia.* Resuelva en los componentes cartesianos. Utilice el teorema de la adición para eliminar γ, el ángulo incluido entre $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$.

12.8.9 (a) Cómo una serie de Laplace y como ejemplos de la Ec. 9.80 (ahora con las funciones complejas), demuestre que

$$\delta(\Omega_1-\Omega_2)=\sum_{n,m}Y_n^{m*}(\theta_2,\varphi_2)Y_n^m(\theta_1,\varphi_1).$$

(b) Demuestre también que esta *misma* función delta de Dirac puede establecerse en la forma

$$\delta(\Omega_1-\Omega_2)=\sum_n\frac{2n+1}{4\pi}P_n(\cos\gamma).$$

Ahora, si usted puede justificar igualar las sumas sobre *n término por término*, se tendrá una derivación alternativa del teorema de la adición del armónico esférico.

12.9 Integrales del Producto de Tres Armónicos Esféricos

En la mecánica cuántica, frecuentemente se encuentran integrales de la forma general

$$\int Y_{L_1}^{M_1*} Y_{L_2}^{M_2} Y_{L_3}^{M_3}\, d\Omega \quad \text{o} \quad \int Y_{L_1}^{M_1*} P_{L_2} Y_{L_3}^{M_3}\, d\Omega,$$

en donde la integración es con respecto a todos los ángulos sólidos. El primer factor en el *integrando* puede proceder de la función de onda del estado final y el tercer factor puede proceder de un estado inicial, mientras que el factor intermedio puede representar un operador que se pretende evaluar o cuyo "elemento de matriz" se desea determinar.

Mediante el uso de los métodos de grupos teóricos, como en la teoría cuántica del momento angular, es posible establecer una expresión general para las formas enlistadas. El análisis involucra la adición vectorial o los coeficientes de Clebsch-Gordan, que ya han sido tabulados. Aparecen tres restricciones generales.[1](1) La integral desaparece a menos de que la suma *vectorial* de las L (momento angular) sea cero, $|L_1 - L_3| \leqslant L_2 \leqslant L_1 + L_3$. (2) La integral desaparece a menos de que $M_2 + M_3 = M_1$.En este caso se tiene el fundamento teórico del modelo vectorial de la espectroscopia atómica. (3) Finalmente, la integral desaparece a menos de que el producto $Y_{L_1}^{M_1*}\, Y_{L_2}^{M_2}\, Y_{L_3}^{M_3}$ sea par, es decir a menos de que $M_1 + M_2 + M_3 + L_1 + L_2 + L_3$ sea un número entero par. Esto constituye una ley de la conservación de la paridad.

Los detalles de este procedimiento general y poderoso se pueden encontrar en las referencias. El lector habrá de notar que los coeficientes de suma vectorial se desarrollan en términos de la convención de fase de Condon-Shortley en que $(-1)^m$ de la Ec. 12.149 se asocia con la m positiva.

Existe la posibilidad de evaluar muchas de las integrales de ocurrencia común de esta forma por medio de las técnicas ya establecidas. La integración sobre el acimutal se puede realizar mediante inspección

$$\int_0^{2\pi} e^{-iM_1\varphi} e^{iM_2\varphi} e^{iM_3\varphi}\, d\varphi = 2\pi\delta_{M_2+M_3-M_1,0}\,. \tag{12.212}$$

Físicamente esto corresponde a la conservación del componente z del momento angular.

[1] E. U. Condon y G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*. Cambridge: Cambridge University Press (1951). M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*. Nueva York: Wiley (1957). A. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton, Nueva Jersey: Princeton University Press (1957). E. P. Wigner, *Group Theory and Its Applications to Quantum Mechanics* (traducido al inglés por J. J. Griffin). Nueva York: Academic Press (1959).

Aplicación de las Relaciones de Recurrencia. El análisis de la Tabla 12.4 demostrará que la dependencia en θ de $Y_{L_2}^{M_2}$, o sea, $P_{L_2}^{M_2}(\theta)$, se puede expresar en términos de cos θ y sen θ. Sin embargo, un factor de cos θ y sen θ se puede combinar con el factor de $Y_{L_3}^{M_3}$ mediante el uso de las relaciones de recurrencia polinomiales de Legendre asociadas. Por ejemplo, a partir de las Ecs. 12.88 y 12.89 se obtiene

$$\cos\theta Y_L^M = +\left[\frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} Y_{L+1}^M + \left[\frac{(L-M)(L+M)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} Y_{L-1}^M \tag{12.213}$$

$$e^{i\varphi}\operatorname{sen}\theta Y_L^M = -\left[\frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} Y_{L+1}^{M+1} + \left[\frac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} Y_{L-1}^{M+1} \tag{12.214}$$

$$e^{-i\varphi}\operatorname{sen}\theta Y_L^M = +\left[\frac{(L-M+1)(L-M+2)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} Y_{L+1}^{M-1} - \left[\frac{(L+M)(L+M-1)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} Y_{L-1}^{M-1} \tag{12.215}$$

Utilizando estas ecuaciones, se obtiene

$$\int Y_{L_1}^{M_1*}\cos\theta Y_L^M\, d\Omega = \left[\frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} \delta_{M_1,M}\,\delta_{L_1,L+1} + \left[\frac{(L-M)(L+M)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} \delta_{M_1,M}\delta_{L_1,L-1}. \tag{12.216}$$

La presencia de la delta de Kronecker $(L_1, L \pm 1)$ constituye un aspecto de la conservación del momento angular. Físicamente, esta integral se origina de la consideración de la radiación electromagnética atómica ordinaria (dipolo eléctrico). Da lugar a la regla de selección ya conocida de que las transiciones a un nivel atómico con el número cuántico de momento angular orbital L_1 pueden originarse solamente de los niveles atómicos con números cuánticos $L_1 - 1$ o $L_1 + 1$. La aplicación a expresiones tales como

$$\text{momento cuadripolo} \sim \int Y_L^{M*} P_2(\cos\theta) Y_L^M\, d\Omega$$

es más involucrada pero es perfectamente directa.

Coeficientes de Slater. Las integrales del producto de tres armónicos esféricos también se presentan en la evaluación de la energía de interacción entre dos electrones atómicos. Se tienen integrales de la forma

$$\int \psi_\alpha^*(1)\, \psi_\alpha(1) \frac{1}{r_{12}} \psi_\beta^*(2)\, \psi_\beta(2)\, d\tau_1\, d\tau_2 .$$

Si se desarrolla $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ por medio del desarrollo de la función generadora, se desarrolla el término $P_k(\cos\gamma)$ resultante por medio del teorema de la adición y se supone que la dependencia angular de las funciones de onda $\psi(1)$ y $\psi(2)$ son $Y_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \varphi_1)$ y $Y_{l_2}^{m_2}(\theta_2, \varphi_2)$, respectivamente, la integral anterior se separa dando lugar a la integral radial y *dos* integrales de la forma

$$a_k'(l_1, m_1) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \int Y_{l_1}^{m_1 *} Y_k^0 Y_{l_1}^{m_1}\, d\Omega. \tag{12.217}$$

Mediante el intercambio de términos en la función de onda total $[\psi_\alpha(1) \to \psi_\alpha(2),\ \psi_\beta(2) \to \psi_\beta(1)]$ se obtienen más integrales de la forma

$$b_k'(l_1, m_1, l_2, m_2) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \int Y_{l_2}^{m_2 *} Y_k^{m_2 - m_1} Y_{l_1}^{m_1}\, d\Omega. \tag{12.218}$$

Las combinaciones necesarias para el cómputo de las funciones de onda atómicas son

$$a_k(l_1, m_1, l_2, m_2) = a_k'(l_1, m_1) \cdot a_k'(l_2, m_2) \tag{12.219}$$

$$b_k(l_1, m_1, l_2, m_2) = [b_k'(l_1, m_1, l_2, m_2)]^2. \tag{12.220}$$

Estas a_k y b_k, que frecuentemente se denominan coeficientes de Slater, se tabulan en los textos que tratan el tema de la estructura atómica.[1]

EJERCICIOS

12.9.1 Verifique

(a) $a_0'(l, m) = 1$,

(b) $a_1'(1, m) = 0$,

[1] D. R. Hartree, *The Calculation of Atomic Structures*, Nueva York: Wiley (1953), Capítulo 3. Condon-Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, §9[6], Tablas 1[6], 2[6].

(c) $a_2'(0,0) = 0$,

(d) $a_2'(1,0) = \frac{2}{5}$,

(e) $a_2'(1,\pm 1) = -\frac{1}{5}$.

12.9.2 Verifique

(a) $\int Y_L^M Y_0^0 Y_L^{M*}\, d\Omega = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$,

(b) $\int Y_L^M Y_1^0 Y_{L+1}^{M*}\, d\Omega = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\sqrt{\dfrac{(L+M+1)(L-M+1)}{(2L+1)(2L+3)}}$,

(c) $\int Y_L^M Y_1^1 Y_{L+1}^{M+1*}\, d\Omega = \sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sqrt{\dfrac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)}}$,

(d) $\int Y_L^M Y_1^1 Y_{L-1}^{M+1*}\, d\Omega = -\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sqrt{\dfrac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)}}$.

Estas integrales han sido utilizadas en la investigación de la correlación angular de los electrones de conversión internos.

12.9.3 Demuestre que

$$\text{(a)}\quad \int_{-1}^{1} x\, P_L(x)\, P_N(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{2(L+1)}{(2L+1)(2L+3)}, & N = L+1, \\[2ex] \dfrac{2L}{(2L-1)(2L+1)}, & N = L-1. \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \int_{-1}^{1} x^2\, P_L(x)\, P_N(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{2(L+1)(L+2)}{(2L+1)(2L+3)(2L+5)}, & N = L+2, \\[2ex] \dfrac{2(2L^2+2L-1)}{(2L-1)(2L+1)(2L+3)}, & N = L, \\[2ex] \dfrac{2L(L-1)}{(2L-3)(2L-1)(2L+1)}, & N = L-2. \end{cases}$$

12.10 Funciones de Legendre de Segunda Clase, $Q_n(z)$

En todo el análisis realizado hasta ahora en este capítulo hemos tratado con una solución de la ecuación de Legendre, la solución $P_n(\cos\theta)$, la cual es regular (finita) en los dos puntos singulares de la ecuación diferencial, $\cos\theta = \pm 1$. De acuerdo con la teoría general de las ecuaciones diferenciales, se conoce la existencia de una segunda solución. Desarrollaremos esta segunda solución, Q_n, por medio de una solución en serie de la ecuación de Legendre. Posteriormente se obtendrá una forma cerrada.

Soluciones en Serie de la Ecuación de Legendre. Para resolver

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0 \tag{12.221}$$

se procede como en el Capítulo 8 permitiendo que

$$y=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}\,^{1}, \tag{12.222}$$

con

$$y'=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)a_\lambda x^{k+\lambda-1}, \tag{12.223}$$

$$y''=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)a_\lambda x^{k+\lambda-2}. \tag{12.224}$$

La sustitución en la ecuación diferencial original proporciona

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)a_\lambda x^{k+\lambda-2} + \sum_{\lambda=0}^{\infty}[n(n+1)-2(k+\lambda)-(k+\lambda)(k+\lambda-1)]a_\lambda x^{k+\lambda}=0. \tag{12.225}$$

La *ecuación indicial* es

$$k(k-1)=0, \tag{12.226}$$

con las soluciones $k=0, 1$. Primero se ensaya $k=0$ con $a_0=1$, $a_1=0$. Luego, la serie se describe por medio de la relación de recurrencia

$$(\lambda+2)(\lambda+1)a_{\lambda+2}+[n(n+1)-2\lambda-\lambda(\lambda-1)]a_\lambda=0, \tag{12.227}$$

lo cual se transforma en

$$a_{\lambda+2}=-\frac{(n+\lambda+1)(n-\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}a_\lambda. \tag{12.228}$$

Rotulando esta serie como p_n, se tiene

$$p_n(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\cdots \tag{12.229}$$

La segunda solución de la ecuación indicial, $k=1$, con $a_0=1, a_1=0$, origina la relación de recurrencia

$$a_{\lambda+2}=-\frac{(n+\lambda+2)(n-\lambda-1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)}a_\lambda. \tag{12.230}$$

Rotulando esta serie como q_n, se obtiene

[1] Observe que x se puede sustituir por la variable compleja z.

$$q_n(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots \tag{12.231}$$

Siendo así, la solución general de la Ec. 12.221 es

$$y_n(x) = A_n\, p_n(x) + B_n\, q_n(x), \tag{12.232}$$

considerando que se tiene convergencia.

Para n un número entero positivo par (o cero), la serie p_n es finita y mediante la selección adecuada del factor de normalización

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n[(n/2)!]^2}\, p_n(x) \\ &= (-1)^s \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}\, p_{2s}(x) = (-1)^s \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}\, p_{2s}(x), \end{aligned}$$

$$\text{para } n = 2s. \tag{12.233}$$

Si n es un número entero positivo impar, q_n es finita después de cierto número de términos, y se puede indicar

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (-1)^{(n-1)/2} \frac{n!}{2^{n-1}\{[(n-1)/2]!\}^2}\, q_n(x) \\ &= (-1)^s \frac{(2s+1)!}{2^{2s}(s!)^2}\, q_{2s+1}(x) = (-1)^s \frac{(2s+1)!!}{(2s)!!}\, q_{2s+1}(x), \end{aligned}$$

$$\text{para } n = 2s+1. \tag{12.234}$$

Observe que estas expresiones son consistentes para todos los valores reales de x, $-\infty < x < \infty$, y para los valores complejos en el plano complejo finito. Las constantes que multiplican p_n y q_n se seleccionan de tal modo que se logre la concordancia de P_n con los polinomios de Legendre definidos por la función generadora.

Las Ecs. 12.229 y 12.231 aun se pueden utilizar con $n = \nu$, no un número entero, pero ahora la serie ya no es finita y el intervalo de convergencia se transforma en $-1 < x < 1$. Los puntos extremos, $x = \pm 1$ *no* se incluyen.

Algunas veces es conveniente invertir el orden de los términos en la serie. Esto puede realizarse al establecer

$$s = \frac{n}{2} - \lambda \quad \text{en la primera forma de } P_n(x), \quad n \text{ par},$$

$$s = \frac{n-1}{2} - \lambda \quad \text{en la segunda forma de } P_n(x), \quad n \text{ impar},$$

de modo que las Ecs. 12.233 y 12.234 se transformen en

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!} x^{n-2s}, \tag{12.235}$$

en donde los límites superiores $s = n/2$ (para n par) o $(n-1)/2$ (para n impar). Esto reproduce la Ec. 12.8 de la Sección 12.1, la cual se obtiene directamente de la función generadora. Esta concordancia con la Ec. 12.8 es el motivo de la selección particular para la normalización en las Ecs. 12.233 y 12.234.

De inmediato se puede determinar que para x muy grande

$$P_n(x) \to \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n. \tag{12.236}$$

Para su uso en la Sección 12.11, se requiere de P_n con un argumento imaginario puro. Si x en la Ec. 12.235 se sustituye por $i\zeta$, se tiene

$$P_n(i\zeta) = (-1)^{n/2} \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!} \zeta^{n-2s}. \tag{12.237}$$

$Q_n(x)$, **Funciones de Segunda Clase.** Es de hacerse notar que hemos utilizado solamente p_n para n par y q_n para n impar (debido a que son finitas para esta selección de n). Ahora podemos definir una segunda solución de la ecuación de Legendre mediante

$$Q_n(x) = (-1)^{n/2} \frac{[(n/2)!]^2 2^n}{n!} q_n(x) = (-1)^s \frac{(2s)!!}{(2s-1)!!} q_{2s}(x),$$

$$\text{para } n \text{ par}, \ n = 2s, \tag{12.238}$$

$$Q_n(x) = (-1)^{(n+1)/2} \frac{\{[(n-1)/2]!\}^2 2^{n-1}}{n!} p_n(x)$$

$$= (-1)^{s+1} \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!} p_{2s+1}(x),$$

$$\text{para } n \text{ impar}, \ n = 2s+1. \tag{12.239}$$

Esta selección de los factores de normalización obliga a que Q_n satisfaga las relaciones de recurrencia del mismo modo que P_n. Esto se puede verificar al sustituir las Ecs. 12.238 y 12.239 en las Ecs. 12.17 y 12.26. La inspección de las relaciones de recurrencia (serie) (Ecs. 12.228 y 12.230), es decir, mediante la prueba de la relación de Cauchy, demuestra que $Q_n(x)$ será convergente para $-1 < x < 1$. Si $|x| \geqslant 1$, la segunda solución será *divergente.*

Para desarrollar una segunda solución en el intervalo de $x^2 > 1$, se busca una solución de la Ec. 12.221 en la forma de una serie de potencias *descendente.* Sea

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{-\lambda} x^{k-\lambda} \tag{12.240}$$

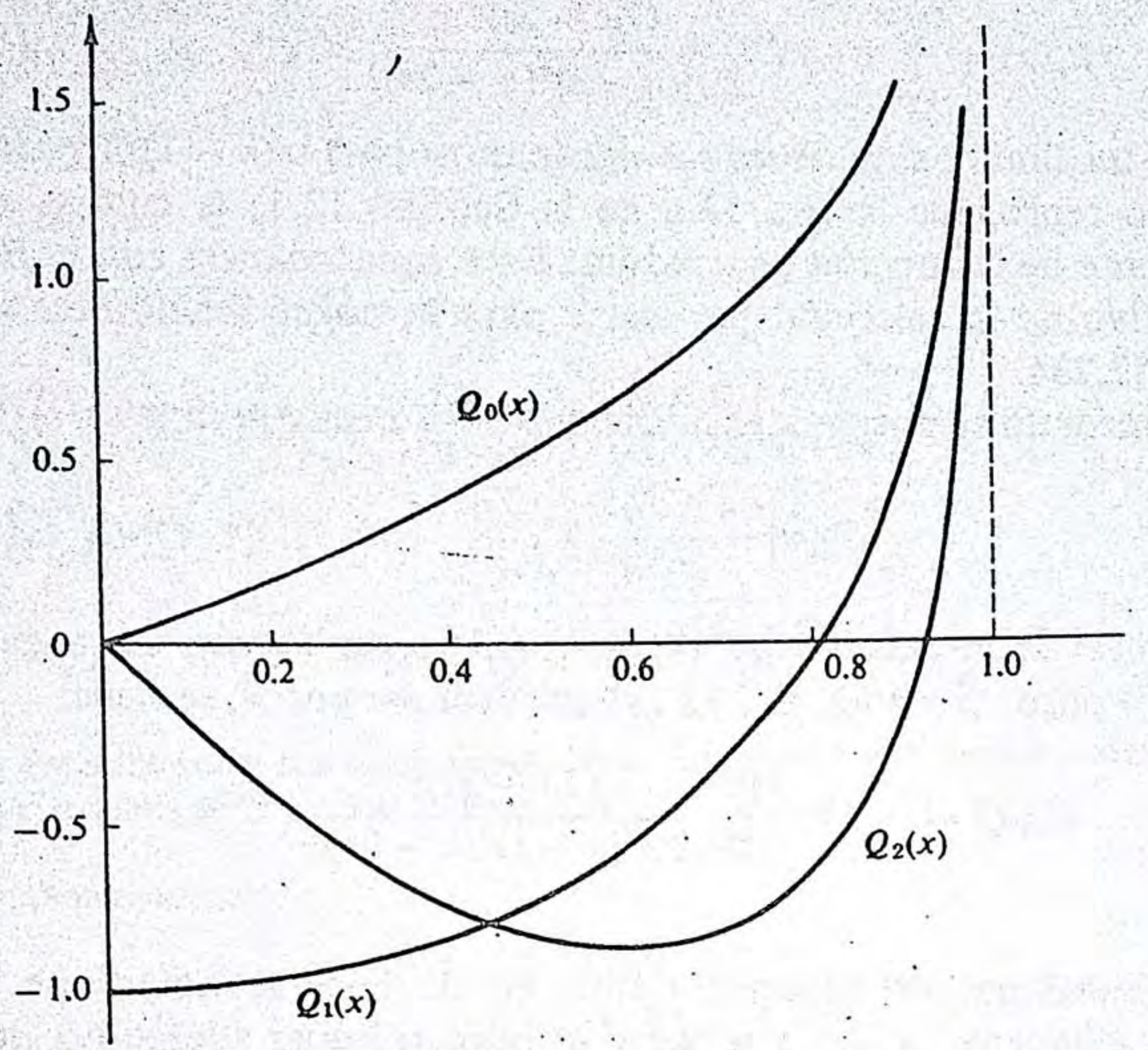


Fig. 12.16 Segunda función de Legendre, $Q_n(x)$, $0 \leqslant x < 1$

con

$$y' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k - \lambda) b_{-\lambda} x^{k-\lambda-1} \tag{12.241}$$

$$y'' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k - \lambda)(k - \lambda - 1) b_{-\lambda} x^{k-\lambda-2}. \tag{12.242}$$

La sustitución de estas ecuaciones en la Ec. 12.221 proporciona

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{\infty} (k - \lambda)(k - \lambda - 1) b_{-\lambda} x^{k-\lambda-2} \\ &\quad + \sum_{\lambda=0}^{\infty} [n(n+1) - 2(k - \lambda) - (k - \lambda)(k - \lambda - 1)] b_{-\lambda} x^{k-\lambda} = 0. \end{aligned} \tag{12.243}$$

El requerimiento de que el coeficiente de x^k desaparezca origina la ecuación indicial

$$k(k+1) - n(n+1) = 0, \tag{12.244}$$

con las soluciones

$$k = n, \qquad -n - 1. \tag{12.245}$$

Para n integral, la solución $k = n$ $(n \geqslant 0)$ origina los polinomios de Legendre ya conocidos $P_n(x)$. La segunda solución, $k = -n - 1$, origina una serie con la relación de recurrencia

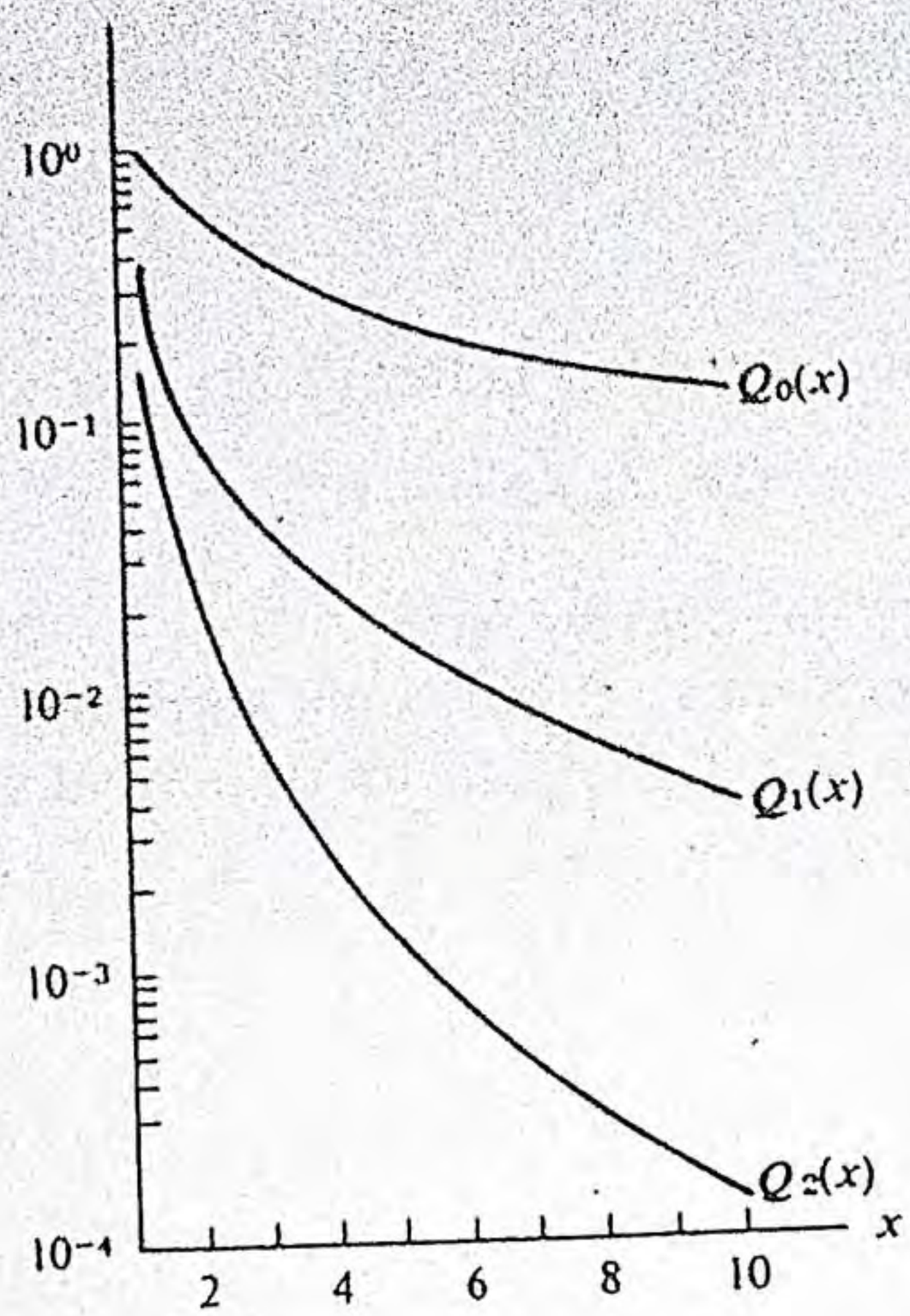


Fig. 12.17 Segunda función de Legendre, $Q_n(x)$, $x > 1$

$$b_{-\lambda}(n+\lambda+1)(n+\lambda+2) + [n(n+1) - (n+\lambda+3)(n+\lambda+2)]b_{-\lambda-2} = 0 \tag{12.246}$$

o

$$b_{-\lambda-2} = \frac{(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)}{(\lambda+2)(2n+\lambda+3)}\, b_{-\lambda}. \tag{12.247}$$

Esto proporciona

$$y(x) = b_0 x^{-n-1}\left[1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}x^{-4} + \cdots\right] \tag{12.248}$$

con

$$b_{-2s} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+2s)}{2\cdot 4\cdots(2s)(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2s+1)}\, b_0. \tag{12.249}$$

Esto también puede indicarse en la forma

$$y(x) = b_0 x^{-n-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!(n+2s)!(2n+1)!}{s!(n!)^2(2n+2s+1)!}x^{-2s}. \tag{12.250}$$

Una de las formas estándar de la segunda solución se obtiene al seleccionar

$$b_0 = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}, \tag{12.251}$$

lo cual origina

$$Q_n(x) = 2^n x^{-n-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!(n+2s)!}{s!(2n+2s+1)!} x^{-2s}, \qquad x^2 > 1. \tag{12.252}$$

Mediante la sustitución en esta serie se observa que $Q_n(x)$, $x^2 > 1$, aun satisface las mismas relaciones de recurrencia que $P_n(x)$.

Soluciones de Forma Cerrada. Frecuentemente es conveniente una forma cerrada para la segunda solución $Q_n(z)$. Esto puede lograrse mediante el método descrito en la Sección 8.5. Se puede indicar

$$Q_n(z) = P_n(z)\left\{A_n + B_n \int^z \frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}\right\}, \tag{12.253}$$

en donde la constante A_n sustituye la evaluación de la integral en el límite inferior arbitrario. Ambas constantes, A_n y B_n se pueden determinar para casos especiales.

Para $n = 0$, la Ec. 12.253 proporciona

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= P_0(z)\left\{A_0 + B_0 \int^z \frac{dx}{(1-x^2)[P_0(x)]^2}\right\} \\ &= A_0 + B_0 \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \\ &= A_0 + B_0\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots + \frac{z^{2s+1}}{2s+1} + \cdots\right), \end{aligned} \tag{12.254}$$

en donde la última expresión se obtiene del desarrollo de Maclaurin del logaritmo. Comparando esto con la solución en serie (Ec. 12.231), se obtiene

$$Q_0(z) = q_0(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots + \frac{z^{2s+1}}{2s+1} + \cdots, \tag{12.255}$$

en que se tiene $A_0 = 0$, $B_0 = 1$. Resultados similares se logran para $n = 1$. Se obtiene

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= z\left[A_1 + B_1 \int^z \frac{dx}{(1-x^2)x^2}\right] \\ &= A_1 z + B_1 z\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{z}\right). \end{aligned} \tag{12.256}$$

Desarrollando en una serie de potencias y comparando con $Q_1(z) = -p_1(z)$, se tiene $A_1 = 0$, $B_1 = 1$. En consecuencia, se puede establecer

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$$

$$Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln \frac{1+z}{1-z} - 1, \qquad |z| < 1. \tag{12.257}$$

Probablemente la mejor forma de determinar $Q_n(z)$ del orden superior consiste en el uso de la relación de recurrencia (Ec. 12.17), la cual puede verificarse tanto para $x^2 < 1$ como para $x^2 > 1$ mediante la sustitución en las formas de serie. Esta técnica de la relación de recurrencia proporciona

$$Q_2(z) = \frac{1}{2} P_2(z) \ln \frac{1+z}{1-z} - \frac{3}{2} P_1(z). \tag{12.258}$$

La aplicación repetida de la fórmula de recurrencia origina

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{1+z}{1-z} - \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(z) - \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(z) - \cdots \tag{12.259}$$

De acuerdo con la forma $\ln [(1+z)/(1-z)]$, se observa que para z real las expresiones son consistentes en el intervalo $-1 < x < 1$. Si se desea tener formas cerradas válidas fuera de este intervalo, solamente se requiere de la sustitución

$$\ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{por} \quad \ln \frac{z+1}{z-1}.$$

Cuando se hace uso de esta última forma, válida para z grande, el intervalo lineal $-1 \leqslant x \leqslant 1$ se considera como una línea de corte. Los valores de $Q_n(x)$, en la línea de corte, generalmente se asignan por medio de la relación

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} [Q_n(x + i0) + Q_n(x - i0)], \tag{12.260}$$

el promedio aritmético de las aproximaciones del lado imaginario positivo y del lado imaginario negativo. El lector habrá de notar que para $z \to x > 1$, $z - 1 \to (1 - x)e^{\pm i\pi}$. El resultado de todo esto es que para todas las z, excepto en el eje real $-1 \leqslant x \leqslant 1$, se tiene

$$Q_0(z) = \tfrac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}, \tag{12.261}$$

$$Q_1(z) = \tfrac{1}{2} z \ln \frac{z+1}{z-1} - 1, \tag{12.262}$$

y así sucesivamente.

El lector puede verificar que las Ecs. 12.261 y 12.262 concuerdan con la Ec. 12.252. Esto ha sido la base de nuestra selección de b_0.

En la siguiente sección habremos de desear $Q_n(y)$ en el eje imaginario. A partir de la forma de serie de $Q_n(y)$, $|z| > 1$, se puede establecer

$$Q_n(iy) = (-i)^{n+1} 2^n y^{-n-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+s)!(n+2s)!(-i)^{2s}}{s!(2n+2s+1)!} y^{-2s}, \tag{12.263}$$

sustituyendo y por iy. En la forma cerrada es conveniente considerar

$$\ln \frac{iy+1}{iy-1} = 2i\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{5y^5} + \cdots\right)$$
$$= -2i \cot^{-1} y. \tag{12.264}$$

Con esta sustitución, la Ec. 12.259 se transforma en

$$Q_n(iy) = \frac{1}{2} P_n(iy)(-2i)\cot^{-1} y - \frac{2n-1}{n} P_{n-1}(iy) - \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(iy) - \cdots, \tag{12.265}$$

con los casos especiales,

$$Q_0(iy) = -i \cot^{-1} y, \tag{12.266}$$

$$Q_1(iy) = y \cot^{-1} y - 1. \tag{12.267}$$

Existe cierta discontinuidad en $y = 0$ que se deriva del arco cotangente. Aparte, la Ec. 12.265 define $Q_n(iy)$ para todas las y reales, $0 < y < \infty$.

A modo de una referencia conveniente, a continuación se incluyen algunos valores especiales de $Q_n(z)$.

1. $Q_n(1) = \infty$, del término logarítmico (Ec. 12.259).
2. $Q_n(\infty) = 0$, del desarrollo en serie (Ec. 12.252).
3. $Q_n(-z) = (-1)^{n+1} Q_n(z)$. Esto se obtiene de la forma de serie. También se puede obtener al utilizar $Q_0(z)$, $Q_1(z)$ y la relación de recurrencia (Ec. 12.17).
4. $Q_n(0) = 0$, para n par, mediante (3) anterior.
5. $Q_n(0) = (-1)^{(n+1)/2} \dfrac{\{[(n-1)/2]!\}^2}{n!} 2^{n-1} = (-1)^{s+1} \dfrac{(2s)!!}{(2s+1)!!}$,
   para n impar, $n = 2s + 1$

Este último resultado se obtiene de la forma en serie (Ec. 12.239) con $p_n(0) = 1$.

Del mismo modo que con las funciones de Bessel, se puede desarrollar una relación wronskiana.[1] Se encuentra

$$(1 - z^2)[P_n(z) Q_n'(z) - P_n'(z) Q_n(z)] = 1, \tag{12.268}$$

[1] La relación wronskiana ha sido utilizada para lograr $Q_n(z)$ en la forma cerrada (Ec. 12.253).

en donde la constante es independiente de n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Si se utiliza la Ec. 12.26 para eliminar las derivadas P_n' y Q_n' la Ec. 12.268 se transforma en

$$P_n(z)Q_{n-1}(z) - P_{n-1}(z)\,Q_n(z) = \frac{1}{n}. \tag{12.269}$$

Las funciones de Legendre asociadas de segunda clase, $Q_n^m(x)$, se pueden desarrollar en analogía a las funciones de Legendre asociadas de la Sección 12.5. Análogamente a la Ec. 12.84, se puede definir

$$Q_n^m(x) = (-1)^m(1 - x^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dx^m}\,Q_n(x) \tag{12.270}$$

y

$$Q_n^{-m}(x) = (-1)^m\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,Q_n^m(x), \qquad -1 < x < 1,\ m \geqslant 0. \tag{12.271}$$

Algunos autores omiten ya sea uno o ambos factores $(-1)^m$. Utilizando estas definiciones, se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} Q_1^1(x) &= -(1 - x^2)^{1/2}\left(\frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right), \\ Q_1^{-1}(x) &= -\tfrac{1}{2}\,Q_1^1(x). \end{aligned} \tag{12.272}$$

El término $\ln[(1 + x)/(1 - x)]$ es característico de estas $Q_n^m(x)$ para $m \neq 0$ así como para $m = 0$. Para $x\,(x^2 > 1)$ grande, o todo el plano complejo con $-1 < x < 1$ como línea de corte, AMS-55 proporciona

$$Q_n^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2}\,\frac{d^m}{dz^m}\,Q_n(z), \qquad m \geqslant 0 \tag{12.273}$$

y la Ec. 12.271 para subíndice negativo.

Representaciones de Integral. De acuerdo con el análisis de la integral de Schlaefli (Sección 12.4), una segunda solución independiente de la ecuación de Legendre es

$$\int_C \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t - z)^{\nu+1}}\,dt,$$

en donde el contorno en forma de ocho (a) mantiene la función integrada con un valor simple y (b) desarrolla una solución distinta de $P_\nu(z)$. Con el factor de normalización $(2^{\nu+2}\,i\,\operatorname{sen}\nu\pi)^{-1}$, se tiene

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+2}\,i\,\operatorname{sen}\pi\nu}\int_C \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(z - t)^{\nu+1}}\,dt. \tag{12.274}$$

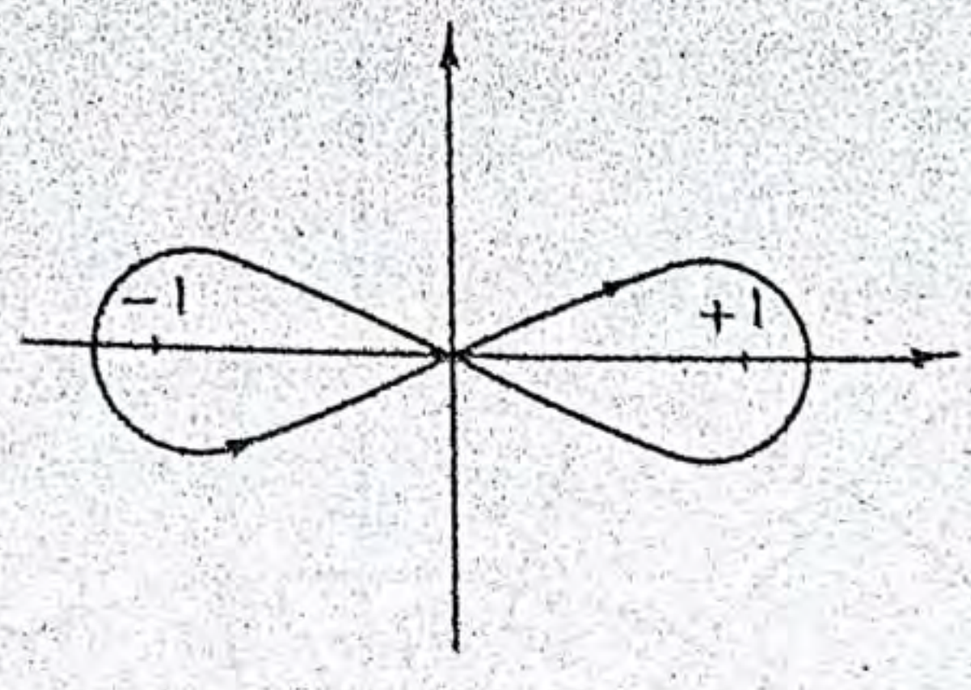


Fig. 12.18 Contorno de la integral de Schlaefli para $Q_\nu(x)$

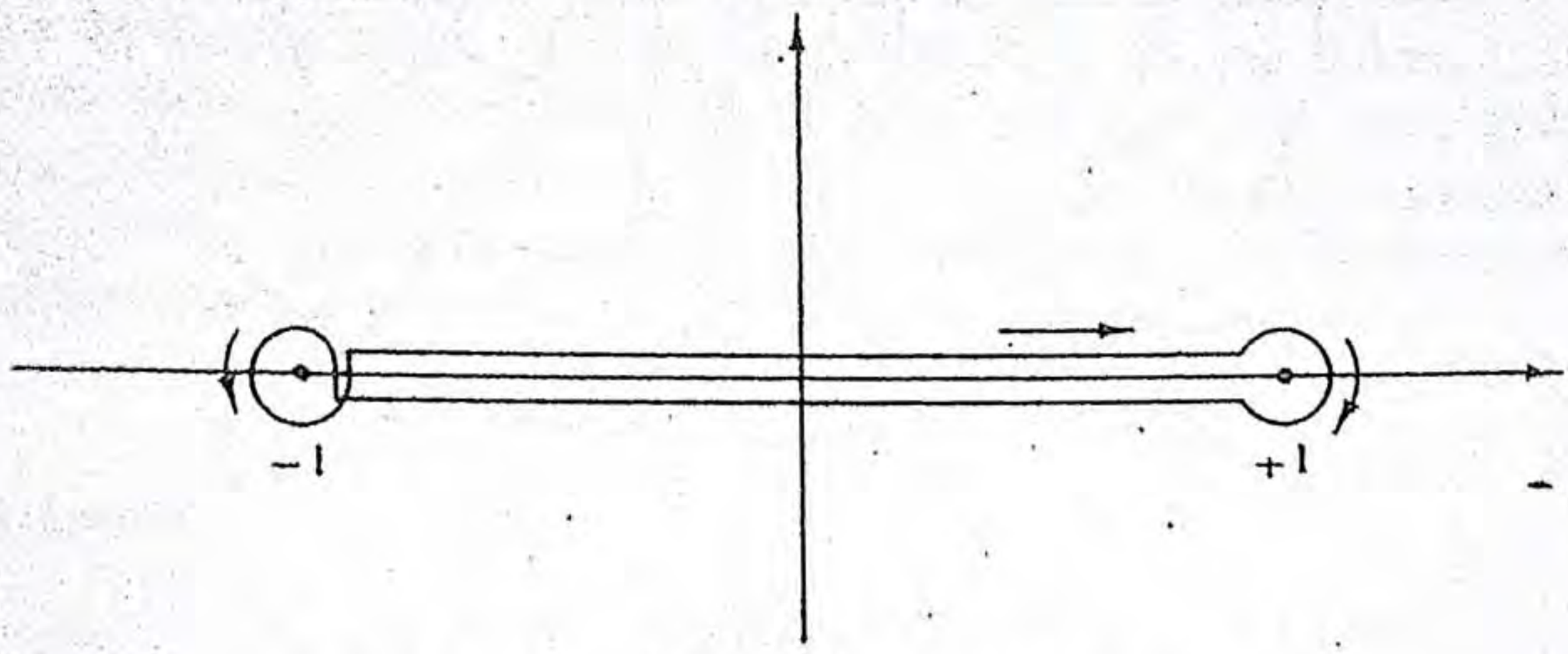


Fig. 12.19 Contorno de Schlaefli deformado

Aquí, z *no* se encuentra en el eje real, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Mediante la deformación del contorno, tal como se muestra en la Fig. 12.19, se obtiene

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\, dt, \qquad \nu > -1. \tag{12.275}$$

La identificación de esta integral como $Q_\nu(z)$ se deja para el Ejercicio 12.10.8.

La sustitución

$$t = \frac{e^\varphi \sqrt{z+1} - \sqrt{z-1}}{e^\varphi \sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}}$$

origina (después de una manipulación considerable)

$$Q_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{[z + \sqrt{z^2-1}\cosh\varphi]^{\nu+1}}, \qquad \nu > -1, \tag{12.276}$$

de manera análoga a la Ec. 12.73 para $P_n(z)$. Para mantener $Q_\nu(z)$ analítica y de valor simple se desplaza una línea de corte desde $+1$ hasta $-\infty$ (en el plano z).

EJERCICIOS

12.10.1 Derive la relación de paridad para $Q_n(x)$.

12.10.2 A partir de las Ecs. 12.233 y 12.234, demuestre que

(a)

$$P_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{(2n+2s-1)!}{(2s)!(n+s-1)!(n-s)!} x^{2s}.$$

(b)

$$P_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{(2n+2s+1)!}{(2s+1)!(n+s)!(n-s)!} x^{2s+1}.$$

Compruebe la normalización al demostrar que un término de cada serie concuerda con el término correspondiente de la Ec. 12.8.

12.10.3 Demuestre que

(a)
$$Q_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{(n+s)!(n-s)!}{(2s+1)!(2n-2s)!} x^{2s+1}$$
$$+ 2^{2n} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{(n+s)!(2s-2n)!}{(2s+1)!(s-n)!} x^{2s+1}, \qquad |x| < 1.$$

(b)
$$Q_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2^{2n} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{(n+s)!(n-s)!}{(2s)!(2n-2s+1)!} x^{2s}$$
$$+ 2^{2n+1} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{(n+s)!(2s-2n-2)!}{(2s)!(s-n-1)!} x^{2s}, \qquad |x| < 1.$$

12.10.4 Verifique que las funciones de Legendre de segunda clase, $Q_n(x)$, satisfacen las mismas relaciones de recurrencia que $P_n(x)$, tanto para $|x| < 1$ como para $|x| > 1$.

$$(2n+1)x\, Q_n(x) = (n+1)\, Q_{n+1}(x) + n\, Q_{n-1}(x),$$
$$(2n+1)\, Q_n(x) = Q'_{n+1}(x) - Q'_{n-1}(x).$$

12.10.5 (a) Utilizando las relaciones de recurrencia, demuestre (independientemente de la relación wronskiana) que

$$n[P_n(x)\, Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\, Q_n(x)] = P_1(x)\, Q_0(x) - P_0(x)\, Q_1(x).$$

(b) Mediante la sustitución directa, demuestre que el lado derecho de esta ecuación equivale a 1.

12.10.6 Evalúe $Q_n^m(0)$.

Respuesta.
$$Q_n^m(0) = \begin{cases} 0, & n+m \text{ par} \\ (-1)^{(n+m+1)/2} 2^n \dfrac{\left(\dfrac{m+m-1}{2}\right)! \left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)!}{(n-m+1)!}, & n+m \text{ impar}, \quad m < n. \end{cases}$$

12.10.7 Suponiendo que

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt$$

satisface la ecuación de Legendre ($\nu > -1$), demuestre, a partir de la paridad, que no puede involucrar ninguna $P_\nu(z)$.

12.10.8 Suponiendo que

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt$$

satisface la ecuación de Legendre ($\nu > -1$), demuestre que la integral es $2^{\nu+1}\,Q_\nu(z)$. *Sugerencia.* Se puede desarrollar el denominador en potencias de t/z (para $|z| > t$) e integrar mediante el uso de la función beta (Sección 10.4).

12.11 Aplicación de los Sistemas Coordenados Esferoidales

Considere los problemas físicos de los esferoides dieléctrico y conductor colocados en un campo eléctrico uniforme. Con propósito de simplificación, el eje de simetría del esferoide será considerado paralelo a la dirección del campo eléctrico original. Esto proporciona una simetría axial completa y elimina toda dependencia acimutal.

Coordenadas Esferoidales Oblatas. Si nuestro esferoide es oblato, es conveniente seleccionar las coordenadas esferoidales oblatas de modo que una superficie coordenada describa el esferoide. Se puede utilizar el sistema definido por las ecuaciones de transformación[1]

$$\begin{aligned} x &= a \cosh u \operatorname{sen} v \cos \varphi, \\ y &= a \cosh u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= a \operatorname{senh} u \cos v, \end{aligned} \tag{12.277}$$

en que la superficie $u = u_0$ es un esferoide oblato, la superficie $v = v_0$ es un hiperboloide de una hoja, y la superficie $\varphi = \varphi_0$ es un plano medio a través del eje z.

En este caso puede resultar algo más conveniente el sustituir este conjunto (u, v, φ) por las coordenadas (ξ, ζ, φ) definidas por

[1] Este es el mismo sistema coordenado que el sistema esferoidal oblato definido en la Sección 2.11, excepto que $v_{12.11} = \pi/2 - v_{2.11}$.

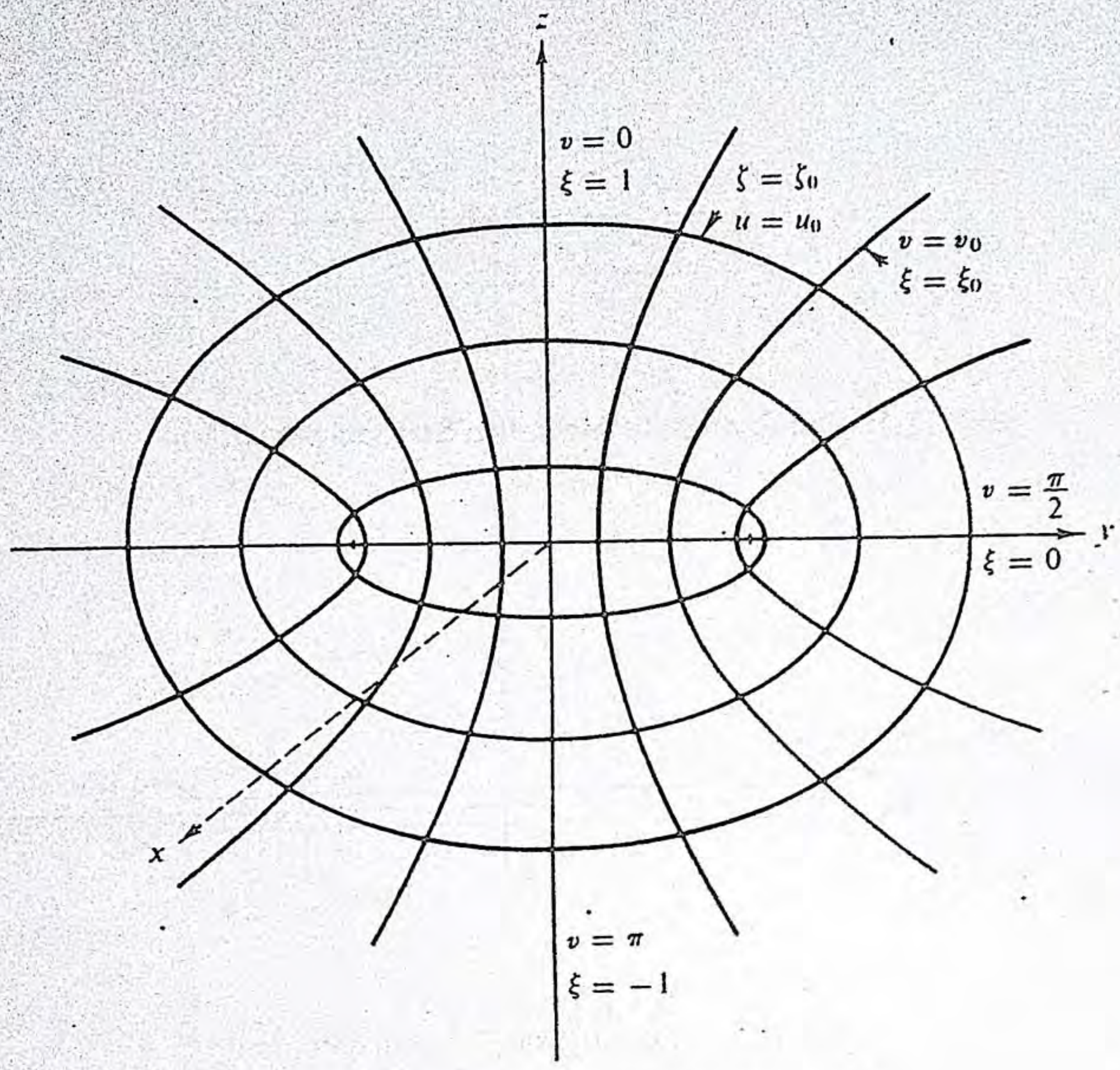


Fig. 19.20 Coordenadas esferoidales oblatas

$$\xi = \cos v, \qquad -1 \leqslant \xi \leqslant 1,$$
$$\zeta = \operatorname{senh} u, \qquad 0 \leqslant \zeta < \infty. \tag{12.278}$$

En este nuevo sistema, la superficie $\zeta = 0$ es un disco circular, mientras que $\zeta = \zeta_0 > 0$ es un elipsoide de revolución (esferoide oblato). La superficie $\xi = 0$ es un plano con un orificio circular, mientras que $\xi = 1$ es una línea, perpendicular al orificio, $\xi = 0$, y al disco $\zeta = 0$ y que pasa a través de su centro común. La Ec. 12.277 se transforma en

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \operatorname{sen} \varphi \\ z &= a\xi\zeta, \end{aligned} \tag{12.279}$$

en donde

$$\rho = a[(1 - \xi^2)(1 + \zeta^2)]^{1/2}. \tag{12.280}$$

La tríada (ξ, ζ, φ) forma un conjunto destrorsum, $\xi_0 \times \zeta_0 = \varphi_0$.

Se pretende encontrar soluciones para la ecuación de Laplace que se ha transformado en

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial V}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1+\zeta^2)\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right]+\frac{\xi^2+\zeta^2}{(1-\xi^2)(1+\zeta^2)}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0. \qquad (12.281)$$

En este caso, se han utilizado los factores de escala

$$h_\xi = a\left(\frac{\xi^2+\zeta^2}{1-\xi^2}\right)^{1/2},$$

$$h_\zeta = a\left(\frac{\xi^2+\zeta^2}{1+\zeta^2}\right)^{1/2}, \qquad (12.282)$$

$$h_\varphi = a[(1-\xi^2)(1+\zeta^2)]^{1/2} = \rho.$$

Se supone una solución de la forma $X(\xi)\,Z(\zeta)\,\Phi(\varphi)$. Siendo así, al separar las variables (cf. Sección 2.5), se encuentra que $X(\xi)$ debe satisfacer la ecuación de Legendre asociada, $Z(\zeta)$ la ecuación de Legendre asociada del argumento imaginario puro, y $\Phi(\varphi)$ la ecuación del oscilador armónico simple usual. El potencial V se puede indicar en la forma

$$V(\xi,\zeta,\varphi) = \sum_{m,n} X_{mn}(\xi)\,Z_{mn}(\zeta)\,\Phi_m(\varphi), \qquad (12.283)$$

en donde

$$X_{mn}(\xi) = A\,P_n^m(\xi) + B\,Q_n^m(\xi)$$

$$Z_{mn}(\zeta) = A'\,P_n^m(i\zeta) + B'\,Q_n^m(i\zeta) \qquad (12.284)$$

$$\Phi_m(\varphi) = C\cos m\varphi + D\,\mathrm{sen}\,m\varphi.$$

Condiciones Limitantes. Esferoide Oblato Conductor. Mediante la aplicación de la condición de simetría axial, se establece $m = 0$, eliminando todas las funciones de Legendre asociadas. Sin embargo, aún se requiere de P_n y Q_n tanto para el argumento real como para el imaginario.

Las condiciones limitantes, para el caso más simple del esferoide oblato *conductor*, son

$$V = 0 \text{ para } \zeta = \zeta_0 \qquad \text{(superficie del esferoide)},$$

$$V \to -E_0 a\xi\zeta \text{ para } \zeta \to \infty,$$

en donde E_0 es el campo eléctrico original sin perturbar. Para construir la dependencia en ξ adecuada, se debe tener $n = 1$ y $B = 0$. [Si $B \neq 0$, se tendrá un problema en $\xi = 1$, $Q_n(1) = \infty$.] Esto proporciona

$$V(\xi,\zeta) = P_1(\xi)[A'P_1(i\zeta) + B'Q_1(i\zeta)]$$
$$= \xi[A'i\zeta + B'(\zeta\cot^{-1}\zeta - 1)]. \qquad (12.285)$$

A medida que $\zeta \to \infty$, $Q_1(i\zeta) \to 0$. Aplicando la segunda condición limitante,

$$A' = iE_0 a. \qquad (12.286)$$

se obtiene

$$V(\xi, \zeta) = \xi[-E_0 a\zeta + B'(\zeta \cot^{-1} \zeta - 1)]. \tag{12.287}$$

Mediante la primera condición limitante, el potencial V desaparece en la superficie esferoidal, $\zeta = \zeta_0$, o sea

$$0 = \xi[-E_0 a\zeta_0 + B'(\zeta_0 \cot^{-1} \zeta_0 - 1)], \tag{12.288}$$

y

$$B' = \frac{E_0 a\zeta_0}{\zeta_0 \cot^{-1} \zeta_0 - 1}. \tag{12.289}$$

El resultado final para $V(\xi, \zeta)$ es

$$V(\xi, \zeta) = -E_0 a\xi\zeta_0\left(\frac{\zeta}{\zeta_0} - \frac{\zeta \cot^{-1} \zeta - 1}{\zeta_0 \cot^{-1} \zeta_0 - 1}\right), \zeta \geqslant \zeta_0. \tag{12.290}$$

Para resumir, se ha considerado una suma de soluciones de la ecuación de Laplace para describir el potencial. Las constantes arbitrarias han sido determinadas al requerir que la solución se adapte a las condiciones limitantes. Esto proporciona la Ec. 12.290. Finalmente, a partir de la Sección 1.15, se conoce que la solución es única.

El problema esférico correspondiente (Sección 12.3) constituye un caso limitante. El límite, $\zeta_0 \to \infty$, $a \to 0$, con $a\zeta_0 = r_0$, una constante, lleva al sistema esferoidal oblato a un sistema esférico.

Condiciones Limitantes. Esferoide Oblato Dieléctrico. Si el esferoide oblato es un esferoide *dieléctrico*, la inductividad específica ε, la primera condición limitante, se sustituye por

$$(a')\ V \quad \text{es continuo en} \quad \zeta = \zeta_0,^1$$

$$(a'')\ D_n = -\frac{\varepsilon}{h_\zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta} \quad \text{es continuo en} \quad \zeta = \zeta_0.$$

Supongamos que el campo eléctrico dentro del dieléctrico es constante y paralelo al eje z (de simetría).[2] ¡La justificación de esta suposición es que funciona correctamente! Así, al aplicar la condición limitante en el infinito, se tiene

$$V_{\text{exterior}} = \xi[-E_0 a\zeta + B'(\zeta \cot^{-1} \zeta - 1)] \tag{12.291}$$

$$V_{\text{interior}} = -E_{\text{in}} a\xi\zeta. \tag{12.292}$$

[1] Esto es equivalente a requerir que el componente de $\mathbf{E}$ sea continuo.

[2] La alternativa consiste en establecer el potencial interior como una suma de las soluciones de la ecuación de Laplace de manera análoga a la Ec. 12.283.

A $\zeta = \zeta_0$, las condiciones (a′) y (a″) proporcionan

$$-E_{in}a\zeta_0 = -E_0 a\zeta_0 + B'(\zeta_0 \cot^{-1}\zeta_0 - 1) \tag{12.293}$$

$$\varepsilon E_{in}a = \varepsilon_0 E_0 a - \varepsilon_0 B'\left(\cot^{-1}\zeta_0 - \frac{\zeta_0}{1+\zeta_0^2}\right), \tag{12.294}$$

cancelándose el factor h_ζ. Eliminando B', se encuentra que la relación del campo original E_0 con respecto al campo en el interior del dieléctrico E_{in} es

$$\frac{E_0}{E_{in}} = 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)(1+\zeta_0^2)(1 - \zeta_0 \cot^{-1}\zeta_0). \tag{12.295}$$

Es conveniente separar el efecto geométrico del efecto físico ($\varepsilon \neq \varepsilon_0$). Se puede *definir* el efecto despolarizante, L, mediante

$$E_{in} = E_0 - LP, \tag{12.296}$$

en donde P, la polarización, es $E_{in}(\varepsilon - \varepsilon_0)$. Resolviendo para L se encuentra

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0}(1+\zeta_0^2)(1 - \zeta_0 \cot^{-1}\zeta_0), \tag{12.297}$$

una función de la geometría del esferoide oblato.

En el límite, a medida que $\zeta_0 \to \infty$

$$\lim_{\zeta_0 \to \infty} L = \frac{1}{3\varepsilon_0}, \tag{12.298}$$

lo cual es justamente el valor de una esfera dieléctrica. En el otro extremo

$$\lim_{\zeta_0 \to 0} L = \frac{1}{\varepsilon_0}, \tag{12.299}$$

y esto es justamente el valor para una laja dieléctrica delgada perpendicular al campo eléctrico uniforme.

Coordenadas Esferoidales Prolatas. El análisis de un esferoide *prolato* en un campo eléctrico uniforme se realiza bajo los mismos lineamientos, excepto que las coordenadas esferoidales prolatas son las que se utilizan. Utilizaremos[1].

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi, \\ z &= a\xi\eta, \end{aligned} \tag{12.300}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \cosh u, \qquad 1 \leqslant \eta < \infty, \\ \xi &= \cos v, \qquad -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \end{aligned} \tag{12.301}$$

[1] Esto es consistente con la Sección 2.10 exactamente.

y

$$\rho = a[(1 - \xi^2)(\eta^2 - 1)]^{1/2}.$$

Si se expresa el laplaciano en términos de (ξ, η, φ) (cf. Ec. 2.106, Sección 2.10), se tendrá la separación de las variables. Ambas dependencias en ξ y η originan la ecuación de Legendre asociada. La dependencia en φ nuevamente proporciona la ecuación del oscilador armónico simple. En consecuencia, $V(\xi, \eta, \varphi)$ es igual que $V(\xi, \zeta, \varphi)$ (Ec. 12.283 y 12.284), pero con los argumentos $i\zeta$ sustituidos por η real. Si $m = 0$ se establece por la simetría acimutal y se aplican las condiciones limitantes, el potencial externo se transforma en

$$V_{\text{exterior}} = \xi\left[A'\eta + B'\left(\frac{1}{2}\eta \ln \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - 1\right)\right]. \tag{12.302}$$

Dejando que los pasos intermedios sean suministrados por el lector mediante el análisis por analogía con el esferoide oblato, finalmente se encuentra un factor de despolarización L,

$$L = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\eta_0^2 - 1\right)\left(\frac{1}{2}\eta_0 \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - 1\right), \tag{12.303}$$

en donde $\eta = \eta_0$ describe la superficie esferoidal prolata. En el límite, a medida que $\eta_0 \to 1$, el esferoide prolato se transforma en una aguja fina extremadamente larga. Como era de esperarse

$$\lim_{\eta_0 \to 1} L = 0. \tag{12.304}$$

Por otra parte,

$$\lim_{\eta_0 \to \infty} L = \frac{1}{3\varepsilon_0}, \tag{12.305}$$

lo cual corresponde nuevamente al caso esférico.

Probablemente es de mencionarse que aun cuando los casos electrostáticos solamente tienen una baja aplicación, los problemas magnéticos correspondientes son más importantes. El análisis de los esferoides paramagnéticos y diamagnéticos en un campo magnético uniforme es bastante similar al de los casos electrostáticos. Tanto los problemas electrostáticos como los magnetostáticos involucran las soluciones de la ecuación de Laplace.

EJERCICIOS

12.11.1 (a) Una cubierta esferoidal oblata aislada cargada ($\zeta = \zeta_0$) se encuentra al potencial $V = V_0$. Demuestre que el potencial electrostático fuera de la cubierta es

$$V = V_0 \frac{Q_0(i\zeta)}{Q_0(i\zeta_0)} = V_0 \frac{\cot^{-1}\zeta}{\cot^{-1}\zeta_0}.$$

(b) Permitiendo que $\zeta_0 \to 0$, se obtiene un disco de radio a. Encuentre el potencial de este disco a distancias grandes y a partir de lo mismo calcule la carga total en el disco. Utilice este resultado para demostrar que la capacitancia del disco es $C = 8\varepsilon_0 a$ (unidades mks).

12.11.2 Para el esferoide oblato conductor cargado del Ejercicio 12.11.1, encuentre la carga q en el esferoide y la capacitancia por medio de cada uno de los dos siguientes métodos:

(a) La consideración del comportamiento del potencial a distancias grandes.

(b) La aplicación de la ley de Gauss (Sección 1.14), integrando sobre la superficie del esferoide.

(c) Demuestre que la capacitancia se reduce al valor de una esfera en el límite a medida que el esferoide oblato se aproxima a la forma esférica.

Respuesta. (a) y (b) $q = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 a V_0}{\cot^{-1}\zeta_0}$.

12.11.3 Una cubierta esferoidal prolata, aislada y conductora ($\eta = \eta_0$) se encuentra al potencial V_0.

(a) Demuestre que el potencial electrostático fuera de la cubierta es

$$V = V_0 \frac{Q_0(\eta)}{Q_0(\eta_0)} = V_0 \frac{\ln[(\eta+1)/(\eta-1)]}{\ln[(\eta_0+1)/(\eta_0-1)]}.$$

(b) ¿Cuál es la capacitancia del esferoide?
Sugerencia. Investigue el comportamiento de este potencial a distancias grandes de la cubierta.

12.11.4 (a) Para el esferoide prolato aislado y conductor del Ejercicio 12.11.3 encuentre la carga q y la capacitancia mediante el uso de la ley de Gauss (Sección 1.14) e integrando sobre la superficie del esferoide.

(b) Demuestre que la capacitancia se reduce al valor de una esfera en el límite a medida que el esferoide prolato se aproxima a la forma esférica.

Respuesta. (a) $q = 4\pi\varepsilon_0 a V_0 / Q_0(\eta_0)$
$C = 4\pi\varepsilon_0 a / Q_0(\eta_0)$.

12.12 Armónicos Esféricos Vectoriales

La mayor parte de nuestra atención en este capítulo ha sido dirigida hacia la resolución de las ecuaciones para campos escalares tal como el

campo electrostático. ¡Esto ha sido así debido, principalmente, a que los campos escalares son mas fáciles de manejar que los campos vectoriales! Sin embargo, habiendo logrado un control más firme en los problemas de campos escalares, se ha dedicado más y más atención a los problemas de los campos vectoriales.

Campo Magnético de un Circuito de Corriente. Para ilustrar las dificultades, consideremos la ecuación[1]

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{12.306}$$

para el potencial de vector magnético. Asimismo habremos de suponer que las condiciones limitantes se pueden expresar más convenientemente en coordenadas polares esféricas. En el ejemplo del circuito de corriente (Sección 12.5) fue posible el manejo de esta ecuación debido a que la forma de A quedó limitada de manera considerable. En general, esta ecuación proporciona tres ecuaciones escalares, cada una de las cuales involucra los tres componentes de A, A_r, A_θ y A_φ. Tales ecuaciones diferenciales acopladas pueden resolverse, aunque las complejidades para lo mismo son notables.

Estableciendo $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, la ecuación se puede convertir en el laplaciano vectorial $\nabla^2 \mathbf{A}$. Esto se habrá de separar en una ecuación para cada componente en las coordenadas *cartesianas*. Desafortunadamente, las condiciones limitantes (para el circuito de corriente) se encuentran en coordenadas esféricas. Para satisfacer las mismas se tendría que mezclar los componentes cartesianos A_x, A_y y A_z en una forma que posiblemente sería molesta y dificultosa de manipular.

Para facilitar la solución de la Ec. 12.306 y de otras ecuaciones, tal como la ecuación de onda vectorial y la ecuación de Helmholtz vectorial, se han utilizado diversas combinaciones de los armónicos esféricos (escalares) con objeto de construir vectores en las coordenadas polares esféricas. Un conjunto, de utilidad en la mecánica cuántica, ha sido descrito por Hill.[2] Los tres armónicos esféricos vectoriales son

$$\mathbf{Y}_{LM} = \mathbf{r}_0\left[-\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2} Y_L^M\right] + \boldsymbol{\theta}_0\left\{\frac{1}{[(L+1)(2L+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_L^M}{\partial \theta}\right\} \tag{12.307}$$

$$+ \boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{iM}{[(L+1)(2L+1)]^{1/2}\operatorname{sen}\theta} Y_L^M\right\}.$$

[1] Cf. Ejercicio 1.14.5 para la derivación de las ecuaciones de Maxwell.

[2] E. H. Hill, Theory of Vector Spherical Harmonics, *Am. J. Phys.* 22, 211 (1954); también J. M. Blatt y V. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*. Nueva York: Wiley (1952). Observe que Hill asigna las fases de acuerdo con la convención de fase de Condon-Shortley (Sección 12.6).

$$\mathbf{W}_{LM} = \mathbf{r}_0\left[\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} Y_L^M\right] + \boldsymbol{\theta}_0\left\{\frac{1}{[L(2L+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}\right\}$$

$$+ \boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{iM}{[L(2L+1)]^{1/2}\operatorname{sen}\theta} Y_L^M\right\}, \tag{12.308}$$

$$\mathbf{X}_{LM} = \boldsymbol{\theta}_0\left\{\frac{-M}{[L(L+1)]^{1/2}\operatorname{sen}\theta} Y_L^M\right\} + \boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{-i}{[L(L+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}\right\}. \tag{12.309}$$

Estas funciones satisfacen la relación de ortogonalidad general

$$\int \mathbf{A}_{LM}\cdot\mathbf{B}^*_{L'M'}\, d\Omega = \delta_{AB}\delta_{LL'}\delta_{MM'}, \tag{12.310}$$

en donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ pueden ser $\mathbf{V}$, $\mathbf{X}$ o $\mathbf{W}$. Esto puede verificarse mediante el uso de las definiciones de $\mathbf{V}$, $\mathbf{X}$ y $\mathbf{W}$ y reduciendo la integral a un armónico esférico ortonormal ordinario, $Y_L^M(\theta, \varphi)$.

De acuerdo con las operaciones de paridad (inversión de coordenada), los armónicos esféricos vectoriales se transforman en

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{LM}(\theta', \varphi') &= (-1)^{L+1}\mathbf{V}_{LM}(\theta, \varphi),\\ \mathbf{W}_{LM}(\theta', \varphi') &= (-1)^{L+1}\mathbf{W}_{LM}(\theta, \varphi),\\ \mathbf{X}_{LM}(\theta', \varphi') &= (-1)^{L}\mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi),\end{aligned} \tag{12.311}$$

en donde

$$\begin{aligned}\theta' &= \pi - \theta\\ \varphi' &= \pi + \varphi.\end{aligned} \tag{12.312}$$

Al verificar estas relaciones, el lector deberá de recordar que los vectores unitarios de coordenadas polares esféricas $\mathbf{r}_0$ y $\boldsymbol{\varphi}_0$ son impares y $\boldsymbol{\theta}_0$ es par. Estas propiedades se pueden verificar al expresar los vectores unitarios $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\theta}_0$ y $\boldsymbol{\varphi}_0$ en términos de los vectores unitarios cartesianos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en las coordenadas polares esféricas.

Para demostrar el uso de los armónicos esféricos vectoriales, considere la Ec. 12.306 nuevamente. De acuerdo con la tabla de Hill de relaciones diferenciales

$$\nabla\cdot[F(r)\,\mathbf{V}_{LM}(\theta, \varphi)] = -\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2}\left[\frac{dF}{dr} + \frac{L+2}{r}F\right] Y_L^M(\theta, \varphi), \tag{12.313}$$

$$\nabla\cdot[F(r)\,\mathbf{W}_{LM}(\theta, \varphi)] = \left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2}\left[\frac{dF}{dr} - \frac{L-1}{r}F\right] Y_L^M(\theta, \varphi), \tag{12.314}$$

$$\nabla\cdot[F(r)\,\mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi)] = 0. \tag{12.315}$$

La condición

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \tag{12.316}$$

elimina V_{LM} y W_{LM}, dejando tan solo X_{LM}. En ausencia de corriente ($J = 0$), es decir lejos del circuito de corriente, la Ec. 12.306, sujeta a la Ec. 12.316, se transforma en

$$\nabla^2 A = 0. \tag{12.317}$$

Utilizando otras relaciones diferenciales de Hill con $A_{LM} = R(r)\, X_{LM}(\theta, \varphi)$, se obtiene

$$\nabla^2[R(r)\, X_{LM}(0, \varphi)] = \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{L(L+1)}{r^2} R\right] X_{LM} = 0, \tag{12.318}$$

en concordancia con la Ec. 12.116. Se tiene

$$A_{LM} = a_{LM} r^{-L-1}\, X_{LM}(\theta, \varphi). \tag{12.319}$$

Se observa que no puede haber una dependencia acimutal debido a la simetría del circuito, $M = 0$, y la solución se reduce a

$$A_L = a_L r^{-L-1} \left\{ \frac{-i}{[L(L+1)]^{1/2}} \frac{\partial Y_L^0}{\partial \theta} \right\} \varphi_0 . \tag{12.320}$$

Esto es equivalente a la Ec. 12.119. Las constantes a_L se determinan al definir las condiciones limitantes, tal como se ha realizado en la Sección 12.5 para c_n. El campo magnético se puede encontrar a partir de

$$\begin{aligned} \nabla \times [F(r) X_{LM}] = {} & i\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} - \frac{L}{r} F\right] V_{LM} \\ & + i\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2} \left[\frac{dF}{dr} + \frac{(L+1)}{r} F\right] W_{LM}, \end{aligned} \tag{12.321}$$

lo cual corresponde a la Ec. 12.122. [Aquí $F(r) = a_L r^{-L-1}$.]

Las definiciones de los armónicos esféricos vectoriales proporcionadas aquí están determinadas por la conveniencia, principalmente en los cálculos de la mecánica cuántica, en donde el momento angular es un parámetro significativo. Morse y Feshbach describen otro conjunto de armónicos esféricos vectoriales, **B**, **C** y **P**, en que la dependencia radial es complemento en **P** y la dependencia angular es completamente en **B** y **C**. Este conjunto ofrece ventajas en el tratamiento de la ecuación de onda cuando se desea separar las partes longitudinal y transversal de la onda.

Otros ejemplos de la utilidad y poderío de los armónicos esféricos vectoriales se pueden encontrar en la obra de Blatt y Weisskopf, en la obra de Morse y Feshbach y en *Classical Electrodynamics* de Jackson, los cuales utilizan los armónicos esféricos vectoriales en la descripción de la radiación de multipolo y los problemas electromagnéticos relacionados.

Los armónicos esféricos vectoriales se pueden desarrollar como resultado del acoplamiento de L unidades del momento angular orbital y 1 unidad de momento angular de spin. Una ampliación de esto, el

plamiento de L unidades de momento angular orbital con 2 unidades de momento angular de spin para formar los armónicos esféricos tensoriales, ha sido presentada por Mathews.[1] La principal aplicación de los armónicos esféricos tensoriales se encuentra en la investigación de la radiación gravitacional.

EJERCICIOS

12.12.1 Construya los armónicos esféricos vectoriales $l=0$, $m=0$ y $l=1$, $m=0$

Respuesta.
$$\begin{aligned} V_{00} &= -\mathbf{r}_0(4\pi)^{-1/2} \\ X_{00} &= 0 \\ W_{00} &= 0 \\ V_{10} &= -\mathbf{r}_0(2\pi)^{-1/2}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}_0(8\pi)^{-1/2}\operatorname{sen}\theta \\ X_{10} &= \boldsymbol{\varphi}_0 i(3/8\pi)^{1/2}\operatorname{sen}\theta \\ W_{10} &= \mathbf{r}_0(4\pi)^{-1/2}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}_0(8\pi)^{-1/2}\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

12.12.2 Verifique que la paridad de $\mathbf{V}_{LM}$ es $(-1)^{L+1}$, la paridad de $\mathbf{X}_{LM}$ es $(-1)^L$, y la de $\mathbf{W}_{LM}$ es $(-1)^{L+1}$. ¿Qué ha sucedido con la dependencia en M de la paridad? *Sugerencia.* $\mathbf{r}_0$ y $\boldsymbol{\varphi}_0$ tienen paridad impar; $\boldsymbol{\theta}_0$ tiene paridad par (cf. Ejercicio 2.4.6).

12.12.3 Verifique la ortonormalidad de los armónicos esféricos vectoriales $\mathbf{V}_{LM}$, $\mathbf{X}_{LM}$ y $\mathbf{W}_{LM}$.

12.12.4 En *Classical Electrodynamics,* pág. 545, Jackson define $\mathbf{X}_{LM}$ por medio de la ecuación

$$\mathbf{X}_{LM}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\,\mathbf{L}Y_L^M(\theta,\varphi),$$

en donde el operador de momento angular $\mathbf{L}$ está dado por

$$\mathbf{L} = -i(\mathbf{r}\times\nabla).$$

Demuestre que esta definición concuerda con la Ec. 12.309.

12.12.5 Demuestre que

$$\sum_{M=-L}^{L} \mathbf{X}_{LM}^*(\theta,\varphi)\cdot\mathbf{X}_{LM}(\theta,\varphi) = \frac{2L+1}{4\pi}.$$

Sugerencia. Una de las formas es utilizar el Ejercicio 12.12.4 con $\mathbf{L}$ desarrollado en coordenadas cartesianas empleando los operadores ascendentes y descendentes de la Sección 12.7.

[1] J. Mathews, "Gravitational Multipole Radiation", en *H. P. Robertson, In Memorian.* Filadelfia, Pensilvania: Society for Insdustrial and Applied Mathematics (1963).

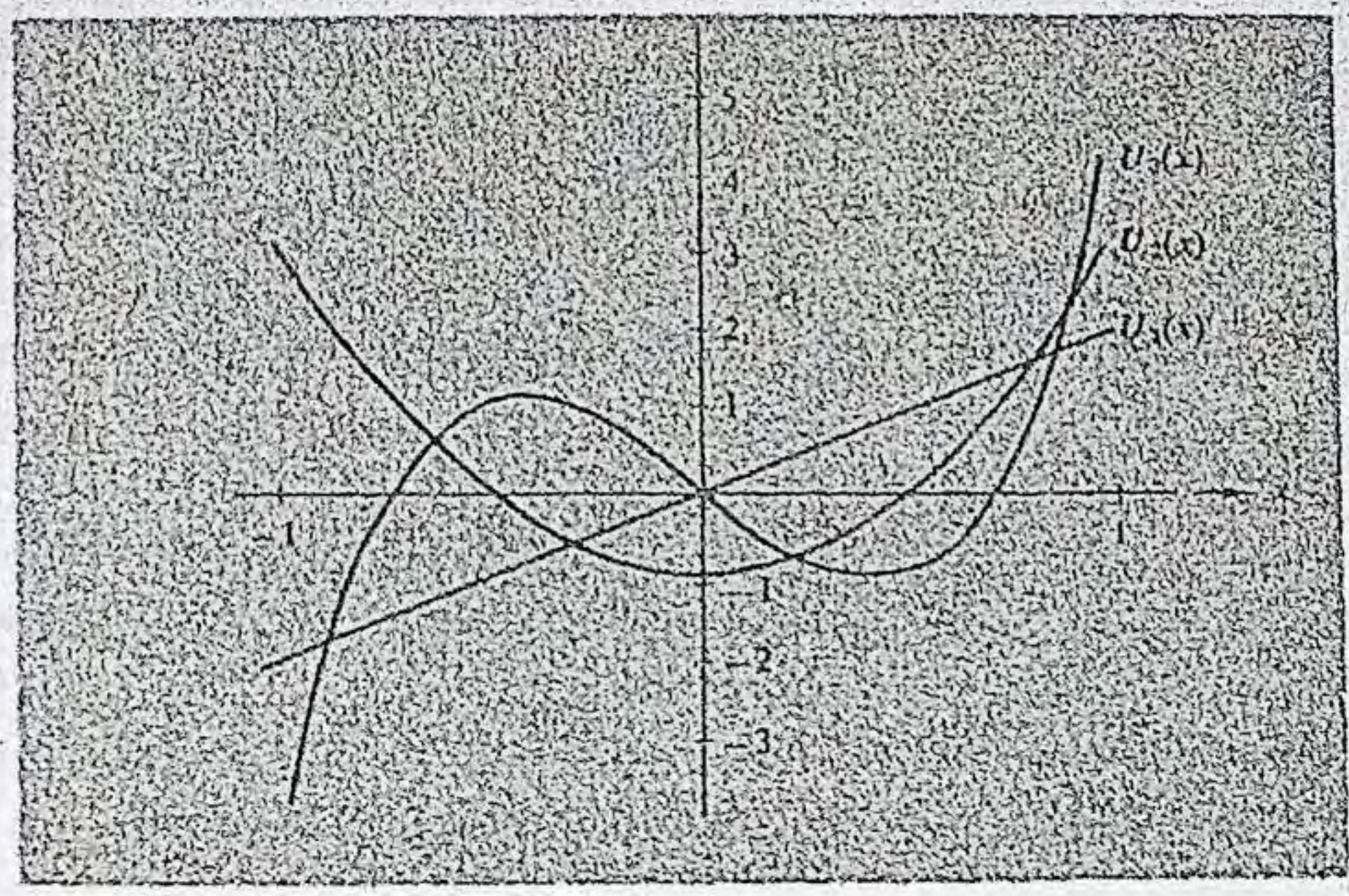
12.12.6 Demuestre que

$$\int \mathbf{X}_{LM} \cdot (\dot{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{X}_{LM})\, d\Omega = 0.$$

El *integrando* representa un término de interferencia en la radiación electromagnética que contribuye a las distribuciones angulares pero no a la integral total.

REFERENCIAS

HOBSON, E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* Nueva York: Chelsea (1955). Una referencia bastante completa. Este es un texto clásico relacionado con los polinomios de Legendre y todas las funciones al respecto.
Véanse también las referencias al final del Capítulo 13.



CAPITULO 13

FUNCIONES ESPECIALES

En este capítulo se estudiarán cuatro conjuntos de polinomios ortogonales: Hermite, Laguerre y Chebyshev[1] de primera y segunda clases. Aun cuando estos cuatro conjuntos son de menor importancia en la física matemática en comparación con las funciones de Bessel y Legendre de los Capítulos 11 y 12, también se presentan. Son de uso ocasional y consecuentemente merecen, al menos, un poco de atención. Debido a que las técnicas matemáticas generales duplican las correspondientes a los dos capítulos anteriores, el desarrollo de estas funciones solamente se plantea. Las demostraciones detalladas, involucradas en los Capítulos 11 y 12, se dejan al lector. Para concluir el capítulo, estos polinomios y otras funciones se expresan en términos de las funciones hipergeométricas e hipergeométricas confluentes.

13.1 Funciones de Hermite

Funciones Generadoras. Polinomios de Hermite. Los polinomios de Hermite, $H_n(x)$, se pueden definir por medio de la función generadora

$$g(x, t) = e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{13.1}$$

Relaciones de Recurrencia. Observe la ausencia de un subíndice, lo cual distingue a las mismas de las funciones de Hankel sin parentesco. De

[1] Esto representa la selección de AMS-55. Sin embargo, se puede encontrar una variedad de formas, tal como la de Tschebyscheff.

acuerdo con la función generadora, se encuentra que los polinomios de Hermite satisfacen las relaciones de recurrencia

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x) \tag{13.2}$$

y

$$H_n'(x) = 2n\, H_{n-1}(x). \tag{13.3}$$

La Ec. 13.2 se puede obtener mediante la diferenciación de la función generadora con respecto a t; la diferenciación con respecto a x origina la Ec. 13.3.

El desarrollo directo de la función generadora proporciona fácilmente $H_0(x) = 1$ y $H_1(x) = 2x$. Siendo así, la Ec. 13.2 permite la construcción de cualquier $H_n(x)$ deseado (n integral). A modo de referencia conveniente, en la Tabla 13.1 se incluyen los primeros polinomios de Hermite.

TABLA 13.1

Polinomios de Hermite

$H_0(x) = 1$
$H_1(x) = 2x$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$
$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

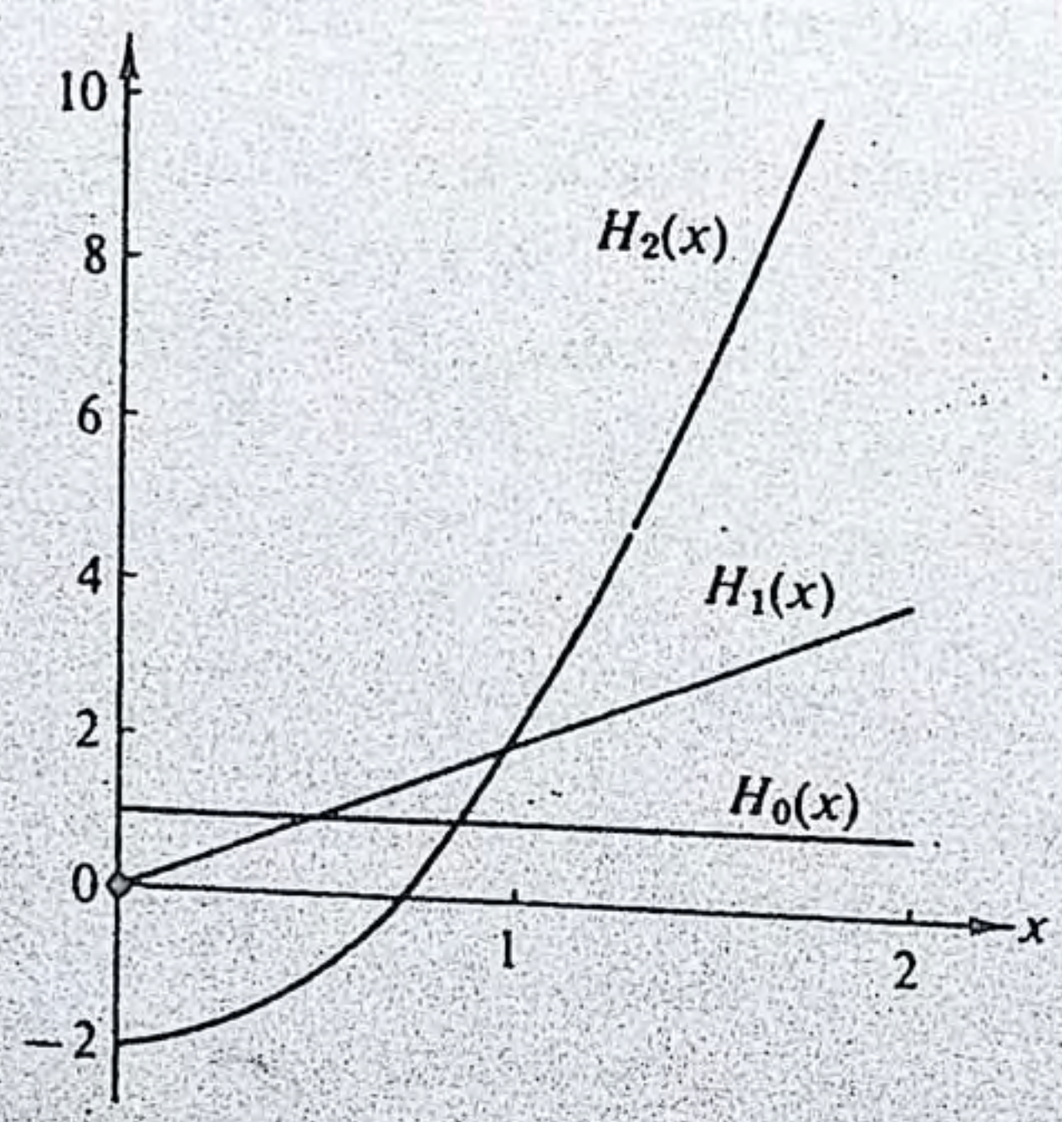


Fig. 13.1 Polinomios de Hermite

De la función generadora se derivan valores especiales de los polinomios de Hermite, es decir

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \tag{13.4}$$

$$H_{2n+1}(0) = 0. \tag{13.5}$$

De la función generadora también se puede obtener la relación de paridad importante

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x). \tag{13.6}$$

Representaciones Alternativas. La diferenciación de la función generadora[1] n veces con respecto a t y luego estableciendo t igual a cero proporciona

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}). \tag{13.7}$$

Esto proporciona la representación de Rodrigues para $H_n(x)$. Una segunda representación se puede obtener mediante el uso del cálculo de residuos (Capítulo 7). Si se multiplica la Ec. 13.1 por t^{-m-1} y se integra alrededor del origen, solamente queda el término con $H_m(x)$,

$$H_m(x) = \frac{m!}{2\pi i} \oint t^{-m-1} e^{-t^2+2tx}\, dt. \tag{13.8}$$

Asimismo, a partir de la Ec. 13.1, el polinomio de Hermite $H_n(x)$ se puede indicar en la forma de serie

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (2x)^n - \frac{2\,n!}{(n-2)!2!}(2x)^{n-2} + \frac{4\,n!}{(n-4)!4!}(2x)^{n-4} 1 \cdot 3 \cdots \\ &= \sum_{s=0}^{[n/2]} (-2)^s (2x)^{n-2s} \binom{n}{2s} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1) \\ &= \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s (2x)^{n-2s} \frac{n!}{(n-2s)!s!}. \end{aligned} \tag{13.9}$$

Esto es finito para n integral (entero) y proporciona el polinomio de Hermite.

Ortogonalidad. Las relaciones de recurrencia (Ecs. 13.2 y 13.3) originan la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$H_n''(x) - 2x\, H_n'(x) + 2n\, H_n(x) = 0 \tag{13.10}$$

[1] Vuelva a establecer la función generadora como $g(x, t) = e^{x^2} e^{-(t-x)^2}$. Observe que

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-x)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} e^{-(t-x)^2}.$$

la cual evidentemente *no* es autoadjunta. Para desarrollar las propiedades ortogonales de los polinomios de Hermite, es conveniente introducir un conjunto de funciones (no normalizadas) φ_n por medio de

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x). \tag{13.11}$$

La sustitución en la Ec. 13.10 da la ecuación diferencial para $\varphi_n(x)$,

$$\varphi_n''(x) + (2n + 1 - x^2)\, \varphi_n(x) = 0. \tag{13.12}$$

Esta es la ecuación diferencial para un oscilador armónico simple de la mecánica cuántica, que probablemente es la aplicación más importante de los polinomios de Hermite. La Ec. 13.12 es autoadjunta y las soluciones $\varphi_n(x)$ son ortonormales para el intervalo $(-\infty < x < \infty)$.

El problema de normalizar estas funciones aún continúa existiendo. Procediendo como en la Sección 12.3, se multiplica la Ec. 13.1 por sí misma y luego por e^{-x^2}. Esto proporciona

$$e^{-x^2} e^{-s^2+2sx} e^{-t^2+2tx} = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x) \frac{s^m t^n}{m!n!}. \tag{13.13}$$

Cuando se integra sobre x desde $-\infty$ hasta $+\infty$ los términos cruzados de la suma doble se eliminan debido a la propiedad de ortogonalidad[1]

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{n!n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_n(x)]^2\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-s^2+2sx-t^2+2tx}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s-t)^2} e^{2st}\, dx \\ &= \pi^{1/2} e^{2st} = \pi^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (st)^n}{n!}.\end{aligned} \tag{13.14}$$

Mediante la igualación de los coeficientes de potencias similares de st se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_n(x)]^2\, dx = 2^n \pi^{1/2} n!. \tag{13.15}$$

Oscilador Armónico Simple de la Mecánica Cuántica. Tal como se ha indicado anteriormente, los polinomios de Hermite se utilizan en el análisis del oscilador armónico simple de la mecánica cuántica. Para la energía potencial $V = \frac{1}{2}Kz^2$ (fuerza $\mathbf{F} = -\nabla V = -Kz$), la ecuación de onda de Schrödinger es

[1] Los términos cruzados $(m \neq n)$ se pueden conservar si así se desea. Luego, cuando los coeficientes de $s^\alpha t^\beta$ se igualen, la ortogonalidad será evidente.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(z)+\frac{1}{2}Kz^2\Psi(z)=E\Psi(z). \tag{13.16}$$

La partícula oscilante tiene una masa m y la energía total E. Mediante el uso de abreviaciones

$$x=\alpha z \qquad \text{con} \qquad \alpha^4=\frac{mK}{\hbar^2}=\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2},$$
$$\lambda=\frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{K}\right)^{1/2}=\frac{2E}{\hbar\omega}, \tag{13.17}$$

en donde ω es la frecuencia angular del oscilador clásico correspondiente, la Ec. 13.16 se transforma [con $\Psi(z)=\Psi(x/\alpha)=\psi(x)$]

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+(\lambda-x^2)\psi(x)=0. \tag{13.18}$$

Esta es la Ec. 13.12 con $\lambda=2n+1$. En consecuencia

$$\psi_n(x)=2^{-n/2}\pi^{-1/4}(n!)^{-1/2}e^{-x^2/2}H_n(x) \qquad \text{(normalizada).} \tag{13.19}$$

El requisito de que n sea un número entero está determinado por las condiciones limitantes del sistema mecánico cuántico,

$$\lim_{z\to\pm\infty}\Psi(z)=0.$$

Específicamente, si $n\to\nu$, no un número entero, la solución en serie de potencias de la Ec. 13.10 (Ejercicio 8.4.5) demuestra que $H_\nu(x)$ se comporta como $x^\nu e^{x^2}$ para x grande. Las funciones $\psi_\nu(x)$ y $\Psi_\nu(z)$ consecuentemente dejan de ser consistentes en el infinito y resulta imposible de normalizar la función de onda $\Psi(z)$. Con este requisito, la energía E se transforma en

$$E=(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega. \tag{13.20}$$

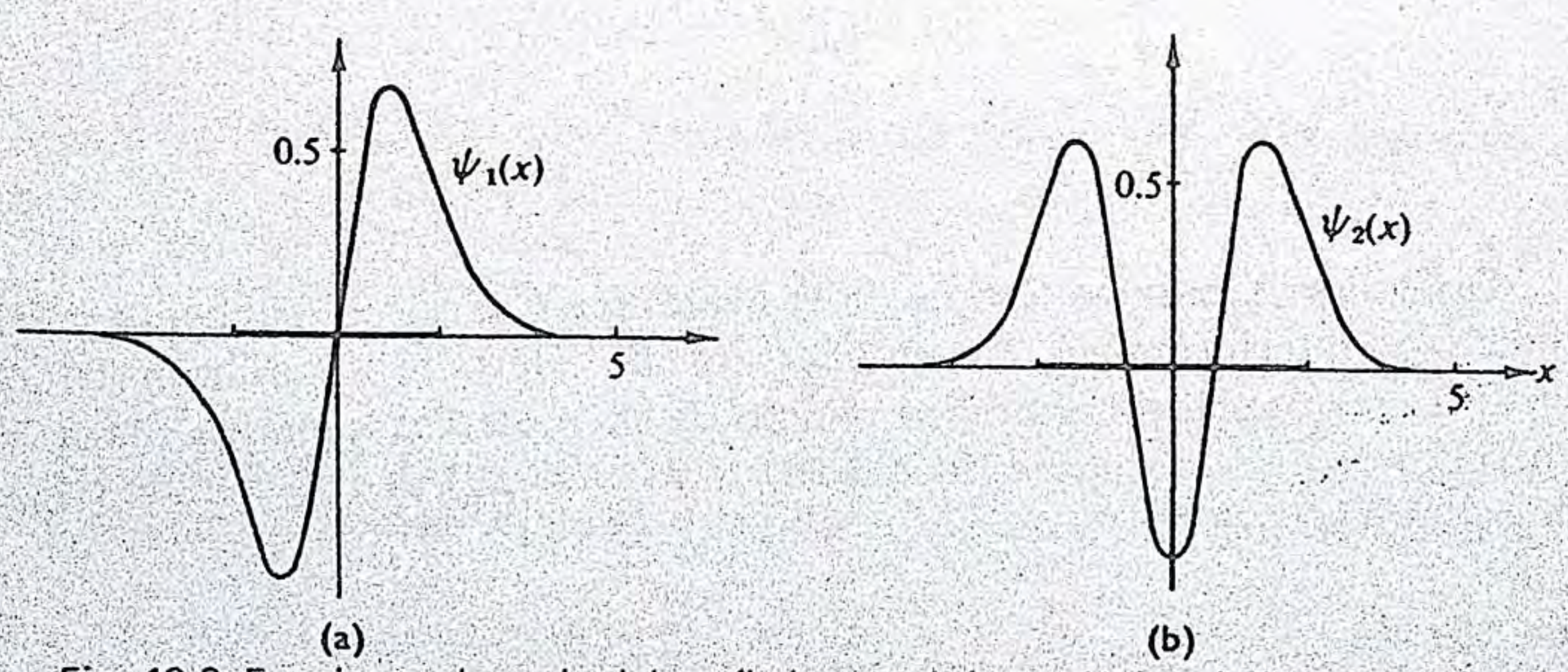


Fig. 13.2 Funciones de onda del oscilador mecánico cuántico: la línea gruesa en el eje de las x indica el intervalo permisible del oscilador clásico con la misma energía total

Ya que n varía dentro de valores integrales ($n \geqslant 0$), se observa que la energía es cuantificada y que existe un punto de energía mínima o cero

$$E_{\text{mín}} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega. \tag{13.21}$$

Este punto de energía cero representa en cierto aspecto el principio de la incertidumbre, un fenómeno meramente cuántico.

Un tratamiento alternativo del oscilador mecánico cuántico que se encuentra en muchos de los textos de la mecánica cuántica utiliza los operadores ascendentes y descendentes

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi_n(x) = n^{1/2}\psi_{n-1}(x), \tag{13.22a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\psi_n(x) = (n+1)^{1/2}\psi_{n+1}(x). \tag{13.22b}$$

La función de onda ψ_n (definida actualmente por la Ec. 13.19) es desconocida. El desarrollo es similar al uso de los operadores ascendentes y descendentes presentados en la Sección 12.7. La función de onda de energía mínima o estado básico ψ_0 satisface la ecuación

$$\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi_0(x) = 0. \tag{13.23}$$

Normalizada a la unidad

$$\psi_0(x) = \pi^{-1/4}e^{-\frac{1}{2}x^2}; \tag{13.23a}$$

en concordancia con la Ec. 13.19. Las funciones de onda de estado excitado, ψ_1, ψ_2, etc., se generan luego por medio del operador ascendente, Ec. 13.22*b*. La verificación de estos operadores ascendentes y descendentes, Ecs. 13.22*a* y 12.22*b*, se deja para el Ejercicio 13.1.4.

En los problemas de la mecánica cuántica, particularmente en la espectroscopia molecular, una diversidad de integrales de la forma siguiente es lo que se requiere

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, dx$$

Ejemplos de $r = 1$ y $r = 2$ (con $n = m$) se incluyen en los ejercicios al final de esta sección. Una gran variedad de otros ejemplos se pueden encontrar en la obra de Wilson, Decius y Cross.[1]

El potencial del oscilador ha sido utilizado ampliamente en los cálculos de la estructura nuclear (modelo de la cubierta de núcleo).

Existe una segunda solución independiente de la Ec. 13.10. Esta función de Hermite, de segunda clase, es una serie infinita (Secciones 8.4, 8.5) y no es de interés físico, al menos hasta ahora.

[1] Wilson, E., B. Jr., J. C. Decius y P. C. Cross, *Molecular Vibrations*. Nueva York: McGraw-Hill (1955).

EJERCICIOS

13.1.1 A partir de la función generadora, demuestre que

$$H_n(x) = \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \frac{n!}{(n-2s)!s!} (2x)^{n-2s}.$$

13.1.2 A partir de la función generadora, derive las relaciones de recurrencia

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x),$$
$$H_n'(x) = 2n\, H_{n-1}(x).$$

13.1.3 Demuestre que

$$\left(2x - \frac{d}{dx}\right)^n 1 = H_n(x).$$

Sugerencia. Compruebe el primer par de ejemplos y luego haga uso de la inducción matemática.

13.1.4 Demuestre que

$$|H_n(x)| \leq |H_n(ix)|.$$

13.1.5 Vuelva a establecer la forma de serie para $H_n(x)$, Ec. 13.9, como una serie de potencias *ascendentes.*
Respuesta.

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \sum_{s=0}^{n} (-1)^s (2x)^{2s} \frac{(2n)!}{(2s)!(n-s)!},$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \sum_{s=0}^{n} (-1)^s (2x)^{2s+1} \frac{(2n+1)!}{(2s+1)!(n-s)!}.$$

13.1.6 (a) Desarrolle x^{2r} en una serie de polinomios de Hermite de orden par.
(b) Desarrolle x^{2r+1} en una serie de polinomios de Hermite de orden impar.

Respuesta. (a) $x^{2r} = \dfrac{(2r)!}{2^{2r}} \displaystyle\sum_{n=0}^{r} \frac{H_{2n}(x)}{(2n)!(r-n)!}$

(b) $x^{2r+1} = \dfrac{(2r+1)!}{2^{2r+1}} \displaystyle\sum_{n=0}^{r} \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(r-n)!}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$

Sugerencia. Utilice la representación de Rodrigues de $H_{2n}(x)$ e integre por partes.

13.1.7 Demuestre que

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \exp[-x^2/2]\, dx = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, n!/(n/2)!, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} x H_n(x) \exp[-x^2/2]\, dx = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \sqrt{2\pi}\, \dfrac{(n+1)!}{\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

13.1.8 Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2} H_n(x)\, dx = 0 \quad \text{para } m \text{ número entero, } 0 \leqslant m \leqslant n-1.$$

13.1.9 La probabilidad de transición entre dos estados de oscilador, m y n, depende de

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, dx.$$

Demuestre que esta integral equivale a $\pi^{1/2}2^{n-1}n!\,\delta_{m,n-1} + \pi^{1/2}2^n(n+1)!\,\delta_{m,n+1}$. Este resultado demuestra que cada transición puede ocurrir solamente entre estados con niveles de energía adyacentes, $m = n \pm 1$. *Sugerencia.* Multiplique la función generadora (Ec. 13.1) por sí misma utilizando dos conjuntos distintos de variables (x, s) y (x, t).

13.1.10 Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2} H_n(x)\, H_n(x)\, dx = \pi^{1/2}2^n n!\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

La integral se presenta en el cálculo del desplazamiento medio cuadrático del oscilador cuántico. *Sugerencia.* Utilice la relación de recurrencia, Ec. 13.2, y la integral de ortogonalidad.

13.1.11 Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\,[-x^2]H_n(x)H_m(x)\, dx$$

en términos de n y m, así como las funciones delta de Kronecker apropiadas.

Respuesta. $2^{n-1}\pi^{1/2}(2n+1)n!\delta_{n,m} + 2^n\pi^{1/2}(n+2)!\delta_{n+2,m} + 2^{n-2}\pi^{1/2}n!\delta_{n-2,m}$.

13.1.12 Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r \exp\,[-x^2]H_n(x)H_{n+p}(x)\, dx = \begin{cases} 0, & p > r \\ 2^n\pi^{1/2}(n+r)!, & p = r. \end{cases}$$

en donde n, p y r son números enteros no negativos.

13.1.13 (a) Utilizando la fórmula de la integral de Cauchy, desarrolle una representación de integral de $H_n(x)$ basada en la Ec. 13.1 con el contorno encerrando el punto $z = -x$.

Respuesta. $H_n(x) = \dfrac{n!}{2\pi i} e^{x^2} \oint \dfrac{e^{-z^2}}{(z+x)^{n+1}}\, dz.$

(b) Demuestre mediante la sustitución directa que este resultado satisface la ecuación de Hermite.

13.1.14 Con

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)/(2^n n!\pi^{1/2})^{1/2},$$

verifique que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi_n(x) = n^{1/2}\psi_{n-1}(x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\psi_n(x) = (n+1)^{1/2}\psi_{n+1}(x).$$

Nota. El procedimiento del operador mecánico cuántico usual establece estas propiedades de ascenso y descenso *antes* de conocer la forma de $\psi_n(x)$.

13.1.15 (a) Verifique la identidad de operador

$$x - \frac{d}{dx} = -\exp[x^2/2]\frac{d}{dx}\exp[-x^2/2].$$

(b) La función de onda del oscilador armónico simple normalizado es

$$\psi_n(x) = (\pi^{1/2}2^n n!)^{-1/2}\exp[-x^2/2]H_n(x).$$

Demuestre que esto puede indicarse en la forma

$$\psi_n(x) = (\pi^{1/2}2^n n!)^{-1/2}\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp[-x^2/2].$$

Nota. Esto corresponde a la aplicación n veces del operador ascendente del Ejercicio 13.1.14.

13.2 Funciones de Laguerre

Ecuación Diferencial. Polinomios de Laguerre. Si se comienza con la función generadora adecuada, existe la posibilidad de desarrollar los polinomios de Laguerre en analogía exacta con los polinomios de Hermite. Alternativamente, se puede desarrollar una solución en serie mediante los métodos de la Sección 8.4. En lugar de esto, para ilustrar una técnica distinta, procederemos a comenzar con la ecuación diferencial de Laguerre y obtener una solución en la forma de una integral de contorno, del mismo modo que se efectuó con la función de Bessel modificada $K_\nu(x)$ (Sección 11.6). A partir de esta representación de integral, se procederá a derivar una función generadora.

La ecuación diferencial de Laguerre es

$$xy''(x) + (1 - x)\,y'(x) + n\,y(x) = 0. \tag{13.24}$$

Intentaremos representar y, o más bien y_n, ya que y depende de n, por medio de la integral de contorno

$$y_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}\,dz. \tag{13.25a}$$

El contorno incluye el origen pero no encierra el punto $z = 1$. De acuerdo con la Sección 6.4

$$y_n'(x) = -\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^2 z^n}\,dz, \tag{13.25b}$$

$$y_n''(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^3 z^{n-1}}\,dz. \tag{13.25c}$$

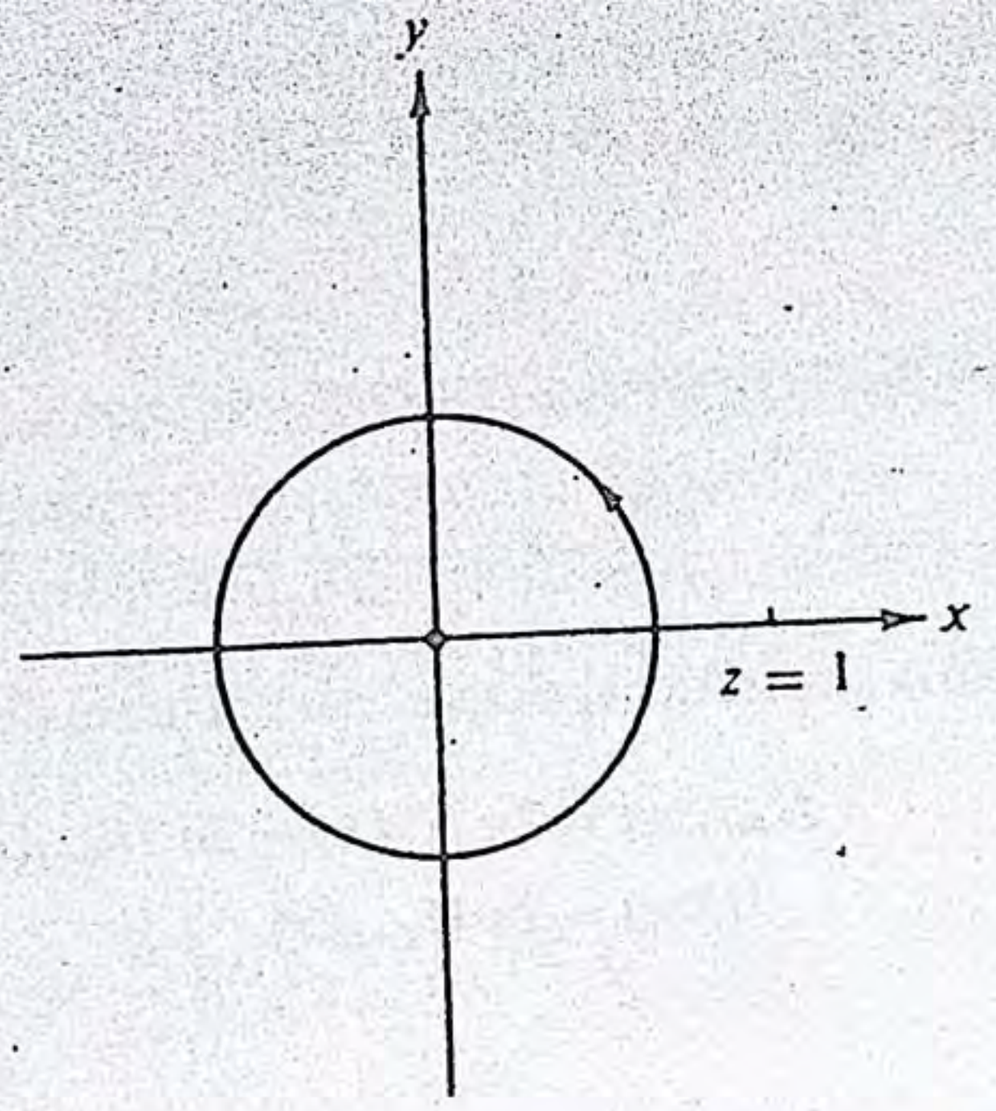


Fig. 13.3 Contorno de la función de Laguerre

Sustituyendo en el lado izquierdo de la Ec. 13.24, se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\left[\frac{x}{(1-z)^3z^{n-1}}-\frac{1-x}{(1-z)^2z^n}+\frac{n}{(1-z)z^{n+1}}\right]e^{-xz/(1-z)}\,dz,$$

lo cual equivale a

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^n}\right]dz. \tag{13.26}$$

Si se integra esta diferencial perfecta alrededor de un contorno seleccionado de modo que el valor final sea equivalente al valor inicial (Fig. 13.3), la integral desaparece, verificando así que $y_n(x)$ (Ec. 13.25*a*) es una solución de la ecuación de Laguerre.

Es costumbre definir a $L_n(x)$, el polinomio de Laguerre, por

$$L_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}\,dz. \tag{13.27}$$

Esto es exactamente lo que se obtendría a partir de la serie

$$g(x,z)=\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)z^n,\qquad |z|<1 \tag{13.28}$$

si se multiplicara por z^{-n-1} y se integrara alrededor del origen. Del mismo modo que en el cálculo de residuos (Sección 7.2), solamente el término z^{-1} en la serie es el que permanece. Sobre esta base se identifica a $g(x, z)$ como la función generadora para los polinomios de Laguerre.

Con la transformación

$$\frac{xz}{1-z}=s-x \quad \text{o} \quad z=\frac{s-x}{s}, \tag{13.29}$$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{2\pi i} \oint \frac{s^n e^{-s}}{(s-x)^{n+1}}\, ds, \tag{13.30}$$

el nuevo contorno encierra el punto $s = x$ en el plano s. Por medio de la fórmula de la integral de Cauchy (para derivadas)

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \qquad (n \text{ integral}), \tag{13.31}$$

proporcionando así la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre. A partir de estas representaciones de $L_n(x)$ se encuentra la forma de serie (para n integral):

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!}\left[x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} - \cdots + (-1)^n n!\right], \\ &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!m!m!} x^m = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \frac{n!x^{n-s}}{(n-s)!(n-s)!s!} \end{aligned} \tag{13.32}$$

y los polinios específicos que se incluyen en la Tabla 13.2.

Mediante la diferenciación de la función generadora en la Ec. 13.28, con respecto a x y z, se obtienen las relaciones de recurrencia

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n\,L_{n-1}(x), \tag{13.33}$$

$$x\,L_n'(x) = n\,L_n(x) - n\,L_{n-1}(x). \tag{13.34}$$

en que la Ec. 13.33 se modifica para indicar

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= 2L_n(x) - L_{n-1}(x) \\ &\quad - [(1+x)L_n(x) - L_{n-1}(x)]/(n+1), \end{aligned} \tag{13.33a}$$

debido a razones de economía y estabilidad numérica, se utiliza para el cómputo por medio de máquina de los valores numéricos de $L_n(x)$. La máquina computadora comienza con los valores numéricos conocidos de $L_0(x)$ y $L_1(x)$, Tabla 13.2, y continúa trabajando paso por paso, en mi-

TABLE 13.2

Polinomios de Laguerre

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x + 1 \\ 2!\,L_2(x) &= x^2 - 4x + 2 \\ 3!\,L_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \\ 4!\,L_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \\ 5!\,L_5(x) &= -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120 \\ 6!\,L_6(x) &= x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720 \end{aligned}$$

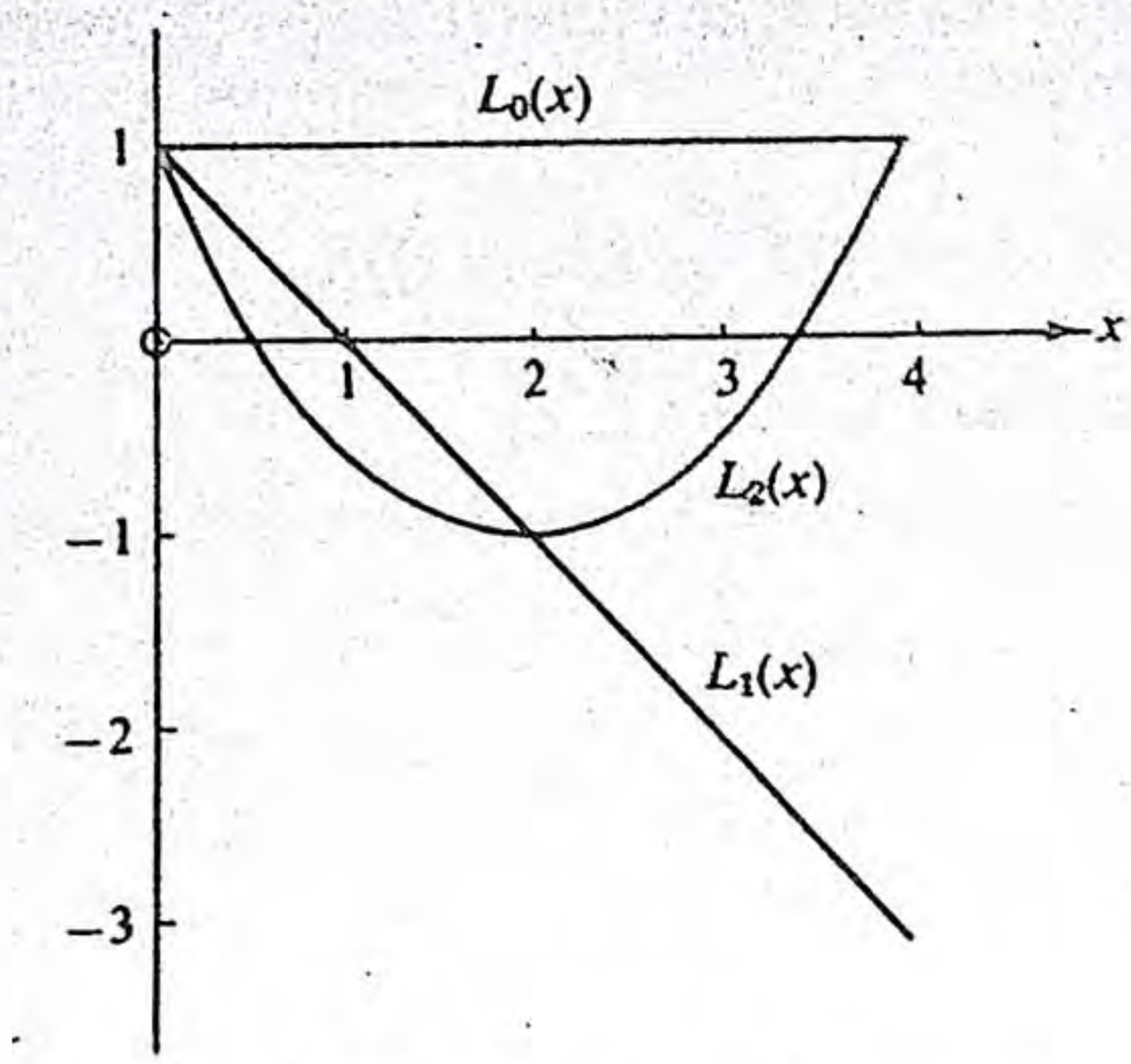


Fig. 13.4 Polinomios de Laguerre

lisegundos. Esto constituye la misma técnica descrita para el cómputo de los polinomios de Legendre, Sección 12.2.

Asimismo, de acuerdo con la Ec. 13.28, se encuentra el valor especial

$$L_n(0) = 1. \tag{13.35}$$

Como puede observarse de la forma de la función generadora, la forma de la ecuación diferencial de Laguerre, o a partir de la Tabla 13.2, los polinomios de Laguerre no tienen simetría par o impar (paridad).

La ecuación diferencial de Laguerre no es autoadjunta y los polinomios de Laguerre, $L_n(x)$, no forman por sí mismos un conjunto ortogonal. Sin embargo, el conjunto de funciones relacionadas[1]

$$\varphi_n(x) = e^{-x/2}\, L_n(x) \tag{13.36}$$

es ortonormal para el intervalo $(0 \leqslant x < \infty)$, es decir

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x)\, L_n(x)\, dx = \delta_{m,n}. \tag{13.37}$$

La nueva función ortonormal $\varphi_n(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$x\, \varphi_n''(x) + \varphi_n'(x) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) \varphi_n(x) = 0, \tag{13.38}$$

en la cual se observa la presencia de la forma de Sturm-Liouville (autoadjunta). Observe que son las condiciones limitantes de la teoría de Sturm-Liouville las que fijan el intervalo a $(0 \leqslant x < \infty)$. La Ec. 13.37 se puede verificar mediante el uso de la función generadora (Ec. 13.28)

[1] El factor $e^{-x/2}$ se puede derivar mediante el método de la Sección 9.1.

Polinomios de Laguerre Asociados. En muchas aplicaciones, principalmente en la teoría cuántica, se requiere de los polinomios de Laguerre asociados definidos por[1].

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[L_{n+k}(x)]. \tag{13.39}$$

De acuerdo con la forma de serie de $L_n(x)$

$$\begin{aligned} L_0^k(x) &= 1 \\ L_1^k(x) &= -x + k + 1 \\ L_2^k(x) &= \frac{x^2}{2} - (k+2)x + \frac{(k+2)(k+1)}{2}. \end{aligned} \tag{13.40}$$

En general

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!} x^m, \quad (k > -1). \tag{13.41}$$

Se puede desarrollar una función generadora mediante la diferenciación de la función generadora k veces. Ajustando el índice a L_{n+k}, se obtiene

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) z^n, \qquad |z| < 1. \tag{13.42}$$

A partir de esto

$$L_n^k(0) = \frac{(n+k)!}{n!k!}. \tag{13.43}$$

Las relaciones de recurrencia se pueden establecer con facilidad a partir de la función generadora o por medio de la diferenciación de las relaciones de recurrencia polinomial de Laguerre. Dentro de la gran diversidad de posibilidades se tiene

$$(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n + k + 1 - x)\, L_n^k(x) - (n+k)\, L_{n-1}^k(x) \tag{13.44}$$

$$xL_n^{k\prime}(x) = n\, L_n^k(x) - (n+k)\, L_{n-1}^k(x). \tag{13.45}$$

A partir de estas o de la diferenciación k veces de la ecuación diferencial de Laguerre se tiene la ecuación de Laguerre asociada

$$x\, L_n^{k\prime\prime}(x) + (k + 1 - x)\, L_n^{k\prime}(x) + n\, L_n^k(x) = 0. \tag{13.46}$$

La representación de Rodrigues para el polinomio de Laguerre asociado es

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+k}). \tag{13.47}$$

[1] Algunos usan $\mathscr{L}_{n+k}^k(x) = (d^k/dx^k)[L_{n+k}(x)]$. Por tanto $L_n^k(x) = (-1)^k \mathscr{L}_{n+k}^k(x)$.

El lector habrá de notar que todas estas fórmulas de $L_n^k(x)$ se reducen a las expresiones correspondientes para $L_n(x)$ cuando $k = 0$.

La ecuación de Laguerre asociada (13.46) no es autoadjunta, pero se puede pasar a la forma autoadjunta mediante la multiplicación por $e^{-x}x^k$, lo cual se convierte en la función ponderatriz (Sección 9.1). Se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-x}x^k\, L_n^k(x)\, L_m^k(x)\, dx = \frac{(n+k)!}{n!}\,\delta_{m,n}. \tag{13.48}$$

Permitiendo que $\psi_n^k(x) = e^{-x/2}x^{k/2}\, L_n^k(x)$, $\psi_n^k(x)$ satisface la ecuación autoadjunta

$$x\,\psi_n^{k\prime\prime}(x) + \psi_n^{k\prime}(x) + \left(-\frac{x}{4} + \frac{2n+k+1}{2} - \frac{k^2}{4x}\right)\psi_n^k(x) = 0. \tag{13.49}$$

Una forma adicional de utilidad queda establecida al definir[1]

$$\Phi_n^k(x) = e^{-x/2}x^{(k+1)/2}\, L_n^k(x). \tag{13.50}$$

La sustitución en la ecuación de Laguerre asociada proporciona

$$\Phi_n^{k\prime\prime}(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{2n+k+1}{2x} - \frac{k^2-1}{4x^2}\right)\Phi_n^k(x) = 0. \tag{13.51}$$

La integral de normalización correspondiente es

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}\, L_n^k(x)\, L_n^k(x)\, dx = \frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1). \tag{13.52}$$

El lector puede demostrar que $\Phi_n^k(x)$ *no* forma un conjunto ortogonal (excepto para x^{-1} como función ponderatriz) debido a x^{-1} en el término $(2n+k+1)/2x$.

EJEMPLO 13.2.1 EL ATOMO DE HIDROGENO

Probablemente la aplicación simple más importante de los polinomios de Laguerre es la solución de la ecuación de onda de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. Esta ecuación es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{Ze^2}{r}\psi = E\psi, \tag{13.53}$$

en donde $Z = 1$ para el átomo de hidrógeno, 2 para el helio ionizado simplemente y así sucesivamente. Mediante la separación de variables, se encuentra que la dependencia angular de ψ es $Y_L^M(\theta, \varphi)$. La parte radial, $R(r)$,

[1] Esto corresponde a modificar la función ψ en la Ec. 13.49 para eliminar la primera derivada (Cf. Ejercicio 8.5.7).

satisface la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{Ze^2}{r}R+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{L(L+1)}{r^2}R=ER. \tag{13.54}$$

Mediante el uso de abreviaciones

$$\rho=\alpha r \quad \text{con } \alpha^2=-\frac{8mE}{\hbar^2}, \qquad (E<0),$$
$$\lambda=\frac{2mZe^2}{\alpha\hbar^2}, \tag{13.55}$$

la Ec. 13.54 se transforma en

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\chi(\rho)}{d\rho}\right)+\left(\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{L(L+1)}{\rho^2}\right)\chi(\rho)=0, \tag{13.56}$$

en donde $\chi(\rho)=R(\rho/\alpha)$. La comparación con la Ec. 13.51 para $\Phi_n^k(x)$ demuestra que la Ec. 13.56 queda satisfecha por

$$\rho\chi(\rho)=e^{-\rho/2}\rho^{L+1}L_{\lambda-L-1}^{2L+1}(\rho), \tag{13.57}$$

en donde k se sustituye por $2L+1$ y n por $\lambda-L-1$.

El parámetro λ debe restringirse al requerir que n sea un número entero, $n, n=1, 2\ 3, \ldots$.[1] Esto es necesario debido a que la función de Laguerre para n no integral diverge igual que $\rho^n e^\rho$, lo cual no es aceptable para nuestro problema físico en que

$$\lim_{r\to\infty} R(r)=0.$$

La restricción en λ, impuesta por la condición limitante, tiene el efecto de cuantificar la energía

$$E_n=-\frac{Z^2me^4}{2n^2\hbar^2}. \tag{13.58}$$

El signo negativo interviene debido a que en este caso se trata con los estados enlazados, $E=0$, correspondientes a un electrón que tiene justamente la capacidad para escapar al infinito. Utilizando este resultado para E_n, se tiene

$$\alpha=2\frac{me^2}{\hbar^2}\cdot\frac{Z}{n}=\frac{2Z}{na_0}$$

[1] Esto constituye la notación convencional para λ. No es la misma n que el índice n en $\Phi_n^k(x)$.

$$\rho = \frac{2Z}{na_0} r \tag{13.59}$$

con

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \qquad \text{el radio de Bohr}$$

La función de onda del hidrógeno normalizada final se puede indicar en la forma

$$\psi_{nLM}(r, \theta, \varphi) = \left[\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-L-1)!}{2n(n+L)!}\right]^{1/2} \times e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r)\, Y_L^M(\theta, \varphi). \tag{13.60}$$

EJERCICIOS

13.2.1 Demuestre con la ayuda de la fórmula de Leibnitz que el desarrollo en serie de $L_n(x)$ (Ec. 13.32) se deriva de la representación de Rodrigues (Ec. 13.31).

13.2.2 (a) Utilizando la forma de serie explícita (Ec. 13.32), demuestre que

$$L_n'(0) = -n$$
$$L_n''(0) = \tfrac{1}{2}n(n-1).$$

(b) Repita sin utilizar la forma de serie explícita de $L_n(x)$.

13.2.3 A partir de la función generadora, derive la representación de Rodrigues

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+k}).$$

13.2.4 Derive la relación de normalización (Ec. 13.48) para los polinomios de Laguerre asociados.

13.2.5 Desarrolle x^r en una serie de polinomios de Laguerre asociados $L_n^k(x)$, k fija y n con variación desde 0 hasta r (o hasta ∞ si r no es un número entero).
Sugerencia. La forma de Rodrigues de $L_n^k(x)$ será de utilidad.

$$\textit{Respuesta.}\quad x^r = (r+k)!r! \sum_{n=0}^{r} \frac{(-1)^n L_n^k(x)}{(n+k)!(r-n)!}, \qquad 0 \le x < \infty.$$

13.2.6 Desarrolle e^{-ax} en una serie de polinomios de Laguerre asociados $L_n^k(x)$, k fija y n con variación de 0 a ∞.
(a) Evalúe directamente los coeficientes en el desarrollo supuesto.
(b) Establezca el desarrollo deseado a partir de la función generadora.

$$\textit{Respuesta.}\quad e^{-ax} = \frac{1}{(1+a)^{1+k}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^n L_n^k(x), \qquad 0 \le x < \infty.$$

13.2.7 Demuestre que

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}\,L_n^k(x)\,L_n^k(x)\,dx = \frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1).$$

Sugerencia. Observe que

$$xL_n^k = (2n+k+1)\,L_n^k - (n+k)\,L_{n-1}^k - (n+1)\,L_{n+1}^k.$$

13.2.8 Suponga que un problema particular en la mecánica cuántica ha originado la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left[\frac{k^2-1}{4x^2} - \frac{2n+k+1}{2x} + \frac{1}{4}\right]y = 0.$$

Establezca $y(x)$ en la forma

$$y(x) = A(x)B(x)C(x)$$

con el requisito de que

(a) $A(x)$ sea un exponencial *negativo* que define el comportamiento asintótico de $y(x)$, y

(b) $B(x)$ es potencia *positiva* de x que define el comportamiento de $y(x)$ para $x \ll 1$.

Determine $A(x)$ y $B(x)$. Encuentre la relación entre $C(x)$ y el polinomio de Laguerre asociado.

Respuesta. $A(x) = e^{-x/2}$
$B(x) = x^{(k+1)/2}$,
$C(x) = L_n^k(x)$.

13.2.9 De acuerdo con la Ec. 13.60, la parte radial normalizada de la función de onda hidrogénica es

$$R_{nL}(r) = \left[\alpha^3\frac{(n-L-1)!}{2n(n+L)!}\right]^{1/2} e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L\,L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r),$$

en donde $\alpha = 2Z/na_0 = 2Zme^2/n\hbar^2$. Evalúe

(a) $\langle r\rangle = \int_0^\infty r\,R_{nL}(\alpha r)\,R_{nL}(\alpha r)r^2\,dr$, (b) $\langle r^{-1}\rangle = \int_0^\infty r^{-1}\,R_{nL}(\alpha r)\,R_{nL}(\alpha r)r^2\,dr$.

La cantidad $\langle r\rangle$ es el desplazamiento promedio del electrón con respecto al núcleo, mientras que $\langle r^{-1}\rangle$ es el promedio del movimiento recíproco.

Respuesta. $\langle r\rangle = \frac{a_0}{2}[3n^2 - L(L+1)]$

$$\langle r^{-1}\rangle = \frac{1}{n^2a_0}.$$

13.2.10 Derive la relación de recurrencia para los valores esperados de la función de onda del hidrógeno.

$$\frac{s+2}{n^2}\langle r^{s+1}\rangle - (2s+3)a_0\langle r^s\rangle + \frac{s+1}{4}[(2L+1)^2-(s+1)^2]a_0^2\langle r^{s-1}\rangle = 0$$

con $s \geq -2L-1$. $\langle r\rangle \equiv \overline{r^s}$.

Sugerencia. Transforme la Ec. 13.56 en una forma análoga a la Ec. 13.51. Multi-

plique por $\rho^{s+2}u' - c\rho^{s+1}u$. Aquí, $u = \rho\chi$. Ajuste c para cancelar los términos que no proporcionan valores esperados.

13.2.11 Las funciones de onda del hidrógeno, Ec. 13.60, son mutuamente ortogonales, como debiera ser, ya que son funciones propias de la ecuación de Schrödinger autoadjunta

$$\int \psi^*_{n_1L_1M_1}\psi_{n_2L_2M_2} r^2\, dr\, d\Omega = \delta_{n_1n_2}\delta_{L_1L_2}\delta_{m_1m_2}$$

Sin embargo, la integral radial tiene la forma (engañosa)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L^{2L+1}_{n_1-L-1}(\alpha r) e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L^{2L+1}_{n_2-L-1}(\alpha r)^2\, dr$$

que *aparentemente* es consistente con la Ec. 13.52 y no con la relación de ortogonalidad de Laguerre asociada, Ec. 13.48. ¿Cómo puede resolverse esta paradoja?

Respuesta. El parámetro α es dependiente de n. las tres primeras α de arriba son $2Z/n_1a_0$. Las tres últimas son $2Z/n_2a_0$. Para $n_1 = n_2$ se aplica la Ec. 13.52. Para $n_1 \neq n_2$, ninguna de las Ecs. 13.48 y 13.52 pueden aplicarse.

13.2.12 Un análisis mecánico cuántico del efecto Stark (coordenadas parabólicas) origina la ecuación diferencial

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{du}{d\xi}\right) + \left(\frac{1}{2}E\xi + L - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{1}{4}F\xi^2\right)u = 0.$$

En este caso F es una medida de la energía de perturbación introducida por un campo eléctrico externo. Encuentre las funciones de onda sin perturbar ($F = 0$) en términos de los polinomios de Laguerre asociados.

Respuesta. $u(\xi) = e^{-\varepsilon\xi/2}\xi^{m/2}L_p^m(\varepsilon\xi)$, con $\varepsilon = \sqrt{-2E} > 0, p = \alpha/\varepsilon - (m+1)/2$, un número entero no negativo.

13.2.13 La ecuación de onda para el oscilador armónico tridimensional es

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + \tfrac{1}{2}M\omega^2r^2\psi = E\psi.$$

Aquí, ω es la frecuencia angular del oscilador clásico correspondiente. Demuestre que la parte radial de ψ (en coordenadas polares esféricas) se puede indicar en términos de las funciones de Laguerre asociadas con el argumento (βr^2), en donde $\beta = M\omega/\hbar$.

Sugerencia. De manera similar al Ejercicio 13.2.8, separe los factores radiales de r^l y $e^{-\beta r^2/2}$. La función de Laguerre asociada tendrá la forma $L^{l+1/2}_{(n-l-1)/2}(\beta r^2)$.

13.3 Polinomios de Chebyshev (Tschebyscheff)

Función Generadora. En el Capítulo 12 se ha mencionado la función generadora de los polinomios de Gegenbauer o ultraesféricos[1]

$$\frac{2^\beta}{(1-2xt+t^2)^{\beta+1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{(\beta-\frac{1}{2})!}\sum_{n=0}^{\infty} T_n^\beta(x)t^n, \qquad |t| < 1 \tag{13.61}$$

[1] AMS-55 designa los polinomios ultraesféricos por $C_n^{(\alpha)}(x)$:

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\pi^{1/2}}{2^{\alpha-1/2}(\alpha-1)!}T_n^{\alpha-1/2}(x), \quad \frac{n}{2}C_n^{(0)}(x) = T_n(x), \quad C_n^{(1/2)}(x) = P_n(x), \quad C_n^{(1)}(x) = U_n(x).$$

en que $\beta = 0$ origina los polinomios de Legendre. En este capítulo, al permitir que $\beta = \pm\frac{1}{2}$, se pueden originar dos conjuntos de polinomios que se conocen como los polinomios de Chebyshev.

Tipo III. Con $\beta = +\frac{1}{2}$, la Ec. 13.61 se transforma en

$$\frac{2^{1/2}}{(1 - 2xt + t^2)} = \pi^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{1/2}(x) t^n. \tag{13.62}$$

Es conveniente cambiar la notación ligeramente y utilizar

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, T_n^{1/2}(x) \equiv U_n(x). \tag{13.63}$$

Esto proporciona

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n. \tag{13.64}$$

Las funciones $U_n(x)$ generadas por $(1 - 2xt + t^2)^{-1}$ se denominan polinomios de Chebyshev del tipo II.

Tipo I. Con $\beta = -\frac{1}{2}$ se tiene dificultades. La dependencia en t y x en la izquierda desaparece y $(\beta - \frac{1}{2})!$ deja de ser consistente. Esta dificultad se puede evitar al diferenciar primeramente la Ec. 13.61 con respecto a t y luego estableciendo $\beta = -\frac{1}{2}$. Esto proporciona

$$\frac{x - t}{1 - 2xt + t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n\, T_n^{-1/2}(x) t^{n-1}. \tag{13.65}$$

Al multiplicar la Ec. 13.65 por $2t$ y sumando se obtiene

$$\frac{1 - t^2}{1 - 2tx + t^2} = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} 2n\, T_n^{-1/2}(x) t^n. \tag{13.66}$$

Para $n > 0$, $T_n(x)x$ se define en la forma

$$T_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, n\, T_n^{-1/2}(x). \tag{13.67}$$

Siendo así

$$\frac{1 - t^2}{1 - 2tx + t^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n. \tag{13.68}$$

Para $n = 0$, se define

$$T_0(x) = 1 \tag{13.69}$$

para conservar la relación de recurrencia (Ec. 13.70). $T_n(x)$ se denomina polinomios de Chebyshev del tipo I. Es de advertirse al lector que la notación para estas funciones difiere de una referencia a la otra. Casi no existe acuerdo general. En este libro se sigue la notación de AMS-55.

Estos polinomios de Chebyshev (tipo I) combinan características útiles de (a) la serie de Fourier y (b) los polinomios ortogonales. Son de gran interés en el cómputo numérico. Por ejemplo, la aproximación por mínimos cuadrados reduce al mínimo el error promedio cuadrático. La aproximación utilizando los polinomios de Chebyshev permite un mayor error promedio cuadrático aunque puede originar que los errores extremos sean bajos.

A partir de las funciones generadoras (Ecs. 13.64 y 13.68) se obtienen las relaciones de recurrencia

$$T_{n+1}(x) - 2x\, T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \tag{13.70}$$

$$U_{n+1}(x) - 2x\, U_n(x) + U_{n-1}(x) = 0. \tag{13.71}$$

Luego, al utilizar las funciones generadoras para los primeros valores de n y estas relaciones de recurrencia para los polinomios de orden superior, se obtienen las Tablas 13.3 y 13.4.

Del mismo modo que con los polinomios de Hermite, Sección 13.1, las relaciones de recurrencia, Ecs. 13.70 y 13.71, conjuntamente con los valores conocidos de $T_0(x)$, $T_1(x)$, $U_0(x)$ y $U_1(x)$, proporcionan un elemento adecuado para obtener el valor numérico de cualquier $T_n(x_0)$ o $U_n(x_0)$, en que x_0 es cierto número: el término conveniente debe considerarse desde el punto de vista de la computadora electrónica de alta velocidad.

TABLA 13.3

Polinomios de Chebyshev, Tipo I

$T_0 = 1$
$T_1 = x$
$T_2 = 2x^2 - 1$
$T_3 = 4x^3 - 3x$
$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
$T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

TABLA 13.4

Polinomios de Chebyshev, Tipo II

$U_0 = 1$
$U_1 = 2x$
$U_2 = 4x^2 - 1$
$U_3 = 8x^3 - 4x$
$U_4 = 16x^4 - 12x^2 + 1$
$U_5 = 32x^5 - 32x^3 + 6x$
$U_6 = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

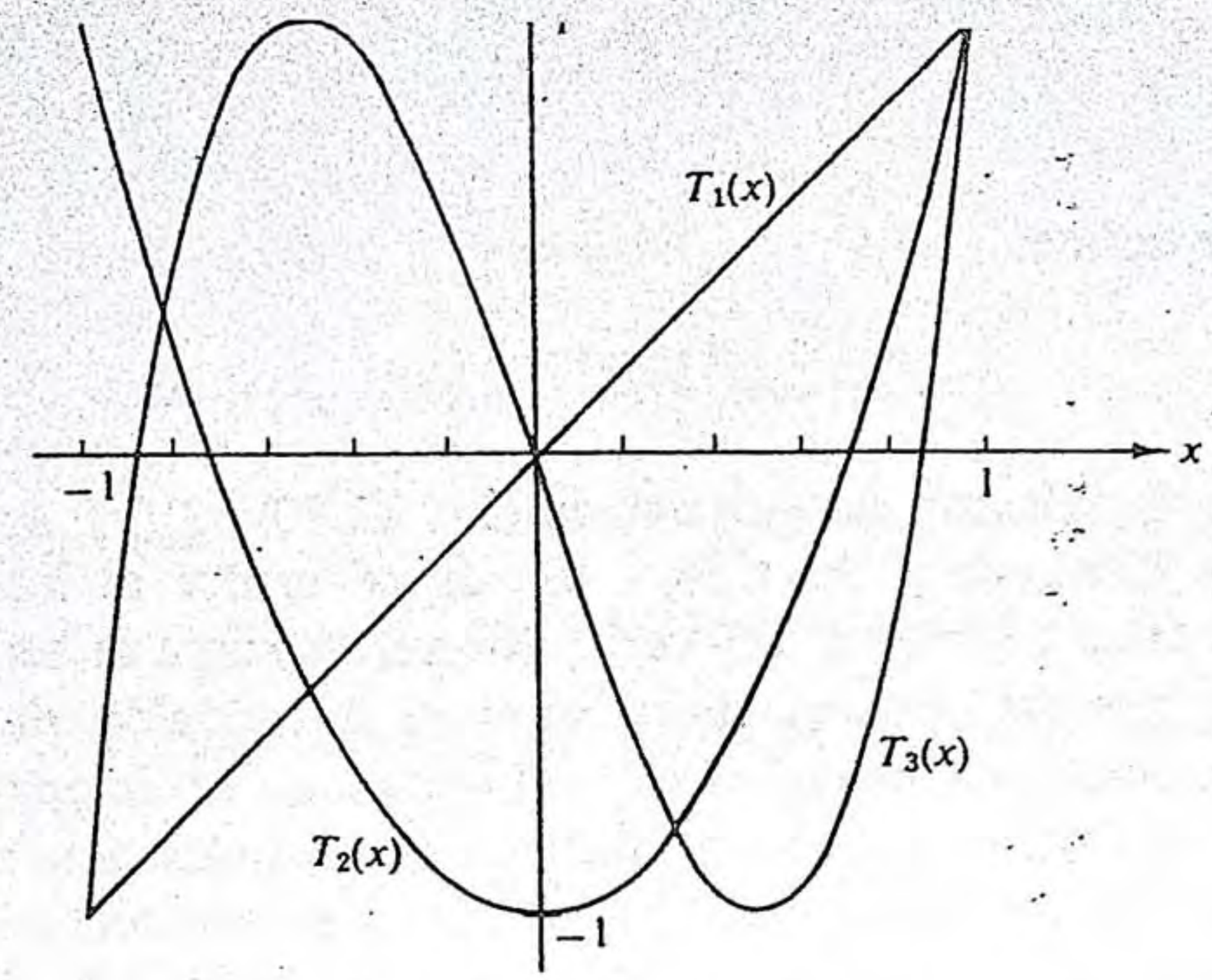


Fig. 13.5 Polinomios de Chebyshev, $T_n(x)$

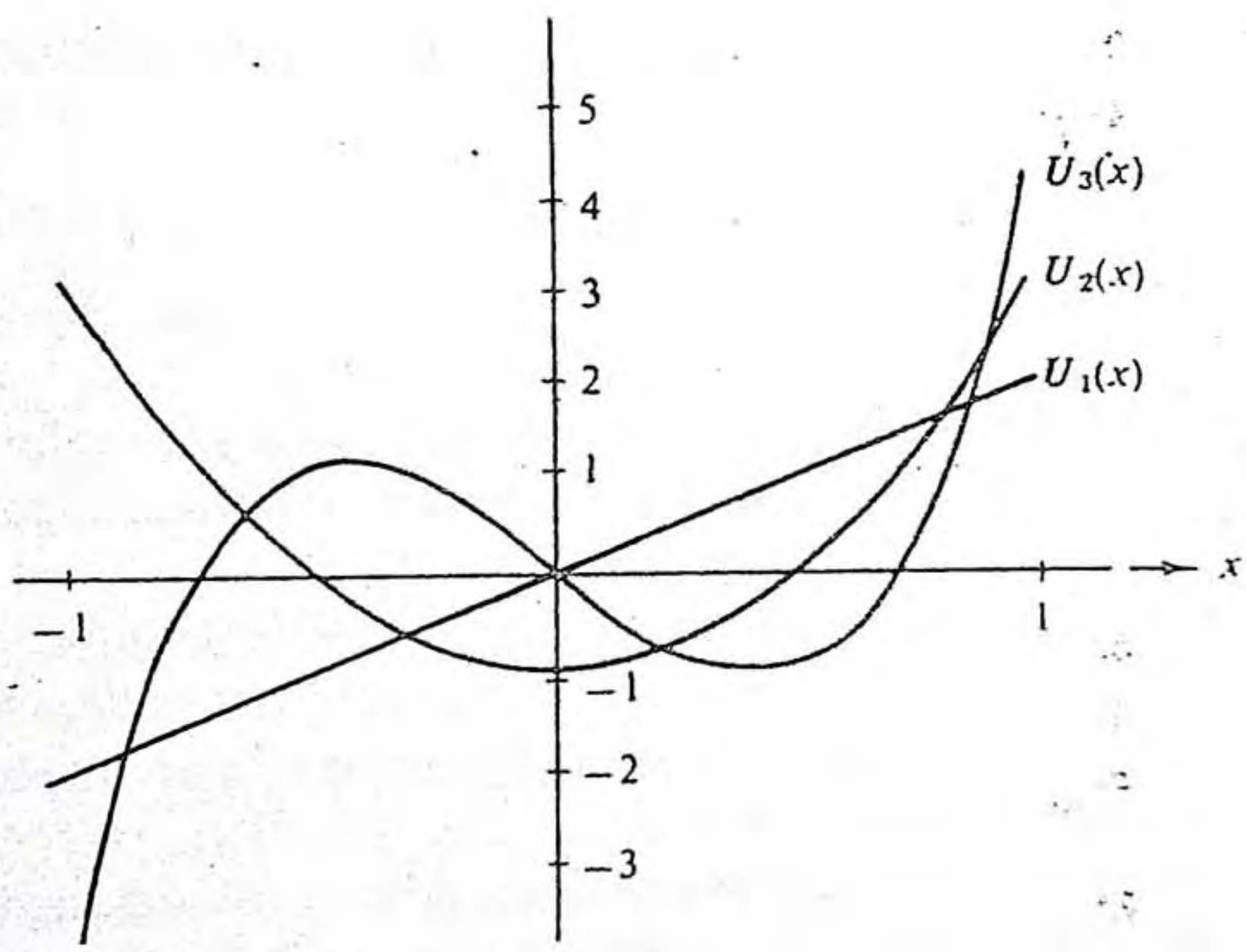


Fig. 13.6 Polinomios de Chebyshev, $U_n(x)$

Nuevamente, a partir de las funciones generadoras, se tienen los valores especiales

$$\begin{aligned} T_n(1) &= 1 \\ T_n(-1) &= (-1)^n \\ T_{2n}(0) &= (-1)^n \\ T_{2n+1}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{13.72}$$

$$\begin{aligned} U_n(1) &= n+1 \\ U_n(-1) &= (-1)^n(n+1) \\ U_{2n}(0) &= (-1)^n \\ U_{2n+1}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{13.73}$$

Las relaciones de paridad para T_n y U_n son

$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$$
$$U_n(x) = (-1)^n U_n(-x). \tag{13.74}$$

Las representaciones de Rodrigues de $T_n(x)$ y $U_n(x)$ son

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \pi^{1/2}(1-x^2)^{1/2}}{2^n(n-\frac{1}{2})!} \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}], \tag{13.75}$$

y

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n(n+1)\pi^{1/2}}{2^{n+1}(n+\frac{1}{2})!(1-x^2)^{1/2}} \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+1/2}]. \tag{13.76}$$

Relaciones de Recurrencia. Derivadas. A partir de las funciones generadoras para $T_n(x)$ y $U_n(x)$, se puede obtener una diversidad de relaciones de recurrencia que implican derivadas. Dentro de las ecuaciones de mayor utilidad se tiene

$$(1-x^2)\, T_n'(x) = -nx\, T_n(x) + n\, T_{n-1}(x), \tag{13.77}$$

y

$$(1-x^2)\, U_n'(x) = -nx\, U_n(x) + (n+1)\, U_{n-1}(x). \tag{13.78}$$

De acuerdo con las Ecs. 13.70 y 13.77, el polinomio de Chebyshev de tipo I, $T_n(x)$, satisface

$$(1-x^2)\, T_n''(x) - x\, T_n'(x) + n^2\, T_n(x) = 0, \tag{13.79}$$

mientras que $U_n(x)$, o sea el polinomio de Chebyshev del tipo II, satisface

$$(1-x^2)\, U_n''(x) - 3x\, U_n'(x) + n(n+2)\, U_n(x) = 0. \tag{13.80}$$

La ecuación de Gegenbauer,

$$(1-x^2)y'' - 2(1+\beta)xy' + n(n+2\beta+1)y = 0, \tag{13.81}$$

es una generalización de estas ecuaciones reduciéndose a la Ec. 13.79 para $\beta = -\frac{1}{2}$, a la Ec. 13.80 para $\beta = +\frac{1}{2}$, y a la ecuación de Legendre para $\beta = 0$.

Algunas veces es conveniente definir una nueva función, $V_n(x)$, en términos de los polinomios del tipo II mediante

$$V_{n+1}(x) = \sqrt{1-x^2}\, U_n(x). \tag{13.82}$$

Observe que el índice se ha incrementado de n hasta $n+1$. Se puede demostrar que $V_n(x)$ satisface la Ec. 13.79.

A partir de las funciones generadoras, o de acuerdo con las ecuaciones diferenciales, las representaciones de serie de potencias son

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m},$$

$$= x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots, \tag{13.83}$$

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m \frac{(n-m)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}. \tag{13.84}$$

Utilizando la Ec. 13.82 se obtiene

$$V_n(x) = \sqrt{1-x^2}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} - \binom{n}{3}x^{n-3}(1-x^2) + \binom{n}{5}x^{n-5}(1-x^2)^2 - \cdots\right]. \tag{13.85}$$

La combinación de la Ec. 13.83 con la Ec. 13.85 produce

$$T_n(x) + i\,V_n(x) = [x + i(1-x^2)^{1/2}]^n \qquad |x| \leqslant 1. \tag{13.86}$$

Ortogonalidad. Si la Ec. 13.79 se convierte en la forma autoadjunta (Sección 9.1), se obtiene $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ como factor ponderador. Para la Ec. 13.80, el factor ponderador correspondiente es $(1-x^2)^{+1/2}$. Las integrales de ortogonalidad resultantes son

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\,T_n(x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0, \end{cases} \tag{13.87}$$

$$\int_{-1}^{1} V_m(x)\,V_n(x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ 0, & m = n = 0, \end{cases} \tag{13.88}$$

y

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)\, U_n(x)(1-x^2)^{1/2}\, dx = \frac{\pi}{2}\,\delta_{m,n}. \tag{13.89}$$

Los factores $\pi/2$ se pueden obtener de las funciones generadoras mediante el uso de una técnica similar a la correspondiente a la Sección 12.3. Observe el cambio de modelo cuando $m = n = 0$. Las relaciones ortogonales para el seno y coseno requeridas para el desarrollo de la serie de Fourier (Capítulo 14) muestran este mismo comportamiento.

Aplicaciones Numéricas. Los polinomios de Chebyshev (T_n) son de utilidad en el trabajo numérico para el intervalo $[-1, 1]$, debido a que

(a) $|T_n(x)| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$ (cf. Ejercicio 13.3.4):
(b) el máximo y mínimo son de magnitud comparable;
(c) el máximo y mínimo se encuentran dispersos razonablemente y de manera uniforme sobre el intervalo $[-1, 1]$.

Estas propiedades se derivan de $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$, Ejercicio 13.3.13.

Una de las aplicaciones se tiene en el truncado y readaptación del desarrollo de serie de potencias. Suponga que se desea $\cosh x$ en el intervalo $[-1, 1]$ hasta ± 0.0001. Se puede comenzar con

$$\begin{aligned}\cosh x &= 1.0 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \\ &= 1.000\,00 + 0.500\,00\, x^2 + 0.041\,67\, x^4 \\ &\quad + 0.001\,39\, x^6 + 0.000\,02\, x^8 + \cdots.\end{aligned} \tag{13.90}$$

En $x = \pm 1$, el último término contribuye con

$$1/8! = 0.000\,024\,8.$$

Para una precisión de cuatro decimales (± 0.0001), el término $x^8/8!$ puede desecharse, pero todos los términos de orden inferior deben conservarse, si es que se desea utilizar este desarrollo de serie de potencias.

Volviendo a establecer $\cosh x$ como serie de polinomios de Chebyshev

$$\begin{aligned}\cosh x &= 1.266\,06\, T_0(x) + 0.271\,48\, T_2(x) \\ &\quad + 0.005\,47\, T_4(x) + 0.000\,04\, T_6(x).\end{aligned} \tag{13.90a}$$

Ya que $|T_6(x)| \leqslant 1$, el último en la serie de Chebyshev se puede desechar, al menos para la precisión deseada.

Ahora bien, regresando a la forma de serie de potencias

$$\begin{aligned}\cosh x &= 1.266\,06\, T_0 + 0.271\,48\, T_2 + 0.005\,47\, T_4 \\ &= 1.000\,05 + 0.499\,20\, x^2 + 0.043\,76\, x^4.\end{aligned} \tag{13.90b}$$

Esta serie (truncada y readaptada ofrece la *misma precisión* (a ± 0.0001) de la serie original a través de x^6. La diferencia consiste en que el error de la forma original se ha concentrado cerca de los extremos del intervalo. En la Ec. 13.90*b*, el error se distribuye más uniformemente a través de todo el intervalo.

Esto no es lo mismo que el arreglo de mínimos cuadrados. En este último se intenta reducir al mínimo el promedio del cuadrado del error. Esto no evita los errores ocasionalmente grandes. Aquí, por contraste, se busca reducir al mínimo el máximo (valor obsoluto) del error o al menos conservar el error dentro de cierto límite predeterminado. Para cierto número de potencias, esto puede lograrse mejor con los coeficientes ajustados de Chebyshev (Ec. 13.90*b*) que con la serie de potencias original (Ec. 13.90, a través de x^6).

Este tipo de truncamiento de Chebyshev ha sido utilizado en los arreglos polinomiales para la función factorial, $x!$, [0, 1], Sección 10.3.

EJERCICIOS

13.3.1 Dado

$$(1 - x^2)\, U_n''(x) - 3x\, U_n'(x) + n(n+2)\, U_n(x) = 0,$$

demuestre que $V_n(x)$ satisface

$$(1 - x^2)\, V_n''(x) - x\, V_n'(x) + n^2\, V_n(x) = 0,$$

lo cual es la ecuación de Chebyshev.

13.3.2 Demuestre que el wronskiano de $T_n(x)$ y $V_n(x)$ está definido por

$$T_n(x)\, V_n'(x) - T_n'(x)\, V_n(x) = -\frac{n}{(1 - x^2)^{1/2}}$$

Esto verifica que T_n y V_n $(n \neq 0)$ son soluciones independientes de la Ec. 13.79. Alternativamente, para $n = 0$, no se tiene la independencia lineal. ¿Qué sucede a $n = 0$? ¿En dónde está la "segunda" solución?

13.3.3 Otra función generadora de Chebyshev es

$$\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) t^n, \qquad |t| < 1.$$

¿En qué forma está relacionada $W_n(x)$ con $T_n(x)$ y $U_n(x)$?

13.3.4 Las curvas que se muestran en la Fig. 13.5 sugieren que $|T_n(x)| \leq 1$ para $-1 \leq x \leq 1$ (x real). Demuestre esto.

13.3.5 Establezca los siguientes extremos, $-1 \leq x \leq 1$:

(a) $|U_n(x)| \leq n + 1$,

(b) $\left|\frac{d}{dx} T_n(x)\right| \leq n^2$.

13.3.6 Existen varias ecuaciones que relacionan los dos tipos de polinomios de Chebyshev. Como ejemplos, demuestre que

$$T_n(x) = U_n(x) - x\, U_{n-1}(x)$$

y

$$(1 - x^2)\, U_n(x) = x T_{n+1}(x) - T_{n+2}(x).$$

13.3.7 Demuestre que

$$\frac{dV_n(x)}{dx} = -n \frac{T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

(a) utilizando las formas trigonométricas de V_n y T_n,
(b) utilizando la representación de Rodrigues.

13.3.8 Derive la representación de Rodrigues de $T_n(x)$.

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \pi^{1/2}(1 - x^2)^{1/2}}{2^n(n - \frac{1}{2})!} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^{n-1/2}].$$

Sugerencias. Una posibilidad consiste en el uso de la relación de función hipergeométrica

$${}_2F_1(a, b, c; z) = (1 - z)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c - b, c; \frac{-z}{1 - z}\right),$$

con $z = (1 - x)/2$. Un procedimiento alternativo consiste en el desarrollo de la ecuación diferencial de primer orden para $y = (1 - x^2)^{n-1/2}$. La diferenciación repetida de esta ecuación origina la ecuación de Chebyshev.

13.3.9 Demuestre que $V_n(x)$ satisface la misma relación de recurrencia de tres términos que $T_n(x)$ (Ec. 13.70).

13.3.10 Verifique las soluciones en serie para $T_n(x)$ y $U_n(x)$ (Ecs. 13.83 y 13.84).

13.3.11 Transforme la forma de serie para $T_n(x)$, Ec. 13.83, en la serie de potencias *ascendentes.*

Respuesta.

$$T_{2n}(x) = (-1)^n n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n + m - 1)!}{(n - m)!(2m)!} (2x)^{2m},$$

$$T_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2n + 1}{2} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n + m)!}{(n - m)!(2m + 1)!} (2x)^{2m+1}.$$

13.3.12 Vuelva a establecer la forma de serie de $U_n(x)$, Ec. 13.84, a modo de una serie de potencias ascendentes.

Respuesta.

$$U_{2n}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n + m)!}{(n - m)!(2m)!} (2x)^{2m},$$

$$U_{2n+1}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n + m + 1)!}{(n - m)!(2m + 1)!} (2x)^{2m+1}.$$

13.3.13 A partir de

$$T_n(x) + i\,V_n(x) = [x + i(1 - x^2)^{1/2}]^n$$

sea $x = \cos\theta$ y demuestre que

(a) $T_n(x) = \cos n\theta = \cos(n \cos^{-1}x)$, (b) $V_n(x) = \operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}(n \cos^{-1}x)$,

(c) $U_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}[(n+1)\theta]}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}[(n+1)\cos^{-1}x]}{\operatorname{sen}(\cos^{-1}x)}$.

El resultado en la parte (a) demuestra que el desarrollo de una función par en una serie de $T_n(x)$ es equivalente a la aproximación de coseno de Fourier (cf. Sección 14.1).

13.3.14 Derive

(a) $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\,T_n(x)$, (b) $T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = 2T_m(x)\,T_n(x)$,

a partir de las identidades de coseno "correspondientes".

13.3.15 Principiando con $x = \cos\theta$ y $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, desarrolle

$$x^k = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^k$$

y demuestre que

$$x^k = \frac{1}{2^{k-1}}\left[T_k(x) + \binom{k}{1} T_{k-2}(x) + \binom{k}{2} T_{k-4}(x) + \cdots\right],$$

en que la serie dentro de paréntesis termina con $\binom{k}{m} T_1(x)$ para $k = 2m + 1$ o $\frac{1}{2}\binom{k}{m} T_0$ para $k = 2m$.

13.3.16 (a) A partir de la ecuación diferencial para T_n (en la forma autoadjunta) demuestre que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dT_m(x)}{dx}\frac{dT_n(x)}{dx}(1 - x^2)^{1/2}\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

(b) Confirme el resultado anterior demostrando que

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = nU_{n-1}(x).$$

13.4 Funciones Hipergeométricas

En el Capítulo 8 se introdujo la ecuación hipergeométrica[1]

$$x(1 - x)\,y''(x) + [c - (a + b + 1)x]\,y'(x) - ab\,y(x) = 0 \tag{13.91}$$

[1] Esto se denomina ocasionalmente ecuación diferencial de Gauss. De este modo, las soluciones se transforman en las funciones de Gauss.

como una forma canónica de una ecuación diferencial de segundo orden con singularidades regulares en $x = 0$, 1, e ∞. Una solución es

$$y(x) = {}_2F_1(a, b, c; x) = 1 + \frac{a \cdot b}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots, \qquad c \neq 0, -1, -2, -3, \cdots, \tag{13.91a}$$

la cual se conoce como función hipergeométrica o serie hipergeométrica. El intervalo de convergencia $|x| < 1$ y $x = 1$, para $c > a + b$, y $x = -1$, para $c > a + b - 1$. En términos del frecuentemente utilizado símbolo de Pochhammer,

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}, \qquad (a)_0 = 1, \tag{13.92}$$

la función hipergeométrica se transforma en

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}. \tag{13.93}$$

En esta forma, los subíndices 2 y 1 son más evidentes. El subíndice delantero 2 indica que aparecen dos símbolos de Pochhammer en el numerador y el subíndice final 1 indica un símbolo de Pochhammer en el denominador.[1] La función hipergeométrica confluente ${}_1F_1$ con un símbolo de Pochhammer en el numerador y uno en el denominador aparece en la Sección 13.5

De acuerdo con la forma de la Ec. 13.91*a*, se observa que el parámetro c puede no ser cero o un número entero negativo. Por otra parte, si a o b es igual a cero o un número entero negativo, la serie es finita y la función hipergeométrica se transforma en un polinomio simple.

Funciones más o menos elementales se pueden representar por medio de la función hipergeométrica.[2] Se encuentra que

$$\ln(1 + x) = x\, {}_2F_1(1, 1, 2; -x). \tag{13.94}$$

Para las integrales elípticas completas K y E

$$K = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{-1/2}\, d\theta$$

[1] El símbolo de Pochhhammer aparece frecuentemente en otras expresiones que implican factoriales, por ejemplo,

$$(1 - z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n\, z^n/n! \qquad |z| < 1.$$

[2] Con tres parámetros, a, b y c, se puede representar casi todo.

$$= \frac{\pi}{2}\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right), \tag{13.95}$$

$$E = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; k^2\right). \tag{13.96}$$

Las formas de serie explícita y otras propiedades de las integrales elípticas se desarrollan en la Sección 5.8.

La ecuación hipergeométrica como ecuación diferencial de segundo orden ha constituido una segunda solución independiente. La forma usual es

$$y(x) = x^{1-c}\, {}_2F_1(a + 1 - c, b + 1 - c, 2 - c; x), \qquad c \neq 2, 3, 4, \cdots \tag{13.97}$$

El lector puede demostrar (Ejercicio 13.4.1) que cuando c es un número entero, cualquiera de las dos soluciones coincide o (excepto si se considera a integral o b integral) una de las soluciones deja de ser consistente. En tal caso, es de esperarse que la segunda solución incluya un término logarítmico.

Las formas alternativas de la ecuación hipergeométrica incluyen

$$(1 - z^2)\frac{d^2}{dz^2}\, y\left(\frac{1-z}{2}\right) - [(a + b + 1)z - (a + b + 1 - 2c)]\frac{d}{dz}\, y\left(\frac{1-z}{2}\right)$$

$$-ab\, y\left(\frac{1-z}{2}\right) = 0, \tag{13.98}$$

$$(1 - z^2)\, \frac{d^2}{dz^2}\, y(z^2) - \left[(2a + 2b + 1)z + \frac{1 - 2c}{z}\right]\frac{d}{dz}\, y(z^2)$$

$$-4ab\, y(z^2) = 0. \tag{13.99}$$

Relaciones de Función Contigua. Los parámetros a, b y c intervienen en la misma manera que el parámetro n de las funciones de Bessel, Legendre y otras especiales. Tal como se determinó para estas funciones, es de esperarse que las relaciones de recurrencia impliquen cambios unitarios en los parámetros a, b y c. La nomenclatura usual para las funciones hipergeométricas, en donde *un* parámetro cambia en $+$ o -1, es la "función contigua". Generalizando este término para incluir los cambios de unidad simultáneos en más de un parámetro, se encuentran 26 funciones contiguas a ${}_2F_1(a, b, c; x)$. Considerando dos de las mismas a la vez se puede desarrollar el formidable total de 325 ecuaciones dentro de las funciones contiguas. Un ejemplo típico es

$$(a - b)\{c(a + b - 1) + 1 - a^2 - b^2 + [(a - b)^2 - 1](1 - x)\}\, {}_2F_1(a, b, c; x)$$

$$= (c-a)(a-b+1)b\ {}_2F_1(a-1, b+1, c; x) \tag{13.100}$$
$$+ (c-b)(a-b-1)a\ {}_2F_1(a+1, b-1, c; x).$$

Otra relación de función contigua aparece en el Ejercicio 13.4.10.

Representaciones Hipergeométricas. Ya que la ecuación de Gegenbauer (13.81) en la Sección 13.3 es un caso especial de la Ec. 13.91, se observa que las funciones de Gegenbauer (y las funciones de Legendre y Chebyshev) se pueden expresar como funciones hipergeométricas. Para la función de Gegenbauer se obtiene

$$T_n^\beta(x) = \frac{(n+2\beta)!}{2^\beta n!\,\beta!}\ {}_2F_1\left(-n, n+2\beta+1, 1+\beta; \frac{1-x}{2}\right). \tag{13.101}$$

Para las funciones de Legendre y Legendre asociadas

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1, 1; \frac{1-x}{2}\right), \tag{13.102}$$

$$P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!}\ {}_2F_1\left(m-n, m+n+1, m+1; \frac{1-x}{2}\right). \tag{13.103}$$

Las formas alternativas son

$$P_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}n!\,n!}\ {}_2F_1\left(-n, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right)$$
$$= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ {}_2F_1\left(-n, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right), \tag{13.104}$$

$$P_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!\,n!}\, x\ {}_2F_1\left(-n, n+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right)$$
$$= (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\, x\ {}_2F_1\left(-n, n+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right). \tag{13.105}$$

En términos de las funciones hipergeométricas, las funciones de Chebyshev se transforman en

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n, \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \tag{13.106}$$

$$U_n(x) = (n+1)\ {}_2F_1\left(-n, n+2, \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \tag{13.107}$$

$$V_n(x) = \sqrt{1-x^2}\, n\ {}_2F_1\left(-n+1, n+1, \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right). \tag{13.108}$$

Los principales factores se determinan mediante la comparación directa de las series de potencias completas, la comparación de coeficientes de potencias particulares de la variable o la evaluación a $x = 0$ o 1, etc.

EJERCICIOS

13.4.1 (a) Para c, un número entero, y a y b números no enteros, demuestre que

$$ {}_2F_1(a, b, c; x) \quad \text{y} \quad x^{1-c}\, {}_2F_1(a + 1 - c, b + 1 - c, 2 - c; x) $$

proporciona solamente una solución de la ecuación hipergeométrica.

(b) ¿Qué sucede si a es un número entero, por ejemplo $a = -1$ y $c = -2$?

13.4.2 Encuentre las relaciones de recurrencia de Legendre, Chebyshev I y Chebyshev II correspondientes a la ecuación de la función hipergeométrica contigua (13.100).

13.4.3 Indique los siguientes polinomios como funciones hipergeométricas del argumento x^2.

(a) $T_{2n}(x)$; (b) $x^{-1}T_{2n+1}(x)$; (c) $U_{2n}(x)$; (d) $x^{-1}U_{2n+1}(x)$.

Respuesta. (a) $T_{2n}(x) = (-1)^n\, {}_2F_1(-n, n, \frac{1}{2}; x^2)$.

(b) $x^{-1}T_{2n+1}(x) = (-1)^n (2n + 1)\, {}_2F_1(-n, n + 1, \frac{3}{2}; x^2)$.

(c) $U_{2n}(x) = (-1)^n\, {}_2F_1(-n, n + 1, \frac{1}{2}; x^2)$.

(d) $x^{-1}U_{2n+1}(x) = (-1)^n(2n + 2)\, {}_2F_1(-n, n + 2, \frac{3}{2}; x^2)$.

13.4.4 Derive o verifique el principal factor en las representaciones hipergeométricas de las funciones de Chebyshev.

13.4.5 Verifique que la función de Legendre de segunda clase, $Q_\nu(z)$, está definida por

$$ Q_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}\nu!}{(\nu + \frac{1}{2})!\,(2z)^{\nu+1}}\, {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{3}{2}; z^{-2}\right) $$

$$ |z| > 1, \quad |\arg z| < \pi, \qquad \nu \neq -1, -2, -3, \ldots. $$

13.4.6 Análogamente a la función gamma incompleta, la función beta incompleta se puede definir como

$$ B_x(a, b) = \int_0^x t^{a-1}(1 - t)^{b-1}\, dt. $$

Demuestre que

$$ B_x(a, b) = a^{-1}x^a\, {}_2F_1(a, 1 - b, a + 1; x). $$

13.4.7 Verifique la representación de integral

$$ {}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1}(1 - t)^{c-b-1}(1 - tz)^{-a}\, dt. $$

¿Qué restricciones deben aplicarse a los parámetros b y c en la variable z?

Nota. La restricción en $|z|$ puede desecharse —continuación analítica. Para a no integral, el eje real en el plano z de 1 a ∞ es una línea de corte.
Sugerencia. La integral puede considerarse suspicazmente como una función beta y puede desarrollarse en una serie de funciones beta.

Respuesta. $\mathscr{R}(c) > \mathscr{R}(b) > 0$, y $|z| < 1$.

13.4.8 Demuestre que

$$ {}_2F_1(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad c \neq 0, -1, -2, \ldots, \qquad c > a + b. $$

Sugerencia. Existe la posibilidad de utilizar la representación de integral, Ejercicio 13.4.7.

13.4.9 Demuestre que

$$ {}_2F_1(a, b, c; x) = (1-x)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{-x}{1-x}\right). $$

Sugerencia. Ensaye con la representación de integral, Ejercicio 13.4.7.
Nota. Esta relación es de utilidad para el desarrollo de la representación de Rodrigues de $T_n(x)$ (cf. Ejercicio 13.3.8).

13.4.10 Verifique que

$$ {}_2F_1(-n, b, c; 1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}. $$

Sugerencia. Existe la posibilidad de utilizar la relación de función contigua,

$$ [2a - c + (b-a)x]\, F(a, b, c; x) = a(1-x)\, F(a+1, b, c; x) - (c-a)\, F(a-1, b, c; x) $$

y la inducción matemática.

13.5 Funciones Hipergeométricas Confluentes

La ecuación hipergeométrica confluente[1]

$$ x\, y''(x) + (c - x)\, y'(x) - a\, y(x) = 0 \tag{13.109} $$

se puede obtener a partir de la ecuación hipergeométrica de la Sección 13.4 combinando dos de sus singularidades. La ecuación resultante tiene una singularidad regular en $x = 0$ y una irregular en $x = \infty$. Una solución de la ecuación hipergeométrica confluente es

$$ y(x) = {}_1F_1(a, c; x) = M(a, c; x) $$

[1] Esta se denomina frecuentemente ecuación de Kummer. Siendo así, las soluciones son las funciones de Kummer.

$$= 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots, \qquad c \neq 0, -1, -2, \cdots. \tag{13.110}$$

Esta solución es convergente para todas las x finitas (o z). En términos de los símbolos de Pochhammer, se tiene

$$M(a, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}. \tag{13.111}$$

Evidentemente, $M(a, c; x)$ se transforma en un polinomio si el parámetro a es 0 o un número entero negativo. Existe una variedad de funciones más o menos elementales que pueden representarse por medio de la función hipergeométrica confluente. Como ejemplos se tienen la función de error y la función gamma incompleta.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\pi^{1/2}}\,x\,M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right), \tag{13.112}$$

$$\begin{aligned}\gamma(a, x) &= \int_0^x e^{-t}t^{a-1}\,dt \\ &= a^{-1}x^a\,M(a, a+1; -x), \qquad \mathscr{R}(a) > 0.\end{aligned} \tag{13.113}$$

La función de error y la función gamma incompleta se describen adicionalmente en la Sección 10.5.

Una segunda solución de la Ec. 13.109 está definida por

$$y(x) = x^{1-c}\,M(a+1-c, 2-c; x), \qquad c \neq 2, 3, 4, \ldots \tag{13.114}$$

La forma estándar de la segunda solución de la Ec. 13.109 es una combinación lineal de las Ecs. 13.110 y 13.114.

$$U(a, c; x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi c}\left[\frac{M(a, c; x)}{(a-c)!(c-1)!} - \frac{x^{1-c}\,M(a+1-c, 2-c; x)}{(a-1)!(1-c)!}\right]. \tag{13.115}$$

Observe la semejanza con la definición de la función de Neumann, Ec. 11.60.

Una forma alternativa de la ecuación hipergeométrica que será de utilidad posteriormente se obtiene al cambiar la variable independiente de x a x^2.

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x^2) + \left[\frac{2c-1}{x} - 2x\right]\frac{d}{dx}y(x^2) - 4a\,y(x^2) = 0. \tag{13.116}$$

De manera similar a las funciones hipergeométricas, existen las funciones contiguas en que los parámetros a y c se cambian por ± 1. Incluyendo los casos de los cambios simultáneos en dos parámetros,[1] se tienen

[1] Slater se refiere a estos como las funciones asociadas.

ocho posibilidades. Considerando la función original y pares de las funciones contiguas, se puede desarrollar un total de 28 ecuaciones.[1]

Representaciones de Integral. Con frecuencia conviene tener las funciones hipergeométricas confluentes en la forma de integral. Se encuentra (Ejercicio 13.5.10)

$$M(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1}\, dt,$$
$$\mathscr{R}(c) > \mathscr{R}(a) > 0, \qquad (13.117a)$$

$$U(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}\, dt,$$
$$\mathscr{R}(x) > 0, \mathscr{R}(a) > 0. \qquad (13.117b)$$

Tres de las técnicas importantes para derivar o verificar las representaciones de integral son:

1. La transformación de los desarrollos de función generadora y las representaciones de Rodrigues: las funciones de Bessel y Legendre proporcionan ejemplos de este procedimiento.
2. La integración directa para obtener una serie: la técnica directa es de utilidad para la representación de la función de Bessel (Ejercicio 11.1.18) y la integral hipergeométrica (Ejercicio 13.4.7).
3. (a) Verificación de que la representación de integral satisface la ecuación diferencial. (b) Exclusión de la otra solución. (c) Verificación de la normalización. Este es el método utilizado en la Sección 11.6 para establecer la representación de integral de la función de Bessel modificada, $K_\nu(z)$. En este caso es adecuada para establecer las Ecs. 13.117*a* y 13.117*b*.

Funciones de Bessel y Bessel Modificadas. La primera fórmula de Kummer,

$$M(a, c; x) = e^x M(c-a, c; -x), \qquad (13.118)$$

es de utilidad en la representación de las funciones de Bessel y Bessel modificadas. La fórmula puede verificarse mediante el desarrollo en serie o por medio del uso de la representación de integral (cf. Ejercicio 13.5.10).

Tal como es de esperarse de la forma correspondiente a la ecuación hipergeométrica confluente y del carácter de sus singularidades, las funciones hipergeométricas confluentes son de utilidad en la representación de diversas funciones especiales de la física matemática. Para las funciones de Bessel

[1] Las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel, Hermite y Laguerre son casos especiales de estas ecuaciones.

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1; 2ix\right), \tag{13.119a}$$

mientras que para las funciones de Bessel modificadas de primera clase,

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1; 2x\right). \tag{13.119b}$$

Funciones de Hermite. Las funciones de Hermite están definidas por

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}; x^2\right), \tag{13.120}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x\, M\left(-n, \frac{3}{2}; x^2\right), \tag{13.121}$$

utilizando la Ec. 13.116.

Comparando la ecuación diferencial de Laguerre con la ecuación hipergeométrica confluente, se tiene

$$L_n(x) = M(-n, 1; x). \tag{13.122}$$

La constante se fija como unidad según la Ec. 13.35 para $x = 0$. Para las funciones de Laguerre asociadas

$$\begin{aligned} L_n^m(x) &= (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x) \\ &= \frac{(n+m)!}{n!\,m!} M(-n, m+1; x). \end{aligned} \tag{13.123}$$

La verificación alternativa se obtiene mediante la comparación de la Ec. 13.123 con la solución de serie de potencias (Ec. 13.41 de la Sección 13.2). Observe que en la forma hipergeométrica, a diferencia de la representación de Rodrigues, los índices n y m no necesitan ser números enteros y, cuando no son números enteros, $L_n^m(x)$ no es un polinomio.

Diversos Casos de Funciones. Existen ciertas ventajas al expresar la función especial en términos de las funciones hipergeométricas o hipergeométricas especiales. Si el comportamiento general de estas últimas funciones es conocido, el comportamiento de las funciones especiales que se han investigado sigue como una serie de casos especiales. Esto puede ser de utilidad para determinar el comportamiento asintótico o la evaluación de las integrales de normalización. El comportamiento asintótico de $M(a, c; x)$ y $U(a, c; x)$ se puede lograr convenientemente mediante las representaciones de integral de estas funciones. Ecs. 13.117*a* y 13.117*b*. La ventaja adicional consiste en que las relaciones entre las funciones especiales se hacen más evidentes. Por ejemplo, el examen de las Ecs. 13.120, 13.121 y 13.123 sugiere la relación entre las funciones de Laguerre y Hermite.

La ecuación hipergeométrica confluente (13.109) evidentemente no es autoadjunta. Debido a esto y a otras razones, es conveniente definir

$$M_{k\mu}(x) = e^{-x/2}x^{\mu+1/2}\,M(\mu - k + \tfrac{1}{2}, 2\mu + 1; x). \tag{13.124}$$

Esta nueva función $M_{k\mu}(x)$ es una función de Whittaker que satisface la ecuación autoadjunta

$$M''_{k\mu}(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right) M_{k\mu}(x) = 0. \tag{13.125}$$

La segunda solución correspondiente es

$$W_{k\mu}(x) = e^{-x/2}x^{\mu+1/2}\,U(\mu - k + \tfrac{1}{2}, 2\mu + 1; x). \tag{13.126}$$

EJERCICIOS

13.5.1 Verifique la representación hipergeométrica confluente de la función de error

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\pi^{1/2}} M(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -x^2).$$

13.5.2 Demuestre que las integrales de Fresnel $C(x)$ y $S(x)$ del Ejercicio 5.11.2 se pueden expresar en términos de la función hipergeométrica confluente como

$$C(x) + iS(x) = xM\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; \frac{i\pi x^2}{2}\right).$$

13.5.3 Mediante la diferenciación directa y sustitución, verifique que

$$y = ax^{-a}\int_0^x e^{-t}t^{a-1}\,dt = ax^{-a}\gamma(a, x)$$

de hecho satisface

$$xy'' + (a + 1 + x)y' + ay = 0.$$

13.5.4 Demuestre que la función de Bessel modificada de segunda clase $K_\nu(x)$ está definida por

$$K_\nu(x) = \pi^{1/2}e^{-x}(2x)^\nu\,U(\nu + \tfrac{1}{2}, 2\nu + 1; 2x).$$

13.5.5 Demuestre que las integrales de seno y coseno de la Sección 10.5 se pueden expresar en términos de las funciones hipergeométricas confluentes como

$$Ci(x) + i\,si(x) = -e^{ix}\,U(1, 1; -ix).$$

Esta relación es de utilidad en el cómputo numérico de $Ci(x)$ y $si(x)$ para valores grandes de x.

13.5.6 Verifique la forma hipergeométrica confluente del polinomio de Hermite $H_{2n+1}(x)$ (Ec. 13.121) al demostrar que

(a) $H_{2n+1}(x)/x$ satisface la ecuación hipergeométrica confluente con $a = -n$, $c = \frac{3}{2}$ y el argumento x^2,

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{H_{2n+1}(x)}{x} = (-1)^n \dfrac{2(2n+1)!}{n!}$.

13.5.7 Demuestre que la ecuación de la función hipergeométrica confluente contigua

$$(c-a)\, M(a-1, c; x) + (2a - c + x)\, M(a, c; x) - a\, M(a+1, c; x) = 0,$$

origina la relación de recurrencia de la función de Laguerre asociada (Ec. 13.44).

13.5.8 Verifique las transformaciones de Kummer:

(a) $M(a, c; x) = e^x\, M(c-a, c; -x)$,

(b) $U(a, c; x) = x^{1-c}\, U(a-c+1, 2-c; x)$.

13.5.9 Demuestre que

(a) $\dfrac{d^n}{dx^n} M(a, c; x) = \dfrac{(a)_n}{(b)_n} M(a+n, b+n; x)$,

(b) $\dfrac{d^n}{dx^n} U(a, c; x) = (-1)^n (a)_n U(a+n, c+n; x)$.

13.5.10 Verifique las siguientes representaciones de integral

(a) $M(a, c; x) = \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \displaystyle\int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1}\, dt, \quad \mathscr{R}(c) > \mathscr{R}(a) > 0,$

(b) $U(a, c; x) = \dfrac{1}{\Gamma(a)} \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}\, dt, \quad \mathscr{R}(x) > 0, \quad \mathscr{R}(a) > 0.$

13.5.11 A partir de la representación de integral de $M(a, c; x)$, Ejercicio 13.5.10(a), demuestre que

$$M(a, c; x) = e^x M(c-a, c; -x).$$

Sugerencia. Sustituye la variable de integración t por $1 - s$ para liberar el factor e^x de la integral.

13.5.12 A partir de la representación de integral de $U(a, c; x)$, Ejercicio 13.5.10(b), demuestre que la integral exponencial está definida por

$$E_1(x) = e^{-x} U(1, 1; x).$$

Sugerencia. Sustituya la variable de integración t en $E_1(x)$ por $x(1+s)$.

13.5.13 A partir de las representaciones de integral de $M(a, c; x)$ y $U(a, c; x)$ en el Ejercicio 13.5.10 establezca los desarrollos asintóticos de

(a) $M(a, c; x)$, (b) $U(a, c; x)$.

Sugerencia. Se puede utilizar la técnica utilizada con $K_\nu(z)$, Sección 11.6.

Respuesta.

(a) $\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \dfrac{e^x}{x^{c-a}} \left\{ 1 + \dfrac{(1-a)(c-a)}{x} + \cdots \right\}.$

$$\text{(b)}\ \frac{1}{x^a}\left\{1-\frac{a(1+a-c)}{x}+\cdots\right\}.$$

13.5.14 Demuestre que el wronskiano de las dos funciones hipergeométricas confluentes, $M(a, c; x)$ y $U(a, c; x)$ está definido por

$$MU' - M'U = -\frac{(c-1)!}{(a-1)!}\frac{e^x}{x^c}.$$

¿Qué sucede si a es 0 o un número entero negativo?

13.5.15 La ecuación de onda de Coulomb (parte radial de la ecuación de onda de Schrödinger con el potencial de Coulomb) es

$$\frac{d^2y}{d\rho^2}+\left[1-\frac{2\eta}{\rho}-\frac{L(L+1)}{\rho^2}\right]y=0.$$

Demuestre que una solución regular, $y = F_L(\eta, \rho)$, está definida por

$$F_L(\eta, \rho) = C_L(\eta)\rho^{L+1}e^{-i\rho}M(L+1-i\eta, 2L+2; 2i\rho).$$

13.5.16 (a) Demuestre que la parte radial de la función de onda del hidrógeno, Ec. 13.60, se puede indicar en la forma

$$e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r) = \frac{(n+L)!}{(n-L-1)!\,(2L+1)!}\,e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L M(L+1-n, 2L+2; \alpha r).$$

(b) En lo anterior se ha supuesto que la energía total (cinética + potencial) E del electrón es negativa. Vuelva a establecer la función de onda radial (sin normalizar) para el electrón libre $E > 0$.

Respuesta. $e^{+i\alpha r/2}(\alpha r)^L M(L+1-in, 2L+2, -i\alpha r)$, onda saliente. Esta representación proporciona una técnica alternativa poderosa para el cálculo de los coeficientes de recombinación y fotoionización.

13.5.17 Demuestre que la transformada de Laplace de $M(a, c; x)$ es

$$\mathscr{L}\{M(a, c; x)\} = \frac{1}{s}\,{}_2F_1\left(a, 1, c; \frac{1}{s}\right).$$

13.5.18 Evalúe

(a) $\displaystyle\int_0^\infty [M_{k\mu}(x)]^2\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty [M_{k\mu}(x)]^2\,\frac{dx}{x}$,

en donde $2\mu = 0, 1, 2, \ldots$, $k-\mu-\frac{1}{2} = 0, 1, 2, \ldots$, $a > -2\mu - 1$.

Respuesta. (a) $(2\mu)!\,2k$.
(b) $(2\mu)!$.
(c) $(2\mu)!\,(2k)^a$.

REFERENCIAS

ABRAMOWITZ, M. e I. A. STEGUN, editores, *Handbook of Mathematical Functions.* Washington, D. C.: National Bureau of Standards. Applied Mathematics, Serie 55 (1964). El Capítulo 22 consiste en un resumen detallado de las propiedades y representaciones de los polinomios ortogonales. Otros capítulos tratan las propiedades de las funciones de Bessel, Legendre, hipergeométricas e hipergeométricas confluentes, así como otras.

LEBEDEV, N. N., *Special Functions and Their Applications.* Traducido al inglés por R. A. Silverman. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall (1965).

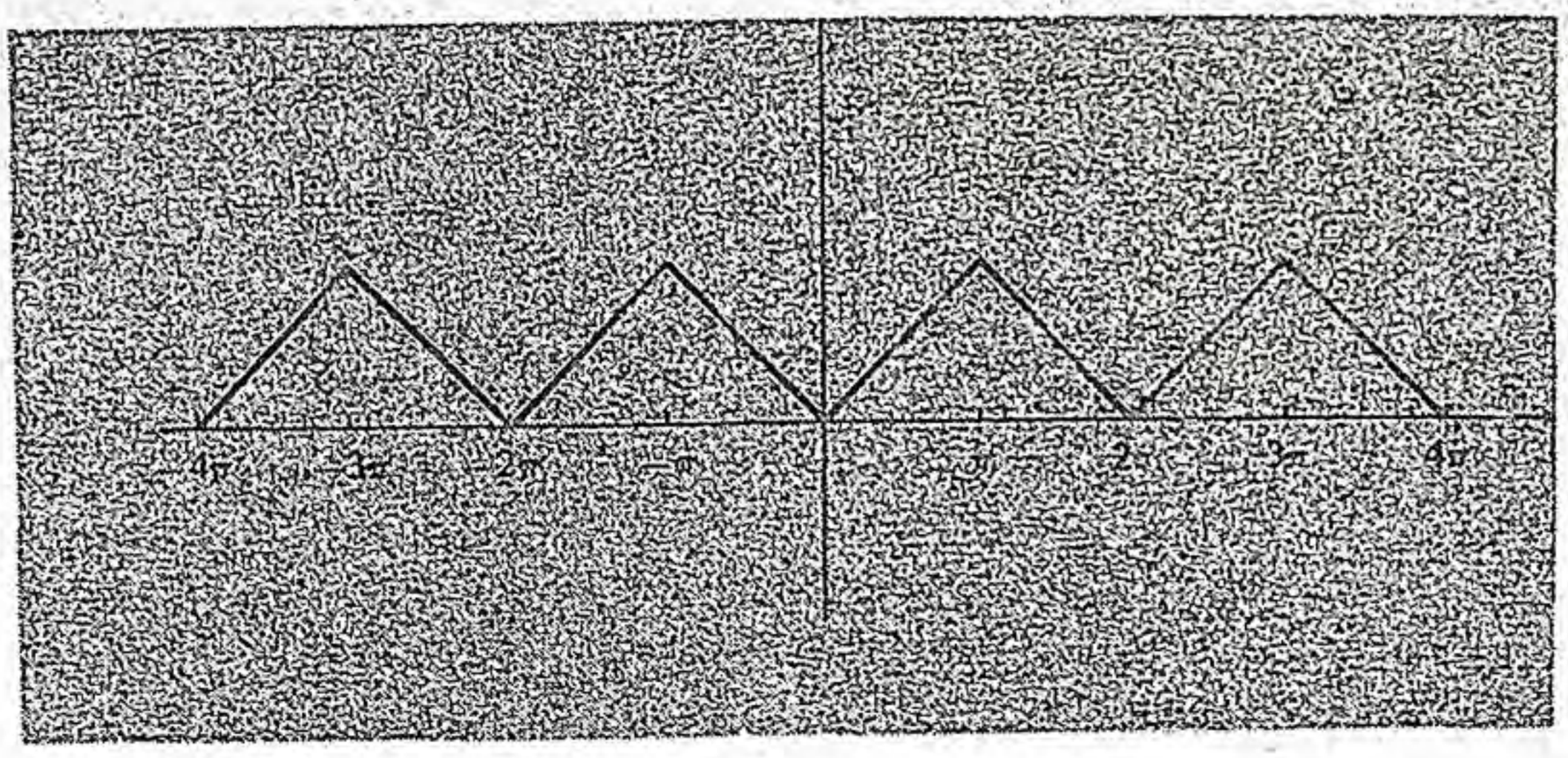
LUKE, Y. L., *The Special Functions and Their Approximations.* Academic Press: Nueva York (1969). Dos volúmenes. El Volumen 1 es un tratado teórico completo de las funciones gamma, las funciones hipergeométricas, las funciones hipergeométricas confluentes y las funciones relacionadas. El Volumen 2 desarrolla técnicas de aproximación y otras para el trabajo numérico.

MAGNUS, W. F., OBERHETTINGER y R. P. SONI, *Formulas and Theorems for The Special Functions of Mathematical Physics.* Springer: Nueva York (1966). Una edición nueva y ampliada. Un excelente resumen de lo que justamente dice el título, incluyendo los temas de los Capítulos 10-13.

RAINVILLE, E. D., *Special Functions.* Nueva York: Macmillan (1960). Un compendio coherente y comprensivo de casi todas las funciones especiales de la física matemática que el lector tendrá oportunidad de conocer.

SANSONE, G., *Orthogonal Functions.* Traducido al inglés por A. H. Diamond. Nueva York: Intercience Publishers (1959).

SLATER, L. J., *Confluent Hypergeometric Functions.* Cambridge: Cambridge University Press (1960). Un desarrollo claro y detallado de las propiedades de las funciones hipergeométricas confluentes y de las relaciones de la ecuación hipergeométrica confluente con otras ecuaciones diferenciales de la física matemática.



CAPITULO 14

SERIES DE FOURIER

14.1 Propiedades Generales

Serie de Fourier. Una serie de Fourier puede definirse como el desarrollo de una función o representación de una función en una serie de senos y cosenos tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx. \tag{14.1}$$

Las condiciones impuestas a $f(x)$ para lograr que esta ecuación sea válida son que $f(x)$ tenga solamente un número finito de descontinuidades y solamente un número finito de valores extremos, máximos y mínimos.[1] Las funciones que satisfacen estas condiciones se pueden denominar regulares en parte. Las condiciones por sí mismas se conocen como condiciones de Dirichlet. Aun cuando existen ciertas funciones que no obedecen las condiciones de Dirichlet, se pueden considerar como patológicas para los propósitos de los desarrollos de Fourier. En la gran mayoría de los problemas físicos que implican la serie de Fourier, estas condiciones se satisfacen.

Expresando cos nx y sen nx en la forma exponencial, la Ec. 14.1 se puede volver a establecer como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{14.2}$$

[1] Estas condiciones son *suficientes* pero no *necesarias*.

en donde

$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n),$$
$$c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n), \qquad n > 0, \tag{14.3}$$

y

$$c_0 = \tfrac{1}{2}a_0.$$

Si se desarrolla $f(z)$ en una serie de Laurent[1] (suponiendo que $f(z)$ es analítica),

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n. \tag{14.4}$$

En el círculo unitario $z = e^{i\theta}$ y

$$f(z) = f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\theta}. \tag{14.5}$$

Plenitud. Serie de Laurent. El desarrollo de Laurent en el círculo unitario (Ec. 14.5) tiene la misma forma que la serie de Fourier compleja (Ec. 14.2), lo cual demuestra la equivalencia entre los dos desarrollos. Ya que la serie de Laurent como serie de potencias tiene la propiedad de la plenitud, se observa que las funciones de Fourier, e^{inx}, forman un conjunto completo; es decir, la serie (Ecs. 14.1 y 14.2) tiene la capacidad de representar cualquier función regular en parte dentro del intervalo $(0, 2\pi)$. Este intervalo y la pregunta relacionada con la periodicidad se consideran en la siguiente sección.

El desarrollo de Fourier y la propiedad de plenitud son de esperarse ya que las funciones sen nx, cos nx, e^{inx} son funciones propias de la ecuación diferencial lineal autoadjunta,

$$y'' + n^2 y = 0. \tag{14.6}$$

Se obtienen las funciones propias ortogonales para diferentes valores del valor propio n seleccionando el intervalo $[0, p\pi]$, p es un número entero, para satisfacer las condiciones limitantes en la teoría de Sturm-Liouville (Capítulo 9). Si además se selecciona $p = 2$, las diferentes funciones propias para el mismo valor propio n pueden ser ortogonales. Se tiene

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} \pi\delta_{m,n}, & m \neq 0, \\ 0, & m = 0, \end{cases} \tag{14.7}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \pi\delta_{m,n}, & m \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0, \end{cases} \tag{14.8}$$

[1] Sección 6.5.

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0 \quad \text{para todas las } m \text{ y } n \text{ enteras} \tag{14.9}$$

Observe cuidadosamente que cualquier intervalo $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 2\pi$ será igualmente satisfactorio. Frecuentemente se utilizará $x_0 = -\pi$ para obtener el intervalo $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Para las funciones propias complejas $e^{\pm inx}$ la ortogonalidad normalmente se *define* en términos del conjugado complejo de uno de dos factores,

$$\int_0^{2\pi} (e^{imx})^* e^{inx} \, dx = 2\pi\delta_{m,n}. \tag{14.10}$$

Esto concuerda con el tratamiento de los armónicos esféricos (Sección 12.6).

Teoría de Sturm-Liouville. La teoría de Sturm-Liouville garantiza la validez de la Ec. 14.1 (para las funciones que satisfacen las condiciones de Dirichlet) y, mediante el uso de las relaciones de ortogonalidad, nos permite el cómputo de los coeficientes de expansión

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt, \tag{14.11}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14.12}$$

Esto, evidentemente, está sujeto al requisito de que existen las integrales. Esto es así cuando $f(t)$ es continua en parte. Sustituyendo las Ecs. 14.11 y 14.12 en la Ec. 14.1, se establece el desarrollo de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos nx \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen} nx \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n(t - x) \, dt, \tag{14.13}$$

en donde el primer término (constante) es el valor promedio de $f(x)$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

Otra forma de describir lo que se pretende indicar consiste en decir que $f(x)$ es parte de un espacio de Hilbert de dimensiones infinitas, en que el cos nx y el sen nx ortogonales constituyen la base. (Siempre existe la posibilidad de normalizar las mismas a la unidad en caso deseado.) El establecimiento de que cos nx y sen ($n = 0, 1, 2 \cdots$) extienden el espacio de Hilbert es equivalente a decir que forman un conjunto completo. Finalmente, los coeficientes de expansión a_n y b_n corresponden a las proyec-

ciones de $f(x)$ con los productos internos integrales (Ecs. 14.11 y 14.12) interviniendo como el producto escalar de la Sección 1.3.

Onda de Diente de Sierra. Una idea de la convergencia de la serie de Fourier y el error en el empleo tan solo de un número finito de términos en la serie se puede lograr al considerar el desarrollo de

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ x - 2\pi, & \pi < x \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{14.14}$$

Esta es una onda de diente de sierra y por conveniencia habremos de desplazar el intervalo desde $[0, 2\pi]$ hasta $[-\pi, \pi]$. En este intervalo se tiene simplemente $f(x) = x$. Utilizando las Ecs. 14.11 y 14.12 se puede demostrar que el desarrollo es

$$f(x) = x = 2\left[\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \cdots\right]. \tag{14.15}$$

La Fig. 14.1 muestra $f(x)$ para $0 \leqslant x < \pi$ para la suma de cuatro, seis y diez términos de la serie. Existen tres características que son de mencionarse.

1. Se tiene un incremento uniforme en la precisión de la representación a medida que el número de términos incluidos aumenta.
2. Todas las curvas pasan a través de un punto intermedio $y = 0$ en $x = \pi$
3. En la vecindad de $x = \pi$ se tiene un sobreimpulso que persiste y no muestra signos de disminución.

Como aspecto de interés incidental, el establecer $x = \pi/2$ en la Ec. 14.15 proporciona una derivación alternativa de la fórmula de Leibnitz, Ejercicio 5.7.6.

Comportamento de las Discontinuidades. El comportamiento en $x = \pi$ es un ejemplo de la regla general que en una discontinuidad finita la

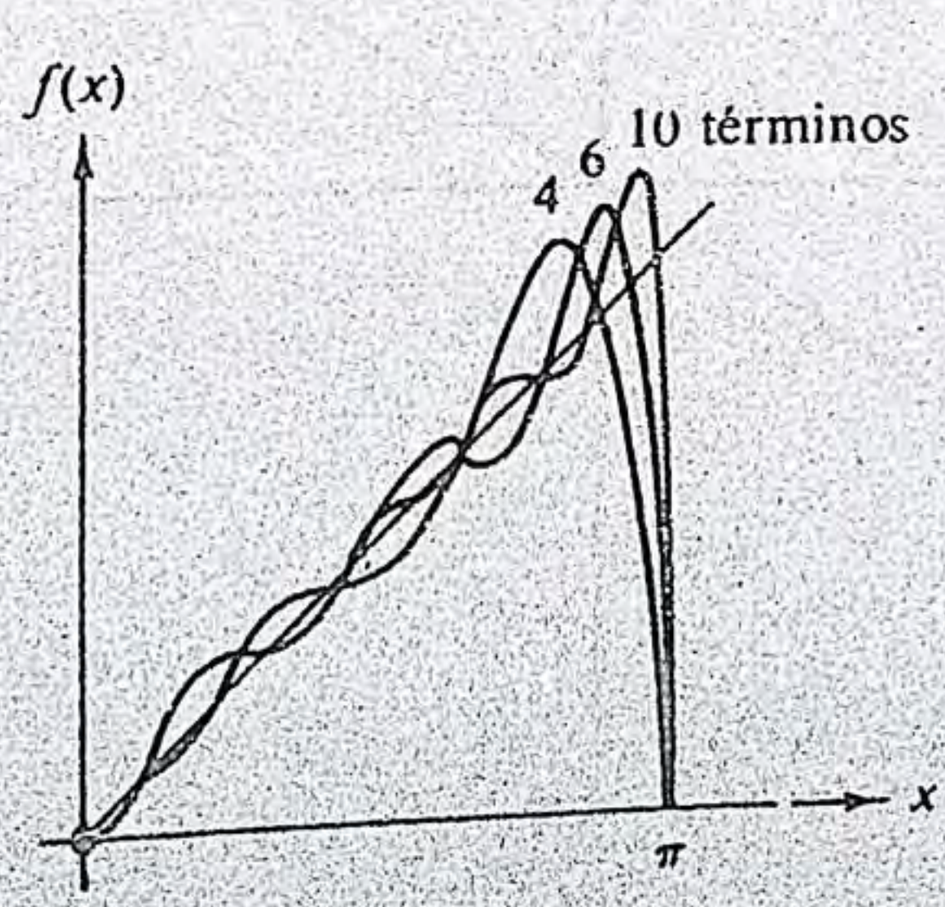


Fig. 14.1 Representación de Fourier de la onda de diente de sierra

serie converge a la media aritmética. Para una discontinuidad en $x = x_0$ la serie proporciona

$$f(x_0) = \tfrac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)], \tag{14.16}$$

la media aritmética de la derecha e izquierda se aproxima a $x = x_0$. Una demostración general utilizando las sumas parciales, del mismo modo que en la Sección 14.5, ha sido proporcionada por Jeffreys y por Carslaw. La demostración se puede simplificar mediante el uso de la función delta de Dirac, Ejercicio 14.5.1.

El sobreimpulso justamente antes de $x = \pi$ es un ejemplo del fenómeno de Gibbs, que se describe en la Sección 14.5.

EJERCICIOS

14.1.1 Una función $f(x)$ (capaz de integrarse cuadráticamente) se pretende representar por medio de una serie de Fourier *finita*. Una medida conveniente de la precisión de la serie la proporciona el cuadrado integrado de la desviación

$$\Delta_p = \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right]^2 dx.$$

Demuestre que el requisito de que Δ_p pueda reducirse al mínimo, es decir

$$\frac{\partial \Delta_p}{\partial a_n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta_p}{\partial b_n} = 0,$$

para todas las n, origina la selección de a_n y b_n tal como se indica en las Ecs. 14.11 y 14.12.

14.1.2 En el análisis de una forma de onda compleja (mareas oceánicas, terremotos, tonos musicales, etc.), pudiera ser más conveniente indicar la serie de Fourier en la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos (nx - \theta_n).$$

Demuestre que esto es equivalente a la Ec. 14.1 con

$$a_n = \alpha_n \cos \theta_n, \qquad \alpha_n^2 = a_n^2 + b_n^2,$$
$$b_n = \alpha_n \operatorname{sen} \theta_n, \qquad \tan \theta_n = b_n/a_n.$$

14.1.3 Una función $f(x)$ se desarrolla en una serie de Fourier exponencial

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Si $f(x)$ es real, $f(x) = f^*(x)$. ¿Qué restricción se impone en los coeficientes c_n?

14.1.4 Suponiendo que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ y $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx$ son finitas, demuestre que

$$\lim_{m\to\infty} a_m = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} b_m = 0.$$

Sugerencia. Integre $[f(x) - s_n(x)]^2$, en donde $s_n(x)$ es la enésima suma parcial y utilice la desigualdad de Bessel, Sección 9.4.

14.2 Ventajas y Usos de la Serie de Fourier

Función Discontinua. Una de las ventajas de la representación de Fourier con respecto a otras representaciones, tal como la serie de Taylor, es que puede representar una función discontinua. Un ejemplo es la onda de diente de sierra en la sección anterior. Otros ejemplos se consideran en la Sección 14.3 y en los ejercicios.

Funciones Periódicas. Relacionada con esta ventaja se tiene la utilidad de la serie de Fourier en cuanto a la representación de una función periódica. Si $f(x)$ tiene un período de 2π. resultaría tan solo natural que se desarrollara en una serie de funciones con el período 2π, $2\pi/2$, $2\pi/3$. Esto garantiza que si la $f(x)$ periódica se representa sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ o $[-\pi, \pi]$, la representación es consistente para todas las x finitas.

En este momento quizás resulte conveniente considerar las propiedades de simetría. Utilizando el intervalo $[-\pi, \pi]$, sen x es impar y cos x es una función par de x. En consecuencia, de acuerdo con las Ecs. 14.11 y 14.12,[1] si $f(x)$ es impar, todas las $a_n = 0$, y si $f(x)$ es par todas las $b_n = 0$. Es decir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad f(x) \text{ par}, \tag{14.17}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \qquad f(x) \text{ impar} \tag{14.18}$$

Frecuentemente, estas propiedades son de utilidad para el desarrollo de cierta función.

Se ha hecho notar que la serie de Fourier es periódica. Esto es de importancia al considerar si la Ec. 14.1 es consistente fuera del intervalo inicial. Suponga que solamente se define que

$$f(x) = x, \qquad 0 \leqslant x < \pi \tag{14.19}$$

[1] Con el intervalo de integración $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

y que se desea conocer la representación de $f(x)$ por medio de un desarrollo en serie. Consideremos tres del número finito de desarrollos posibles.

1. Si se supone un desarrollo de Taylor, se tiene

$$f(x) = x, \tag{14.20}$$

es decir una serie de un término. Esta serie (un término) es definida para todas las x finitas.

2. Utilizando la serie de coseno de Fourier (Ec. 14.17), se puede predecir que

$$\begin{aligned} f(x) &= -x, \qquad -\pi < x \leqslant 0, \\ f(x) &= 2\pi - x, \qquad \pi < x < 2\pi. \end{aligned} \tag{14.21}$$

3. Finalmente, a partir de la serie de seno de Fourier (Ec. 14.18) se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \qquad -\pi < x \leqslant 0, \\ f(x) &= x - 2\pi, \qquad \pi < x < 2\pi. \end{aligned} \tag{14.22}$$

Estas tres posibilidades, es decir la serie de Taylor, la serie de coseno de Fourier y la serie de seno de Fourier, son perfectamente válidas cada una en el intervalo original $[0, \pi]$. Sin embargo, fuera de este intervalo su comportamiento es notablemente distinto (cf. Fig. 14.2). Siendo así, ¿cuál de las tres es la correcta? Esta pregunta no tiene contestación a menos de que se proporcione mayor información acerca de $f(x)$. Puede ser cualquiera o ninguna de las tres. Los desarrollos de Fourier son válidos dentro

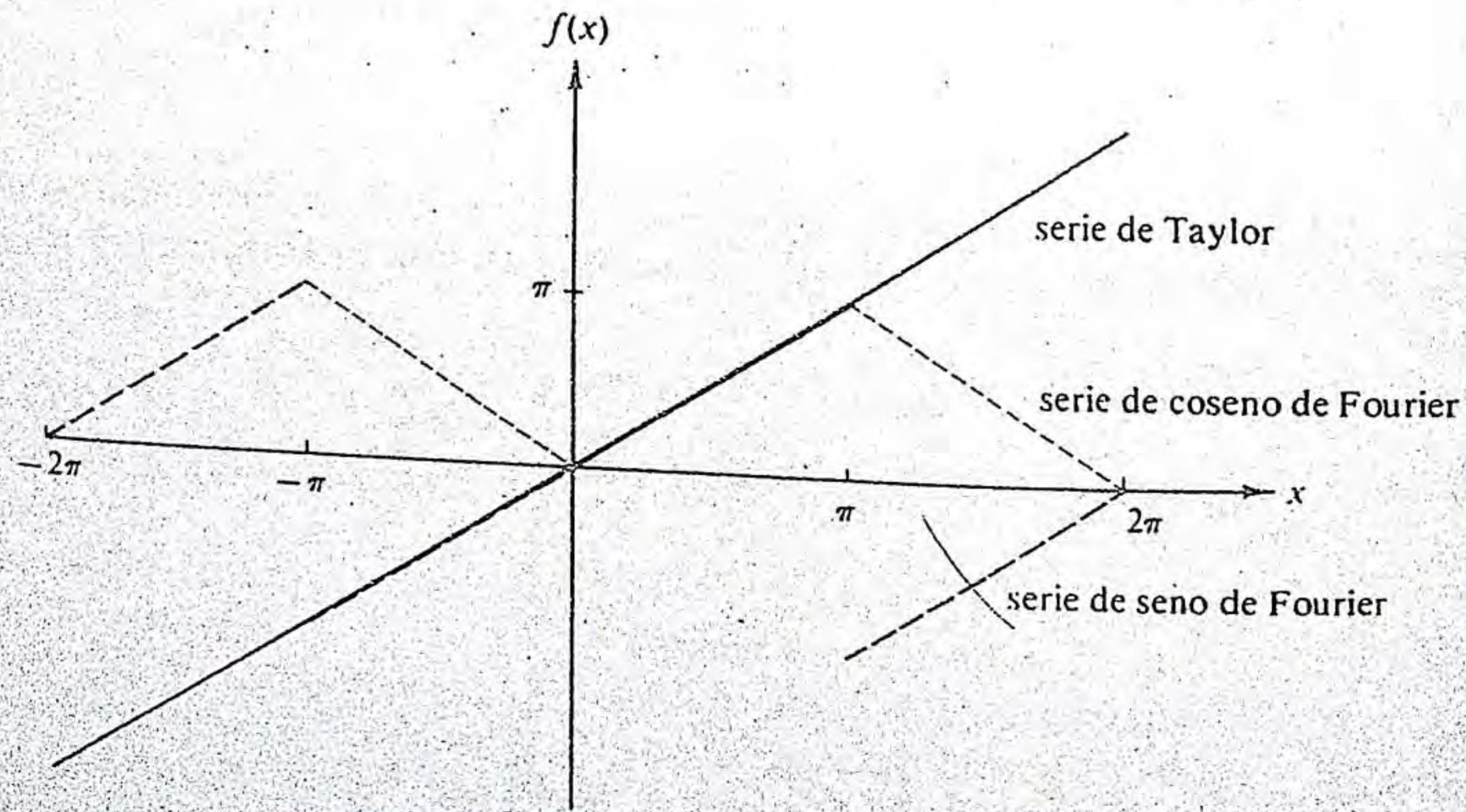


Fig. 14.2 Comparación de la serie de coseno de Fourier, serie de seno de Fourier y la serie de Taylor

del intervalo básico. A menos de que la función $f(x)$ sea conocida como periódica con un período igual al intervalo básico, o $(1/n)$ del intervalo básico, no se tiene ninguna seguridad acerca de que la representación (Ec. 14.1) tenga algún significado fuera del intervalo básico.

Además de las ventajas de representar las funciones discontinuas y periódicas, existe una tercera ventaja real al utilizar la serie de Fourier. Suponga que se pretende resolver la ecuación de movimiento de una partícula oscilante sujeta a una fuerza de impulsión periódica. El desarrollo de Fourier de la fuerza de impulsión proporciona el término fundamental y una serie de armónicos. La ecuación diferencial (lineal) se puede resolver para cada uno de estos armónicos individualmente, procedimiento que puede ser más sencillo cuando se trata con la fuerza de impulsión original. Siendo así, mientras la ecuación diferencial sea lineal, todas las soluciones se agregan entre sí para obtener la solución final.[1] Esto no es más que una treta matemática. Corresponde al hecho de encontrar la respuesta del sistema a la frecuencia fundamental y a cada una de las frecuencias armónicas.

Una pregunta que frecuentemente se presenta es: ¿la presencia de los armónicos es desde el principio o fue originada por el análisis de Fourier? Una de las respuestas compara la resolución en armónicos con la resolución de un vector en los componentes rectangulares. Los componentes pudieron haber estado presentes en el sentido de que pudieron haber sido aislados y observados, pero la resolución ciertamente no es única. Siendo así, muchos expertos prefieren decir que los armónicos fueron originados por la selección del desarrollo. Otros desarrollos en diferentes conjuntos de funciones ortogonales darían lugar a resultados distintos. Para una descripción más detallada, el lector deberá consultar una serie de notas y artículos en *American Journal of Physics.*[2]

Cambio de Intervalo. Hasta ahora, la atención se ha concentrado en un intervalo con longitud 2π. Esta restricción puede eliminarse con facilidad. Si $f(x)$ es periódica con el período $2L$, se puede indicar

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right] \tag{14.23}$$

con

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{14.24}$$

[1] Una de las características más desagradables de las ecuaciones diferenciales no lineales es que el principio de la sobreposición no es válido.

[2] B. L. Robinson, *Am. J. Phys.* 21, 391 (1953).
F. W. Van Name, Jr., *Am. J. Phys.* 22, 94 (1954).

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{14.25}$$

sustituyendo x en la Ec. 14.1 con $\pi x/L$ y t en las Ecs. 14.11 y 14.12 con $\pi t/L$. (Por conveniencia, el intervalo en las Ecs. 14.11 y 14.12 se desplaza a $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$.)

EJERCICIOS

14.2.1 Las condiciones limitantes (tal como $\psi(0) = \psi(l) = 0$) pueden sugerir soluciones de la forma sen $(n\pi x/l)$ y eliminar los cosenos correspondientes.

(a) Verifique que las condiciones limitantes empleadas en la teoría de Sturm-Liouville se satisfacen para el intervalo $(0, l)$. Observe que esto es tan solo la mitad del intervalo usual de Fourier.

(b) Demuestre que el conjunto de funciones $\varphi_n(x) = \text{sen}\,(n\pi x/l)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ satisface la relación de ortogonalidad

$$\int_0^l \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \frac{l}{2}\,\delta_{nm}, \qquad n > 0.$$

14.2.2 (a) Desarrolle $f(x) = x$ en el intervalo $(0, 2L)$.

Respuesta. $$x = L - \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

(b) Desarrolle $f(x) = x$ como una serie de senos en la *mitad* del intervalo $(0, L)$.

Respuesta. $$x = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

14.3 Aplicaciones de la Serie de Fourier

EJEMPLO 14.3.1 ONDA CUADRADA. FRECUENCIAS ALTAS

Una aplicación simple de la serie de Fourier, es decir el análisis de una onda "cuadrada", en términos de sus componentes de Fourier, se puede presentar en los circuitos electrónicos diseñados para el manejo de los pulsos ascendentes agudos. Suponga que la onda está definida por

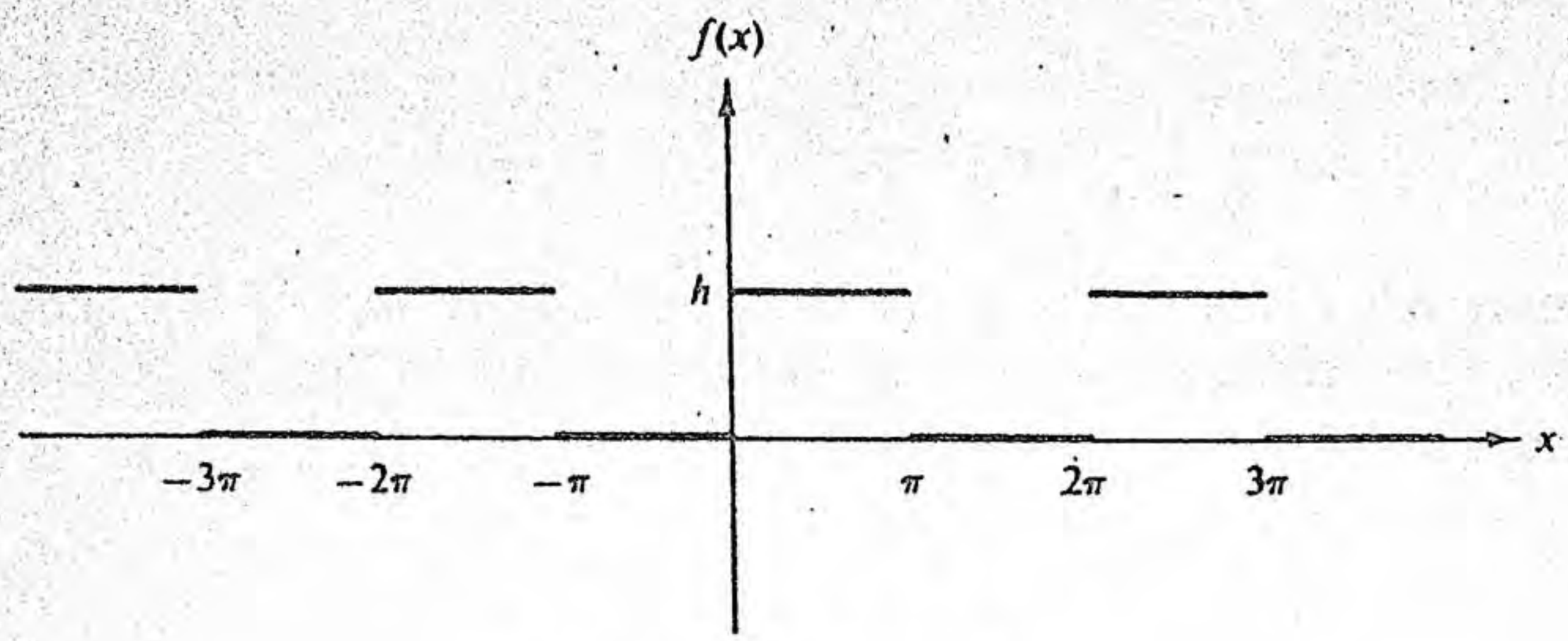


Fig. 14.3 Onda cuadrada

$$f(x) = 0, \qquad -\pi < x < 0,$$
$$f(x) = h, \qquad 0 < x < \pi. \tag{14.26}$$

A partir de las Ecs. 14.11 y 14.12 se encuentra que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\,dt = h, \tag{14.27}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\cos nt\;dt = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{14.28}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\,\mathrm{sen}\,nt\;dt = \frac{h}{n\pi}(1 - \cos n\pi); \tag{14.29}$$

$$b_n = \frac{2h}{n\pi}, \qquad n \text{ impar} \tag{14.30}$$

$$b_n = 0, \qquad n \text{ par}. \tag{14.31}$$

La serie resultante es

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{1} + \frac{\mathrm{sen}\,3x}{3} + \frac{\mathrm{sen}\,5x}{5} + \cdots\right). \tag{14.32}$$

Excepto por el primer término que representa un promedio de $f(x)$ dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$, todos los términos de coseno han desaparecido. Ya que $f(x) - h/2$ es impar, se tiene una serie de seno de Fourier. Aun cuando tan solo los términos impares en la serie de seno son los que se presentan, decaen solamente como n^{-1}. Esto es similar a la convergencia (o la falta de convergencia) de la serie armónica. Físicamente significa que la onda cuadrada contiene una gran proporción de componentes de alta frecuencia. Si el aparato no admite estos componentes, la entrada de onda cuadrada saldrá en una forma más o menos redondeada, posiblemente como una burbuja amorfa.

EJEMPLO 14.3.2 RECTIFICADOR DE ONDA COMPLETA

Como segundo ejemplo, se podría establecer la pregunta de qué tan bien se aproxima la salida de un rectificador de onda completa a la corriente directa pura. El rectificador puede considerarse que ha admitido los picos positivos de una onda senoidal entrante y que ha invertido los picos negativos. Esto proporciona

$$f(t) = \operatorname{sen} \omega t, \qquad 0 < \omega t < \pi,$$

$$f(t) = -\operatorname{sen} \omega t, \qquad -\pi < \omega t < 0. \tag{14.33}$$

Ya que $f(t)$ definida aquí es par, no aparecerán términos de la forma $\operatorname{sen} n\omega t$. Nuevamente, de acuerdo con las Ecs. 14.11 y 14.12, se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\operatorname{sen} \omega t \, d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} \omega t \, d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} \omega t \, d(\omega t) = \frac{4}{\pi}, \tag{14.34}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} \omega t \cos n\omega t \, d(\omega t)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \frac{2}{n^2 - 1}, \qquad n \text{ par}$$

$$= 0, \qquad n \text{ impar} \tag{14.35}$$

Observe cuidadosamente que $[0, \pi]$ no corresponde a un intervalo de ortogonalidad y que no se obtiene cero para n par. La serie resultante es

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} \frac{\cos n\omega t}{n^2 - 1}. \tag{14.36}$$

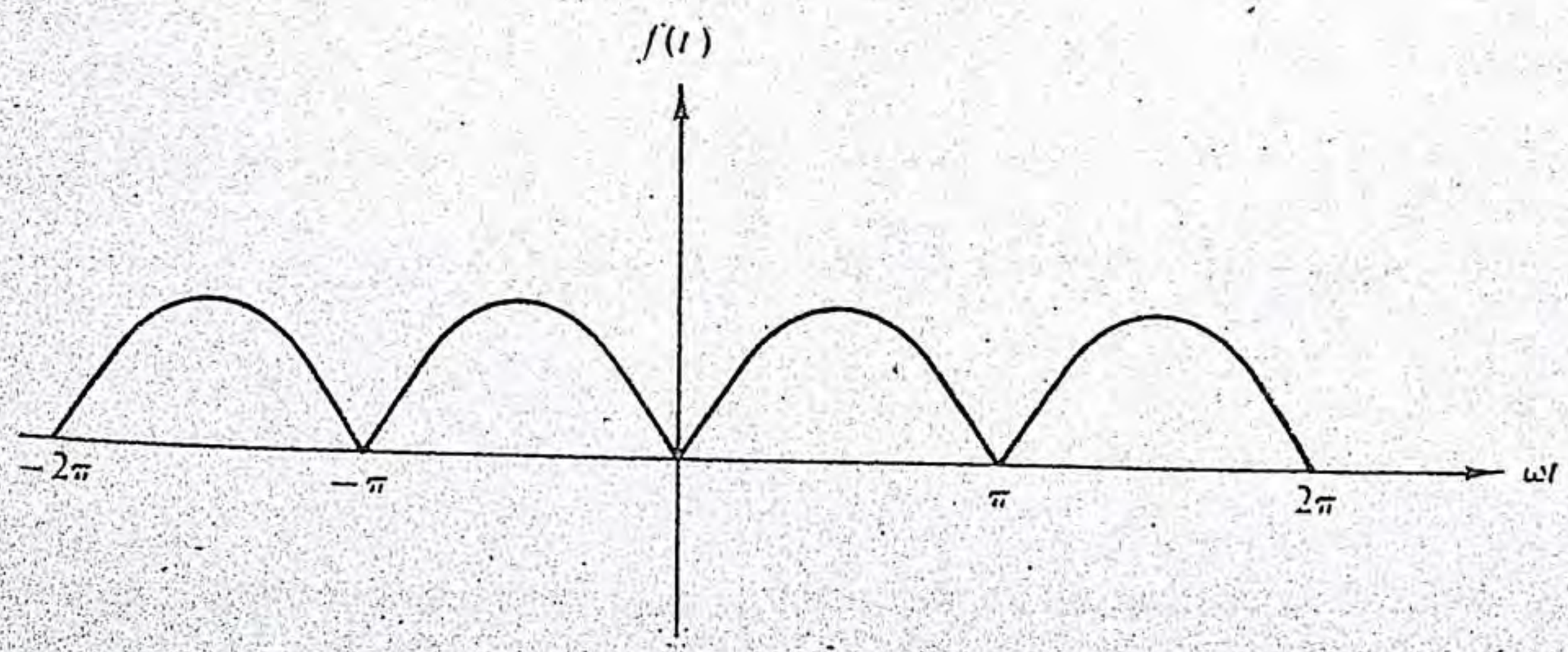


Fig. 14.4 Rectificador de onda completa

La frecuencia original ω ha sido eliminada. La oscilación de frecuencia más baja es 2ω. Los componentes de alta frecuencia decaen como n^{-2}, demostrando así que el rectificador de onda completa realiza un trabajo adecuado en cuanto a la aproximación a la corriente directa. El grado de adecuado de esta aproximación depende de la aplicación particular. Si los componentes de ca restantes son objetables, se pueden eliminar por medio de un circuito filtrante apropiado.

Estos dos ejemplos establecen dos características típicas de los desarrollos de Fourier.[1]

1. Si $f(x)$ tiene discontinuidades (tal como en la onda cuadrada del Ejemplo 14.3.1), se puede esperar que el enésimo coeficiente sea decreciente como $1/n$. La convergencia es relativamente lenta.

2. Si $f(x)$ es continua (aun cuando posiblemente con derivadas discontinuas como en el caso del rectificador de onda completa del Ejemplo 14.3.2), es de esperarse que el enésimo coeficiente sea decreciente como $1/n^2$.

EJEMPLO 14.3.3 SERIE INFINITA, FUNCION ZETA DE RIEMANN

A modo de ejemplo final, se considera el problema puramente matemático de desarrollar x^2. Sea

$$f(x) = x^2, \qquad -\pi < x < \pi. \tag{14.37}$$

Por simetría, todas las $b_n = 0$. Para los términos a_n se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}, \tag{14.38}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot(-1)^n\frac{2\pi}{n^2} \\ &= (-1)^n\frac{4}{n^2}. \end{aligned} \tag{14.39}$$

De lo anterior se obtiene

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}. \tag{14.40}$$

[1] G. Raisbeck, "Order of Magnitude of Fourier Coefficients", *Am. Math. Monthly* 62, 149-155 (1955).

Tal como ha quedado establecida, la Ec. 14.40 no es de importancia particular, pero si se permite que $x = \pi$ [1]

$$\cos n\pi = (-1)^n \tag{14.41}$$

y la Ec. 14.40 se transforma en

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{14.42}$$

o

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \zeta(2), \tag{14.43}$$

proporcionando así la función zeta de Riemann, $\zeta(2)$, en la forma cerrada. De acuerdo con el desarrollo de x^2 y los desarrollos de otras potencias de x, se puede evaluar otra gran diversidad de series infinitas. Algunas de estas se incluyen en los ejercicios que siguen.

EJERCICIOS

14.3.1 Desarrolle la representación de serie de Fourier para

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant \omega t \leqslant 0, \\ \operatorname{sen} \omega t, & 0 \leqslant \omega t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Esto corresponde a la salida de un rectificador de onda media simple. También constituye una aproximación del efecto térmico solar que produce "corrientes" en la atmósfera.

Respuesta. $f(t) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} \omega t - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{\substack{n=2,4,6,\ldots \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{\cos n\omega t}{n^2 - 1}.$

14.3.2 Una onda de diente de sierra está definida por

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Demuestre que

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx.$$

14.3.3 Una onda triangular está representada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ -x, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

[1] Observe que el punto $x = \pi$ *no* es un punto de discontinuidad.

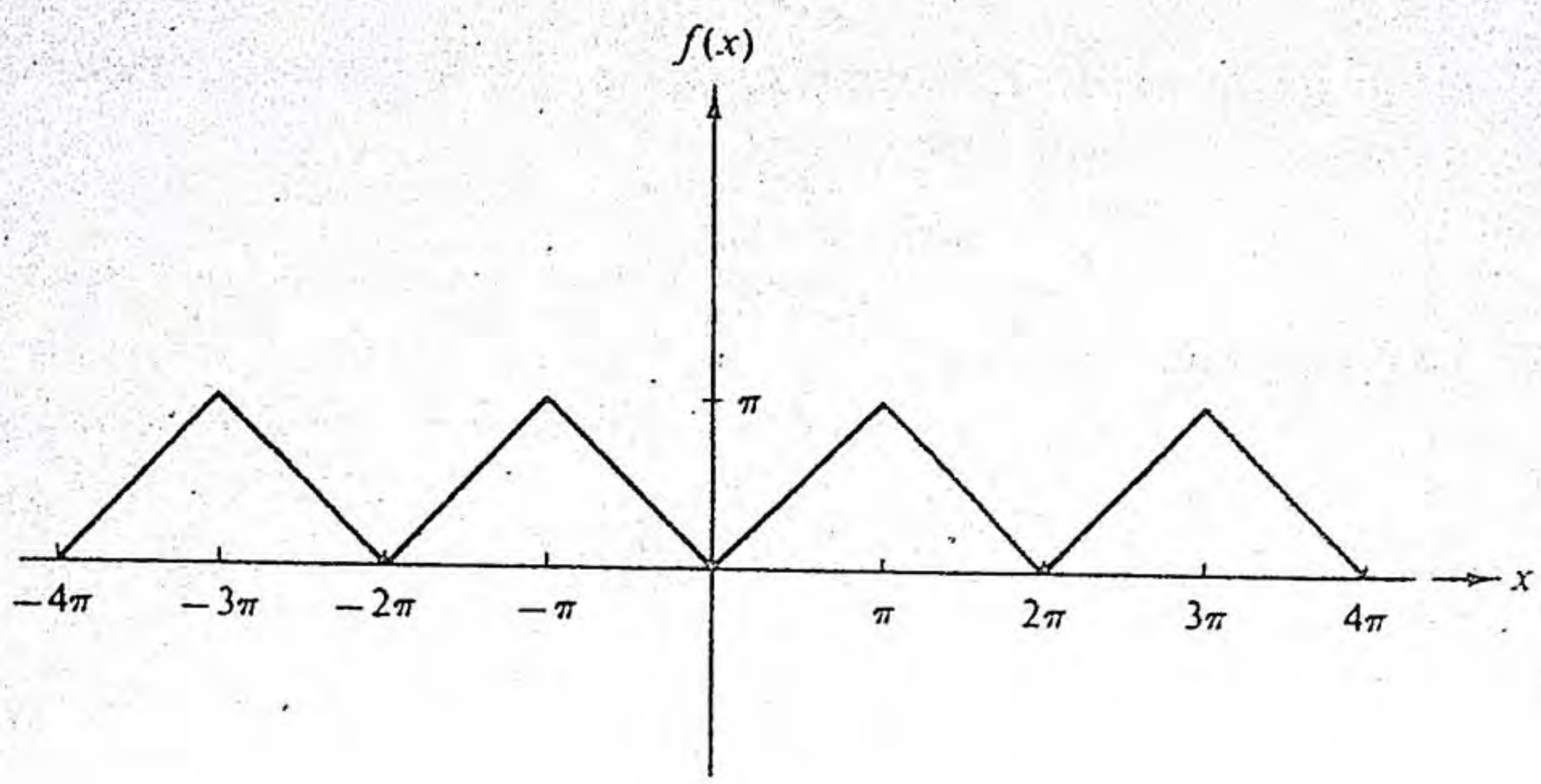


Fig. 14.5 Onda triangular

Represente $f(x)$ por medio de una serie de Fourier.

$$\textit{Respuesta.}\ f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1,3,5,\ldots \\ \text{impar}}} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

14.3.4 Un tubo cilíndrico de metal de radio a se corta longitudinalmente en dos mitades fuera de contacto. La mitad superior se mantiene al potencial $+V$, y la mitad inferior al potencial $-V$. Separe las variables en la ecuación de Laplace y resuelva para el potencial electrostático de $r \leqslant a$. Observe la semejanza entre la solución para $r = a$ y la serie de Fourier para una onda cuadrada.

Nota. Una solución de forma cerrada se obtiene en la Sección 6.7 por medio del análisis de variable compleja.

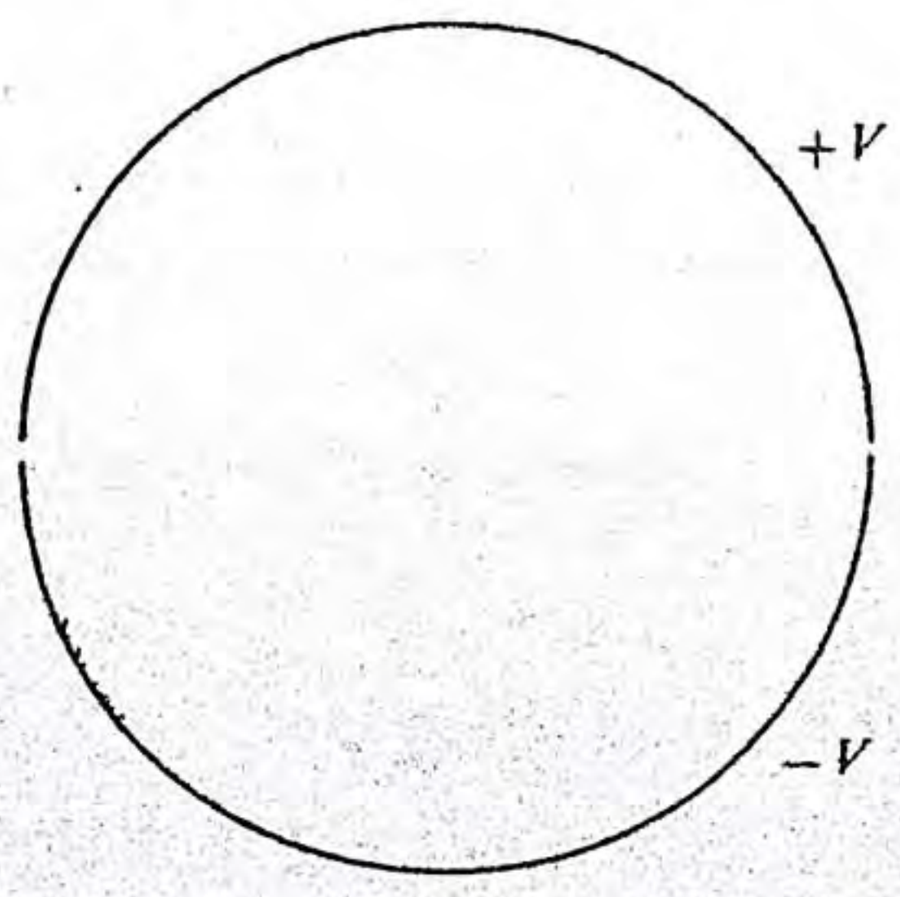


Fig. 14.6

14.3.5 Un cilindro de metal se coloca en un campo eléctrico (previamente) uniforme, E_0, de modo que el eje del cilindro es perpendicular al eje del campo original.

(a) Encuentre el potencial electrostático perturbado.

(b) Encuentre la carga superficial inducida en el cilindro como una función de la posición angular.

Nota. El Ejercicio 6.7.12 requiere de una solución de representación conformal para el mismo problema.

14.3.6 Transforme el desarrollo de Fourier de una onda cuadrada, Ec. 14.32, en una serie de potencias. Demuestre que los coeficientes de x^1 forman una serie *divergente*. Repita para los coeficientes de x^3.
Una serie de potencias no puede considerar una discontinuidad. Estos coeficientes infinitos son el resultado de intentar derribar esta limitación básica de la serie de potencias.

14.3.7 (a) Demuestre que el desarrollo de Fourier de cos ax es

$$\cos ax = \frac{2a \operatorname{sen} a\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{a^2 - 2^2} - \cdots\right\},$$

$$a_n = (-1)^n \frac{2a \operatorname{sen} a\pi}{\pi(a^2 - n^2)}.$$

(b) De acuerdo con el resultado anterior, demuestre que

$$a\pi \cot a\pi = 1 - 2\sum_{p=1}^{\infty} \zeta(2p)a^{2p}.$$

Esto proporciona una derivación alternativa de la relación entre la función zeta de Riemann y los números de Bernoulli, Ec. 5.151.

14.3.8 Derive el desarrollo de serie de Fourier para la función delta de Dirac en el intervalo $-\pi < x < \pi$.
(a) ¿Qué significado debe aplicarse al término constante?
(b) ¿En qué región es válida esta representación?

14.3.9 Verifique que

$$\delta(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Nota. El análogo continuo de esta expresión se establece en la Sección 15.2. La aplicación más importante de esta expresión es en la determinación de las funciones de Green, Sección 16.6.

14.3.10 (a) Utilizando

$$f(x) = x^2, \qquad -\pi < x < \pi,$$

demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(b) Utilizando la serie de Fourier para una onda triangular establecida en el Ejercicio 14.3.3, demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(c) Utilizando

$$f(x) = x^4, \qquad -\pi < x < \pi,$$

demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = \zeta(4),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}.$$

(d) Utilizando

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 < x < \pi, \\ x(\pi + x), & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

derive

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{n=1,3,5,\cdots \\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$$

y demuestre que

$$\sum_{\substack{n=1,3,5,\cdots \\ \text{impar}}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} n^{-3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}.$$

(e) Utilizando la serie de Fourier para una onda cuadrada, demuestre que

$$\sum_{\substack{n=1,3,5,\cdots \\ \text{impar}}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} n^{-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Esta es la fórmula de Leibnitz para xx obtenida mediante una técnica diferente en el Ejercicio 5.7.6.

14.4 Propiedades de la Serie de Fourier

Convergencia. Es de hacerse notar, primeramente, que la serie de Fourier no debe esperarse que sea uniformemente convergente si es que representa una función discontinua. Una serie uniformemente convergente de funciones continuas (sen nx, cos nx) siempre proporciona una función continua (cf. Sección 5.5). Cuando (a) $f(x)$ es continua, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, (b) $f(-\pi) = f(+\pi)$ y (c) $f'(x)$ es seccionalmente continua, la serie de Fourier para $f(x)$ converge uniformemente. Estas restricciones no requieren que $f(x)$ sea periódica, pero serán satisfechas por las funciones periódicas, diferenciables, continuas (período de 2π). Para una demostración de la convergencia uniforme el lector puede consultar la literatura al respecto.[1]

Integración. La integración término por término de la serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \tag{14.44}$$

[1] Véase, por ejemplo, R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*. Nueva York: McGraw-Hill (1941), Sección 38.

proporciona

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \frac{a_0 x}{2}\bigg|_{x_0}^{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} nx\bigg|_{x_0}^{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx\bigg|_{x_0}^{x}. \tag{14.45}$$

Evidentemente, el efecto de la integración consiste en incorporar una potencia adicional de n en el denominador de cada coeficiente. Esto da como resultado una convergencia más rápida que antes. En consecuencia, una serie de Fourier convergente siempre puede integrarse término por término y la serie resultante converge uniformemente a una integral de la función original. De hecho, ¡la integración término por término puede ser válida aun cuando la serie original (Ec. 14.44) no sea por sí misma convergente! Una descripción adicional puede encontrarse en Jeffreys y Jeffreys, Sección 14.06.

Desde un punto de vista estricto, la Ec. 14.45 puede no ser una serie de Fourier; es decir, si $a_0 \neq 0$ se tendrá un término $\frac{1}{2}a_0 x$. Sin embargo,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}a_0 x \tag{14.46}$$

Diferenciación. La situación correspondiente a la diferenciación es bastante diferente de la integración. Aquí debe considerarse una *precaución*. Considere la serie para

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi. \tag{14.47}$$

Con facilidad se encuentra (cf. Ejercicio 14.3.2) que la serie de Fourier es

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \qquad -\pi < x < \pi. \tag{14.48}$$

Diferenciando término por término se obtiene

$$1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos nx, \tag{14.49}$$

¡la cual no es convergente!

Para una onda triangular (Ejercicio 14.3.3), en que la convergencia es más rápida (y uniforme),

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,\,\text{impar}}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}. \tag{14.50}$$

Diferenciando término por término

$$f'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,\,\text{impar}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}, \tag{14.51}$$

lo cual corresponde a un desarrollo de Fourier de una onda cuadrada

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases} \tag{14.52}$$

La inspección de la Fig. 14.5 verifica que esto de hecho es una derivada de la onda triangular.

A diferencia de la integración, la operación de la diferenciación ha incorporado un factor adicional n en el numerador de cada término. Esto reduce la tasa de convergencia y, como en el primer caso mencionado, puede originar que la serie diferenciada sea divergente.

En general, la diferenciación término por término es permisible bajo las mismas condiciones establecidas para la convergencia uniforme.

Factores de Convergencia de Lanczos. La operación de la diferenciación también es problemática en otro aspecto. Lanczos ha indicado el peligro y un remedio posible para esto. Primeramente se observa que el uso de un número *infinito* de términos en el desarrollo de Fourier constituye frecuentemente un objeto inalcanzable. En lugar de esto, sea

$$f(x) = f_m(x) + \eta_m(x), \tag{14.53}$$

con

$$f_m(x) = \sum_{n=-(m-1)}^{m-1} c_n e^{inx}, \tag{14.54}$$

cambiando a la forma exponencial por conveniencia, y siendo η_m un restante o término de error definido por

$$\begin{aligned} \eta_m(x) &= \sum_{n=m}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \\ &= e^{imx} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} e^{inx} + e^{-imx} \sum_{n=0}^{\infty} c_{-m-n} e^{-inx} \\ &= e^{imx} \rho_m(x) + e^{-imx} \rho_{-m}(x). \end{aligned} \tag{14.55}$$

En términos electrónicos, $\eta_m(x)$ es una onda portadora modulada con una portadora de alta frecuencia, e^{imx}, y una modulación, $\rho_m(x)$. La diferenciación de este término restante, $\eta_m(x)$, origina

$$\frac{d\eta_m(x)}{dx} = ime^{imx} \rho_m(x) + e^{imx} \frac{d\rho_m(x)}{dx} + \cdots \tag{14.56}$$

El problema se presenta en el primer término de la derecha que deja de ser consistente a medida que $m \to \infty$. Ahora bien, esto corresponde a la diferenciación de la frecuencia portadora e^{imx}. De hecho, se requiere tan solo diferenciar la modulación $\rho_m(x)$, y esta parte tiene un comportamiento adecuado.

Lanczos ha sugerido que se puede lograr lo deseado y evitar la infinidad extraña al definir un nuevo operador de diferencia, $\mathscr{D}_m$, por medio de la ecuación

$$\mathscr{D}_m f(x) = \frac{f(x + \pi/m) - f(x - \pi/m)}{2\pi/m}. \tag{14.57}$$

Esto representa cierta clase de derivada promedio. Evidentemente,

$$\lim_{m \to \infty} \mathscr{D}_m = \frac{d}{dx}. \tag{14.58}$$

Mediante la aplicación de $\mathscr{D}_m$ al restante, $\eta_m(x)$, se obtiene

$$\mathscr{D}_m \eta_m(x) = \frac{e^{im(x+\pi/m)}\rho_m(x + \pi/m) - e^{im(x-\pi/m)}\rho_m(x - \pi/m)}{2\pi/m}$$

$$+ \frac{e^{-im(x+\pi/m)}\rho_{-m}(x + \pi/m) - e^{-im(x-\pi/m)}\rho_{-m}(x - \pi/m)}{2\pi/m}, \tag{14.59}$$

$$\mathscr{D}_m \eta_m(x) = -e^{imx}\mathscr{D}_m \rho_m(x) - e^{-imx}\mathscr{D}_m \rho_{-m}(x),$$

demostrando que $\mathscr{D}_m$ opera efectivamente en la modulación ρ_m y *no* en la portadora e^{imx}. Los términos divergentes de las formas $ime^{imx}\rho_m(x)$ han sido eliminados. (El signo menos aparece en este caso como resultado de considerar puntos $x \pm \pi/m$ que han sido desplazados medio ciclo de e^{imx}.)

Aplicado a una serie de Fourier compleja,

$$\mathscr{D}_m e^{inx} = \frac{e^{in(x+\pi/m)} - e^{+in(x-\pi/m)}}{2\pi/m}$$

$$= ine^{inx}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/m)}{n\pi/m}. \tag{14.60}$$

En consecuencia,

$$\mathscr{D}_m e^{inx} = \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi/m)}{n\pi/m}\right]\frac{d}{dx}e^{inx}. \tag{14.61}$$

El factor adicional sen $(n\pi/m)/(n\pi/m)$ se denomina factor de modulación de Lanczos, o factor de convergencia de Lanczos, σ_n; es decir

$$\sigma_n = \frac{\operatorname{sen}(n\pi/m)}{n\pi/m}. \tag{14.62}$$

La inclusión de estos términos σ_n en una serie diferenciada ocasionalmente es de utilidad para la convergencia. La serie de Fourier *finita*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m-1}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{14.63}$$

se sustituye por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m-1}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/m)}{n\pi/m}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \tag{14.64}$$

Como se observará en la Sección 14.5, los coeficientes de Lanczos σ_n pueden eliminar casi el fenómeno de Gibbs.

EJERCICIOS

14.4.1 Demuestre que la integración del desarrollo de Fourier de $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, origina

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-2}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \cdots$$

14.4.2 Identidad de Parseval.

(a) Suponiendo que el desarrollo de Fourier de $f(x)$ es uniformemente convergente, demuestre que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Esta es la identidad de Parseval. De hecho constituye un caso especial de la relación de plenitud, Ec. 9.72.

(b) Teniendo

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

aplique la identidad de Parseval para obtener $\zeta(4)$ en la forma cerrada.

14.4.3 Demuestre que la integración del desarrollo de Fourier para la función delta de Dirac (Ejercicio 14.3.8) origina la representación de Fourier de la onda cuadrada, Ec. 14.32, con $h = 1$.

Nota. Integrando el término constante $(1/2\pi)$ origina el término $x/2\pi$. ¿Qué hará usted con esto?

14.4.4 En el intervalo $(-\pi, \pi)$,

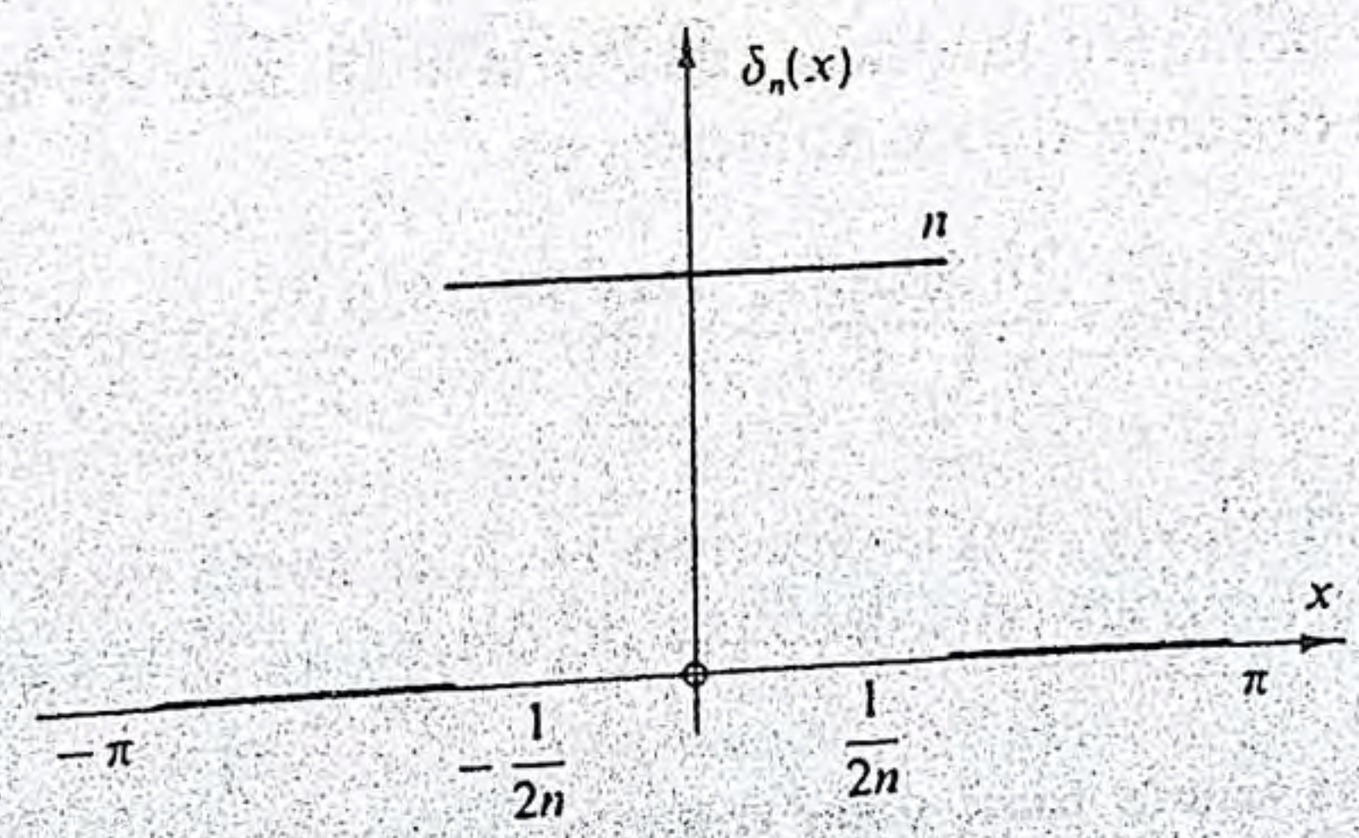


Fig. 14.7 Pulso rectangular

$$\delta_n(x) = n, \qquad \text{para } |x| < \frac{1}{2n},$$

$$0, \qquad \text{para } |x| > \frac{1}{2n}.$$

(a) Desarrolle $\delta_n(x)$ como una serie de coseno de Fourier.

(b) Demuestre que la serie de Fourier concuerda con el desarrollo de Fourier de $\delta(x)$ en el límite a medida que $n \to \infty$.

14.4.5 Confirme la naturaleza de la función delta de la serie de Fourier del Ejercicio 14.4.4 al demostrar que para cada $f(x)$ que sea finita en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y continua en $x = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,[\text{desarrollo de Fourier para } \delta_\infty(x)]\,dx = f(0).$$

14.4.6 (a) Demuestre que la función delta de Dirac $\delta(x-a)$, desarrollada en una serie de seno de Fourier en el intervalo medio $(0, L)$, $(0 < a < L)$, está dada por

$$\delta(x-a) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Observe que esta serie de hecho describe

$$-\delta(x+a) + \delta(x-a) \text{ en el intervalo } (-L, L).$$

(b) Mediante la integración de ambos lados de la ecuación anterior desde 0 hasta x, demuestre que el desarrollo de coseno de la onda cuadrada

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ 1, & a < x < L, \end{cases}$$

es

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad 0 \le x < L.$$

(c) Verifique que el término $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$ es $< f(x) >$.

14.4.7 Verifique el desarrollo de coseno de Fourier de la onda cuadrada, Ejercicio 14.4.6(b), mediante el cálculo directo de los coeficientes de Fourier.

14.4.8 (a) Una cuerda se encuentra sujeta en ambos extremos $x = 0$ y $x = L$. Suponiendo vibraciones de pequeña amplitud, se tiene que la amplitud $y(x, t)$ satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Aquí, v es la velocidad de onda. La cuerda se somete a la vibración por medio de un golpe intenso a $x = a$. En consecuencia, se tiene

$$y(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = Lv_0\,\delta(x-a) \qquad \text{en } t = 0.$$

La constante L se incluye para compensar por las dimensiones (longitud inversa) de $\delta(x-a)$. Con $\delta(x-a)$ definida por el Ejercicio 14.4.6(a), resuelva la ecuación de onda sujeta a estas condiciones iniciales.

$$\textit{Respuesta.}\ y(x,t)=\frac{2v_0L}{\pi v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi a}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi vt}{L}.$$

(b) Demuestre que la velocidad transversal de la cuerda $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ está definida por

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=2v_0\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{n\pi a}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi vt}{L}.$$

14.4.9 Una cuerda, sujeta en $x=0$ y $x=l$, vibra libremente. Su movimiento está descrito por la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Suponga un desarrollo de Fourier de la forma

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

y determine los coeficientes $b_n(t)$. Las condiciones iniciales son

$$u(x,0)=f(x)\qquad\text{y}\qquad\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=g(x).$$

Nota. Este es tan solo la mitad del intervalo integral de ortogonalidad de Fourier convencional. Sin embargo, mientras se encuentren incluidos los senos, las condiciones limitantes de Sturm-Liouville siguen siendo satisfechas y las funciones son ortogonales.

$$\textit{Respuesta.}\ b_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi vt}{l}+B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi vt}{l},$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ B_n=\frac{2}{n\pi v}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

14.4.10 (a) Como continuación del problema de la cuerda vibrante, Ejercicio 14.4.9, la presencia de un medio de resistencia amortigua las vibraciones de acuerdo con la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-k\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Suponga un desarrollo de Fourier

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

y nuevamente determine los coeficientes $b_n(t)$. Considere las condiciones limitantes iniciales y finales iguales que en el Ejercicio 14.4.9. Suponga que el amortiguamiento es pequeño.

(b) Repita pero suponiendo que el amortiguamiento es grande.

Respuesta.

(a) $b_n(t) = e^{-kt/2}\{A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t\}$,

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int_0^l g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx + \frac{k}{2\omega_n} A_n,\ \omega_n^2 = \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 > 0.$$

(b) $b_n(t) = e^{-kt/2}\{A_n \cosh \sigma_n t + B_n \operatorname{senh} \sigma_n t\}$,

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

$$B_n = \frac{2}{\sigma_n l}\int_0^l g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx + \frac{k}{2\sigma_n} A_n,\ \sigma_n^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 > 0.$$

14.4.11 Encuentre la distribución de carga sobre las superficies interiores de los semicírculos del Ejercicio 14.3.4.

Nota. Al obtener la serie divergente, el procedimiento de Fourier falla. De acuerdo con la Sección 6.7, $\sigma \sim \csc \theta$. Indique si $\csc \theta$ tiene un desarrollo de Fourier.

14.5 Fenómeno de Gibbs

Este constituye una peculiaridad de la serie de Fourier a una discontinuidad simple. Un ejemplo se puede observar en la Fig. 14.1. Por conveniencia para el cálculo numérico, se considera el comportamiento de la serie de Fourier que representa la onda cuadrada periódica

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{2}, & 0 < x < \pi, \\ -\dfrac{h}{2}, & -\pi < x < 0. \end{cases} \tag{14.65}$$

Esta es esencialmente la onda cuadrada utilizada en la Sección 14.3 y de inmediato se observa que la solución es

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots\right) \tag{14.66}$$

Suma de Series.[1] En la Sección 14.1, la suma de los primeros términos de la serie de Fourier para la onda de diente de sierra se presentó en forma

[1] Es de cierto interés hacer notar que esta serie también se presenta en el análisis de la rejilla de difracción (rendijas *r*).

de gráfica (Fig. 14.1). Ahora se procederá a establecer un método analítico de sumar los primeros r términos de la serie de Fourier (Ec. 14.66). De acuedo con la Ec. 14.13

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t - x)\, dt. \tag{14.67}$$

Siendo así, la suma parcial número r se transforma en

$$\begin{aligned} s_r(x) &= \sum_{n=0}^{r} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \\ &= \mathscr{R} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{r} e^{-i(t-x)n} \right] dt. \end{aligned} \tag{14.68}$$

Sumando la serie finita de exponenciales (progresión geométrica),[1] se obtiene

$$s_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen}[(r + \frac{1}{2})(t - x)]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(t - x)} dt. \tag{14.69}$$

Esta es convergente en todos los puntos, incluyendo $t = x$.

Onda Cuadrada. Aplicando este resultado a la onda cuadrada (Ec. 14.66), se tiene la suma de los primeros r términos (más $\frac{1}{2}a_0$, lo cual corresponde a cero en este caso):

$$\begin{aligned} s_r(x) &= \frac{h}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(r + \frac{1}{2})(t - x)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(t - x)} dt - \frac{h}{4\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{\operatorname{sen}(r + \frac{1}{2})(t - x)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(t - x)} dt \\ &= \frac{h}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(r + \frac{1}{2})(t - x)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(t - x)} dt - \frac{h}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(r + \frac{1}{2})(t + x)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(t + x)} dt. \end{aligned} \tag{14.70}$$

El último resultado se obtiene de la transformación

$$t = -t \qquad \text{en la segunda integral} \tag{14.71}$$

Sustituyendo $t - x$ en el primer término con s y $t + x$ en el segundo término con s se obtiene

$$\begin{aligned} s_r(x) &= \frac{h}{4\pi} \int_{-x}^{\pi - x} \frac{\operatorname{sen}(r + \frac{1}{2})s}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}s} ds - \frac{h}{4\pi} \int_{x}^{\pi + x} \frac{\operatorname{sen}(r + \frac{1}{2})s}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}s} ds \\ &= \frac{h}{4\pi} \int_{-x}^{x} \frac{\operatorname{sen}(r + \frac{1}{2})s}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}s} ds - \frac{h}{4\pi} \int_{\pi - x}^{\pi + x} \frac{\operatorname{sen}(r + \frac{1}{2})s}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}s} ds. \end{aligned} \tag{14.72}$$

[1] Cf. Ejercicio 6.1.5 con el valor inicial $n = 1$.

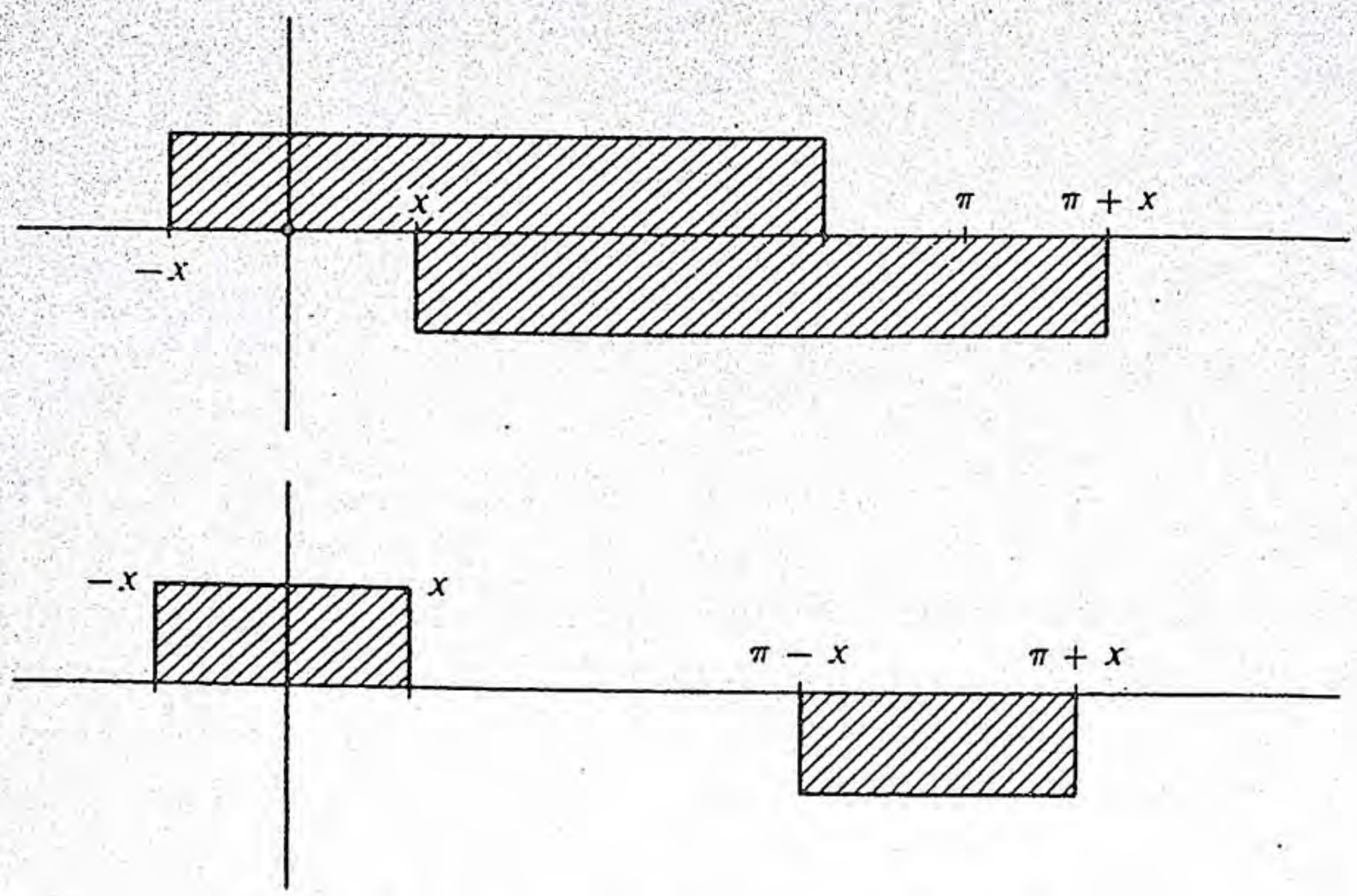


Fig. 14.8 Intervalos de integración. Ec. 14.72

Considere la suma parcial en la vecindad de la discontinuidad a $x = 0$. A medida que $x \to 0$, la segunda integral se vuelve despreciable y la primera integral se asocia con la discontinuidad en $x = 0$. Utilizando $(r + \frac{1}{2}) = p$ y $ps = \xi$, se obtiene

$$s_r(x) = \frac{h}{2\pi} \int_0^{px} \frac{\operatorname{sen} \xi}{\operatorname{sen}(\xi/2p)} \cdot \frac{d\xi}{p}. \tag{14.73}$$

Cálculo del Sobreimpulso. La suma parcial, $s_r(x)$, se inicia en cero cuando $x = 0$ (en concordancia con la Ec. 14.16) y aumenta hasta $px = \pi$, punto en el cual el numerador, sen ξ, se vuelve negativo. Para r más grande, y consecuentemente p más grande, el denominador permanece positivo.

Siendo así, el valor máximo de la suma parcial es

$$s_r(x)_{\text{máx}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \xi \, d\xi}{\operatorname{sen}(\xi/2p)p}$$

$$\approx \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} \, d\xi. \tag{14.74}$$

En términos de la integral de seno $si(x)$ de la Sección 10.5,

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} \, d\xi = \frac{\pi}{2} + si(\pi). \tag{14.74a}$$

Evidentemente la integral es mayor que $\pi/2$, y se puede indicar en la forma

$$\left(\int_0^{\infty} - \int_{\pi}^{3\pi} - \int_{3\pi}^{5\pi} - \cdots\right)\frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi = \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi. \tag{14.75}$$

Como se indicó en la Sección 7.2, la integral de 0 hasta ∞ es $\pi/2$. De acuerdo con esta integral, estamos restando una serie de términos *negativos*. El desarrollo de serie de potencias y la integración término por término proporciona

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi = 1.1789798\ldots, \tag{14.76}$$

lo cual significa que la serie de Fourier tiende a manifestar sobreimpulsos en la esquina positiva en una proporción de 18 por ciento y bajoimpulsos en la esquina negativa en la misma proporción, tal como lo sugiere la Fig. 14.9. La incorporación de más términos (r creciente) no hace nada por eliminar estos sobreimpulsos sino que tan solo los mueve más cerca del punto de discontinuidad. Los sobreimpulsos constituyen el fenómeno de Gibbs, y debido al mismo, la representación de serie de Fourier puede resultar altamente desconfiable para el trabajo numérico preciso, especialmente en las cercanías de una discontinuidad.

Tal como se sugiere en la Sección 14.4, el fenómeno de Gibbs se puede eliminar drásticamente mediante el uso de los factores de convergencia de Lanczos. Considerando que la onda cuadrada es una derivada de la onda triangular, la Ec. 14.66 se sustituye por $h = 2$ con

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\frac{\operatorname{sen}\{[(2n-1)\pi]/2m\}}{[(2n-1)\pi]/2m}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)}. \tag{14.77}$$

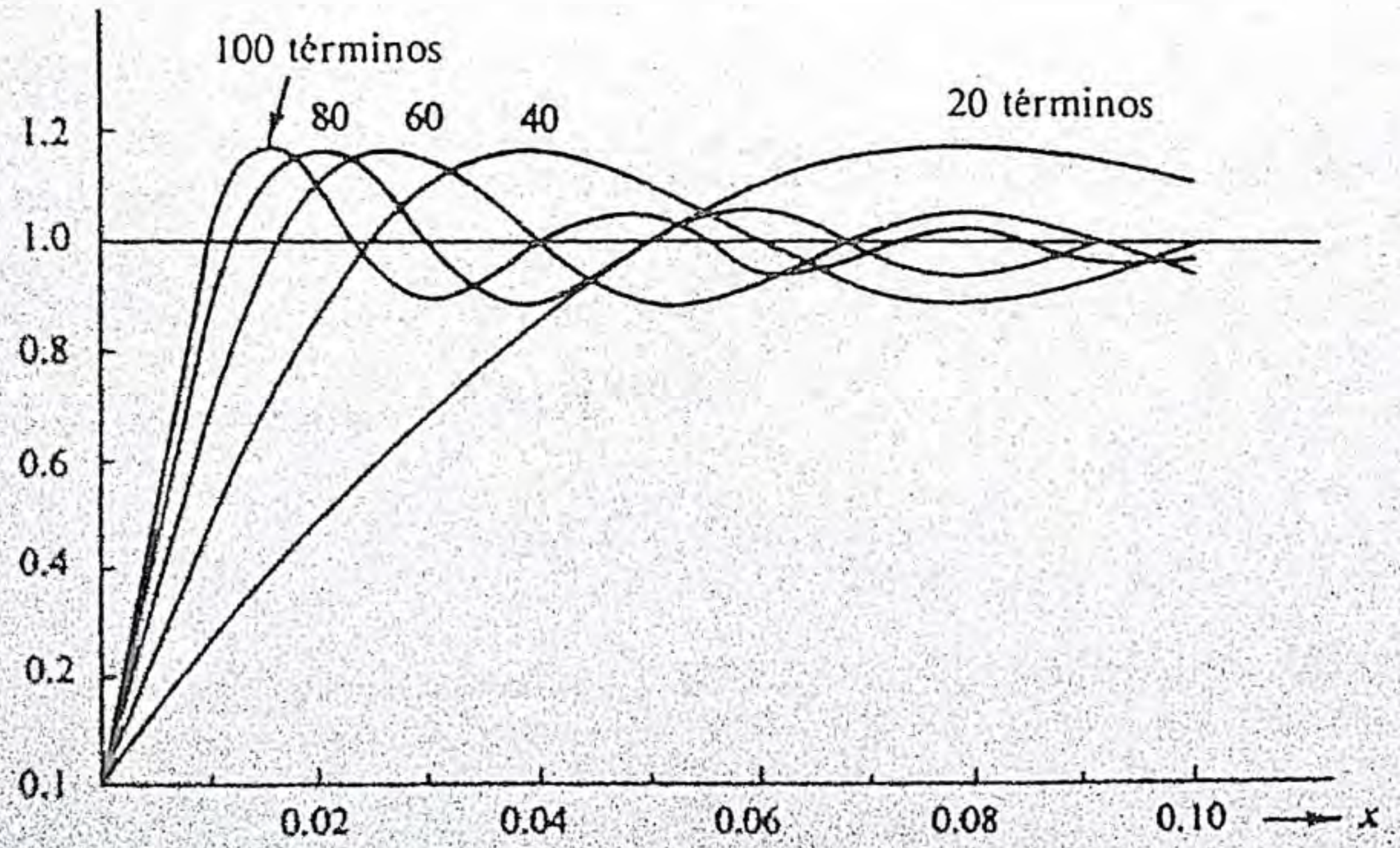


Fig. 14.9 Onda cuadrada. Fenómeno de Gibss.

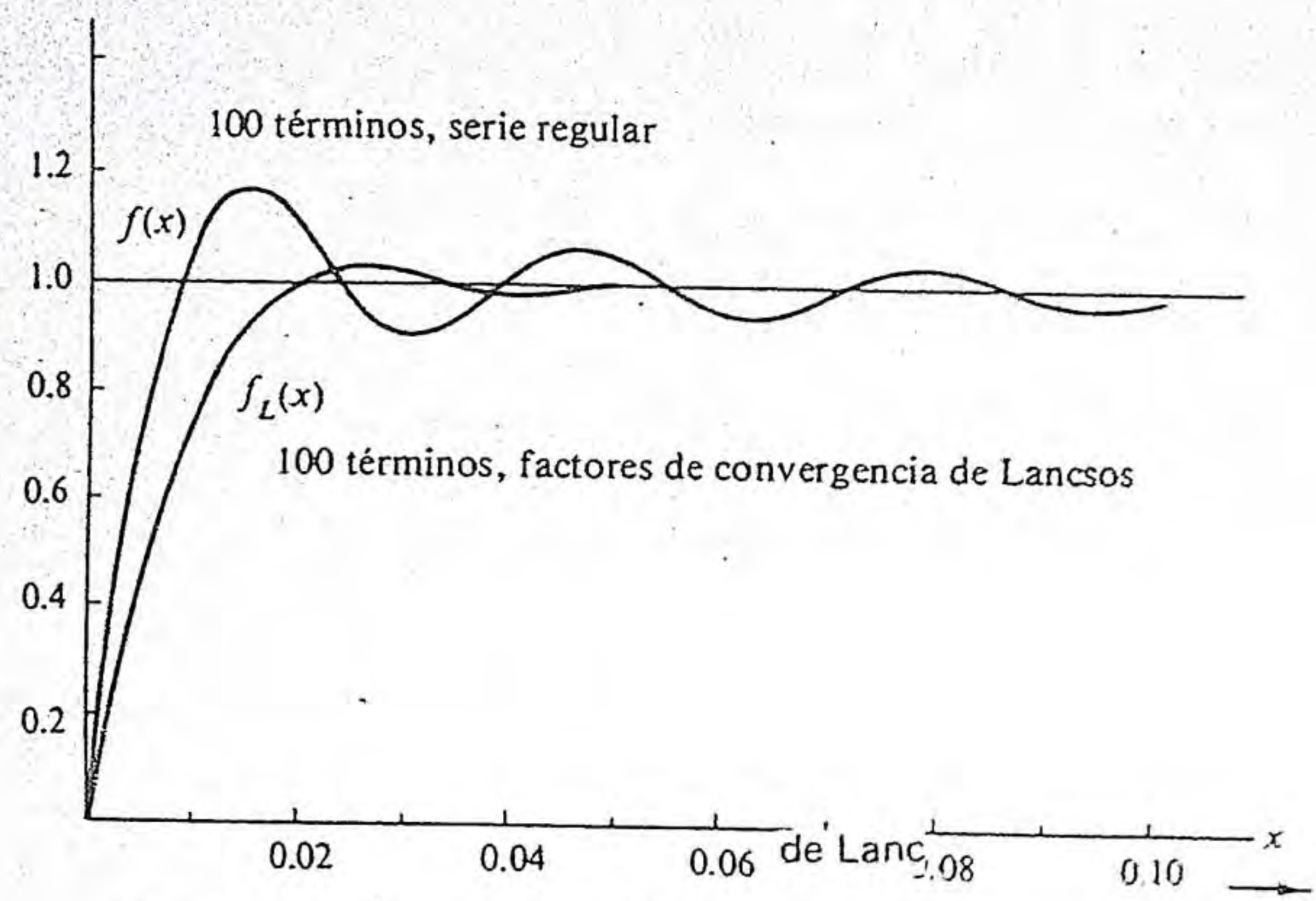


Fig. 14.10 Onda cuadrada. Efecto nivelador de los factores de convergencia de Lanczos

Estos resultados, con $m = 100$, se han incluido a modo de gráfica en la Fig. 14.10. El 18 por ciento de sobreimpulsos se ha reducido notablemente, aunque el lector habrá de notar que se ha pagado cierto precio por la uniformidad: la tasa de aumento se ha reducido aproximadamente a la mitad.

EJERCICIOS

14.5.1 Con las técnicas de sumado de sumas parciales de esta sección, demuestre que a una discontinuidad en $f(x)$, la serie de Fourier para $f(x)$ acepta la media aritmética de los límites derecho e izquierdo:

$$f(x_0) = \tfrac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)].$$

Al evaluar $\lim_{r\to\infty} s_r(x_0)$ pudiera ser conveniente identificar parte del *integrando* como una función delta de Dirac.

14.5.2 Determine la suma parcial, s_n, de la serie correspondiente a la Ec. 14.66 mediante el uso de

(a) $$\frac{\operatorname{sen} mx}{m} = \int_0^x \cos my\, dy$$

y

(b) $$\sum_{p=1}^{n} \cos(2p-1)y = \frac{\operatorname{sen} 2ny}{2 \operatorname{sen} y}.$$

¿Concuerda usted con el resultado proporcionado por la Ec. 14.73?

REFERENCIAS

CARSLAW, H. S., *Introduction to The Theory of Fourier's Series and Integrals*. 2a. ed., Londres: Macmillan (1921). Una obra detallada y clásica. Incluye una descripción amplia del fenómeno de Gibbs, en el Capítulo IX.

JEFFREYS, H. y B. S. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*. 3a. ed. Cambridge: Cambridge University Press (1966).

LANCZOS, C., *Applied Analysis*. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall (1956). Una presentación convenientemente escrita acerca de la técnica de convergencia de Lanczos para la serie de Fourier. Este y otros diversos temas se presentan desde el punto de vista del matemático que desea resultados numéricos de utilidad y no tan solo teoremas de existencia abstracta.

ZYGMUND, A., *Trigonometric Series*, Vols. I y II. Cambridge: Cambridge University Press (1959). Una exposición extremadamente completa, incluyendo los resultados relativamente recientes en el dominio de las matemáticas puras.

CAPITULO 15

TRANSFORMADAS INTEGRALES

15.1 Transformadas Integrales

Frecuentemente en la física matemática se encuentran pares de funciones relacionadas por una expresión de la siguiente forma:

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)\, K(\alpha, t)\, dt. \tag{15.1}$$

La función $g(\alpha)$ se denomina transformada (integral) de $f(t)$ por el núcleo $K(\alpha, t)$.

Transformada de Fourier. Una de las transformadas más útiles del número infinito de transformadas posibles es la transformada de Fourier definida por

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t}\, dt. \tag{15.2}$$

Dos modificaciones de esta forma, desarrolladas en la Sección 15.3, son las transformadas de seno y de coseno de Fourier

$$g_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t\, dt, \tag{15.3}$$

$$g_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t\, dt. \tag{15.4}$$

La transformada de Fourier está basada en el núcleo $e^{i\alpha t}$ y sus partes real e imaginaria consideradas aparte, cos αt y sen αt. Debido a que estos núcleos son las funciones utilizadas para describir las ondas, las transformadas de Fourier aparecen frecuentemente en los estudios de las ondas y en la extracción de información derivada de las ondas, particularmente cuando la información de fase queda involucrada. La salida de interferómetro estelar, por ejemplo, implica la transformada de Fourier de la brillantez a través de un disco estelar. La distribución electrónica en un átomo se puede obtener a partir de una transformada de Fourier de la amplitud de los Rayos X dispersados.

Transformadas de Laplace, Mellin y Hankel. Otros tres núcleos de utilidad son

$$e^{-\alpha t}, \qquad t\,J_n(\alpha t), \qquad t^{\alpha-1}.$$

Esto origina las siguientes transformadas

$$g(\alpha) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-\alpha t}\,dt, \qquad \text{Transformada de Laplace} \tag{15.5}$$

$$g(\alpha) = \int_0^\infty f(t)t\,J_n(\alpha t)\,dt, \qquad \begin{array}{l}\text{Tranformada de Hankel}\\ \text{(Fourier–Bessel)}\end{array} \tag{15.6}$$

$$g(\alpha) = \int_0^\infty f(t)t^{\alpha-1}\,dt, \qquad \text{Transformada de Mellin} \tag{15.7}$$

Evidentemente, los tipos posibles están limitados. Estas transformadas hasn sido de utilidad en el análisis matemático y en las aplicaciones a la física. De hecho hemos utilizado la transformada de Mellin sin llamarla por su nombre; es decir, que $g(\alpha) = (\alpha - 1)!$ es la transformada de Mellin de $f(t) = e^{-t}$. Por supuesto, también podríamos indicar que $g(\alpha) = n!/\alpha^{n+1}$ es la transformada de Laplace de $f(t) = t^n$. De las tres, la transformada de Laplace es la más utilizada. Se describe con amplitud en las Secciones 15.7-15.11. La transformada de Hankel, una transformada de Fourier para el desarrollo de la función de Bessel, representa un caso limitante de una serie de Fourier-Bessel. Se presenta en problemas potenciales en coordenadas cilíndricas.

Linearidad. Todas estas transformadas integrales son lineales; es decir

$$\int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\,K(\alpha, t)\,dt = \int_a^b c_1 f_1(t)\,K(\alpha, t)\,dt + \int_a^b c_2 f_2(t)\,K(\alpha, t)\,dt, \tag{15.8}$$

$$\int_a^b c\,f(t)\,K(\alpha, t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,K(\alpha, t)\,dt, \tag{15.9}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes y $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones para las cuales la operación de la transformada es definida.

Representando la transformada integral lineal por medio del operador $\mathscr{L}$, se obtiene

$$g(\alpha) = \mathscr{L}f(t). \tag{15.10}$$

Es de esperarse un operador inverso $\mathscr{L}^{-1}$ tal que[1]

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}g(\alpha). \tag{15.11}$$

Para las tres transformadas de Fourier, $\mathscr{L}^{-1}$ se ha definido en la Sección 15.3. En general, la determinación de la transformada inversa constituye el principal problema del uso de las transformadas generales. La transformada inversa de Laplace se describe en la Sección 15.11. Para mayores detalles acerca de la transformada inversa de Hankel o la transformada inversa de Mellin, el lector puede acudir a las referencias que se incluyen al final de este capítulo.

EJERCICIOS

15.1.1 Las transformadas de Fourier para una función de dos variables

$$F(u, v) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{i(ux+vy)}\,dx\,dy,$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v)e^{-i(ux+vy)}\,du\,dv.$$

Utilizando $f(x, y) = f([x^2 + y^2]^{1/2})$, demuestre que las transformadas de Hankel de orden *cero*

$$F(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\rho r)\,dr,$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} \rho\, F(\rho) J_0(\rho r)\,d\rho,$$

son un caso especial de las transformadas de Fourier.

Esta técnica se puede generalizar para derivar las transformadas de Hankel de orden enésimo (cf. Sneddon, *Fourier* Transforms, Capítulo 2). También es de hacerse notar que las transformadas de Hankel de orden no integral. $\nu = \pm\frac{1}{2}$ se reducen a las transformadas de Fourier de seno y coseno.

15.1.2 Suponiendo la validez del par de ecuaciones correspondientes a la transformada de Hankel-inversa de la transformada

[1] El hecho de esperar no constituye una demostración, y en este caso la demostración se complica debido a que en realidad nos encontramos en un espacio de Hilbert de dimensiones *infinitas*. Habremos de demostrar la existencia para los casos especiales de interés por medio de la verdadera construcción.

$$g(\alpha) = \int_0^\infty f(t)\, J_n(\alpha t)\, t\, dt$$

$$f(t) = \int_0^\infty g(\alpha)\, J_n(\alpha t)\, \alpha\, d\alpha,$$

demuestre que la función delta de Dirac tiene una representación de integral de Bessel

$$\delta(t - t') = t \int_0^\infty J_n(\alpha t)\, J_n(\alpha t')\, \alpha\, d\alpha.$$

Esta expresión es de utilidad en el desarrollo de las funciones de Green en coordenadas cilíndricas en que las funciones propias son funciones de Bessel.

15.1.3 A partir de las transformadas de Fourier, Ecs. 15.22 y 15.23 demuestre que la transformación

$$t \to \ln x$$

$$i\omega \to \alpha - \gamma$$

origina

$$G(\alpha) = \int_0^\infty F(x) x^{\alpha - 1}\, dx$$

y

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} G(\alpha) x^{-\alpha}\, d\alpha.$$

Estas son las transformadas de Mellin. En la Sección 15.11 se emplea un cambio similar de variables para derivar la transformada inversa de Laplace.

15.1.4 Verifique las siguientes transformadas de Mellin:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(kx)\, dx = k^{-\alpha}(\alpha - 1)! \operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{2}, \qquad -1 < \alpha < 1.$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} \cos(kx)\, dx = k^{-\alpha}(\alpha - 1)! \cos\frac{\pi\alpha}{2}, \qquad 0 < \alpha < 1.$

Sugerencia. Las integrales se pueden transformar en algo más manejable mediante la inserción del factor de convergencia e^{-bx} y posteriormente (después de la integración) permitiendo que $b \to 0$.

15.2 Desarrollo de la Integral de Fourier

En el Capítulo 14 se demostró que la serie de Fourier es de utilidad para representar ciertas funciones (a) dentro de un intervalo limitado $[0, 2\pi]$, $[-L, L]$, etc., o (b) para el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ *cuando la función es periódica.* Ahora habremos de dirigir nuestra atención al problema

de representar una función que no es periódica dentro del intervalo infinito. Físicamente, esto significa la resolución de un paquete de ondas en ondas senoidales.

Con anterioridad se ha visto (Sección 14.2) que para el intervalo $[-L, L]$ los coeficientes a_n y b_n se pueden indicar en la forma

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \tag{15.12}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt. \tag{15.13}$$

La serie de Fourier resultante es

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\,dt \end{aligned} \tag{15.14}$$

o

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}(t-x)\,dt. \tag{15.15}$$

Ahora se permite que el parámettro L se aproxime al infinito, transformando así el intervalo finito $[-L, L]$ en el intervalo o infinito $(-\infty, \infty)$. Se establece

$$\frac{n\pi}{L} = \omega, \qquad \frac{\pi}{L} = \Delta\omega, \qquad \text{con } L \to \infty.$$

Siendo así, se tiene

$$f(x) \to \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt \tag{15.16}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt, \tag{15.17}$$

sustituyendo la suma infinita por la integral sobre ω. El primer término (correspondiente a a_0) ha desaparecido, suponiendo que existe $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$.

Es de hacerse notar que este resultado (Ec. 15.17) es puramente formal. No se pretende que constituya una derivación rigurosa, pero se puede lograr que lo sea así (cf. I. N. Sneddon, *Fourier Transforms,* Sección 3.2). Sin embargo, para aquellos interesados en la integración de contorno, en la Sección 6.4 se proporciona una derivación completamente diferente con base en la fórmula de la integral de Cauchy. La Ec. 15.17 será considerada como la integral de Fourier. Está sometida a las restricciones de que $f(x)$ satisfaga las condiciones de Dirichlet (Capítulo 14) y que $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ sea convergente.

Integral de Fourier —Forma Exponencial. La integral de Fourier (Ec. 15.17) se puede establecer en forma exponencial al observar que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt, \tag{15.18}$$

mientras que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\,\omega(t-x)\,dt = 0; \tag{15.19}$$

cos $\omega(t-x)$ es una función par de ω y sen $\omega(t-x)$ es una función impar de ω. Sumando las Ecs. 15.18 y 15.19 (con el factor i). se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\,d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt. \tag{15.20}$$

La variable ω introducida aquí es una variable matemática arbitraria. Sin embargo, muchos problemas físicos corresponden a la frecuencia angular ω. Siendo así, la Ec. 15.18 o la Ec. 15.20 se pueden interpretar como una representación de $f(x)$ en términos de la distribución de trenes de onda senoidales infinitamente largos de frecuencia angular ω en que esta frecuencia es una variable *continua*.

Derivación de la Función Delta de Dirac. Si el orden de la integración de la Ec. 15.20 se puede invertir, esta última se puede volver a establecer en la forma

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)}\,d\omega\right\} dt. \tag{15.20a}$$

Aparentemente, la cantidad dentro del paréntesis curvado se comporta como una función delta: $\delta(t-x)$. La Ec. 15.20*a* se puede considerar como una representación de la función delta de Dirac. Alternativamente, se puede considerar como una guía para una nueva derivación del teorema de la integral de Fourier.

De acuerdo con la Ec. 8.85*a* (desplazamiento de la singularidad desde $t = 0$ hasta $t = x$).

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta_n(t-x)\,dt, \tag{15.21a}$$

en donde $\delta_n(t-x)$ es una secuencia que define la distribución $\delta(t-x)$. Observe que la Ec. 15.21*a* supone que $f(t)$ es continua en $t = x$.

Se considera que $\delta_n(t-x)$ es

$$\delta_n(t-x) = \frac{\mathrm{sen}\,n(t-x)}{\pi(t-x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{i\omega(t-x)}\,d\omega, \tag{15.21b}$$

 utilizando la Ec. 8.83*d*. Sustituyendo en la Ec. 15.21*a*, se tiene

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_{-n}^{n} e^{i\omega(t-x)}\, d\omega\, dt. \tag{15.21c}$$

Intercambiando el orden de integración y luego considerando el límite como $n \to \infty$, se tiene la Ec. 15.20, es decir el teorema de la integral de Fourier.

Con el concepto de que se encuentra bajo un signo de integral como en la Ec. 15.21*a*, la identificación

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)}\, d\omega, \tag{15.21d}$$

proporciona una representación bastante útil de la función delta. En las Secciones 15.5 y 15.6 se utiliza como grandes ventajas.

15.3 Transformadas de Fourier Teorema de la Inversión

Definamos $g(\omega)$, la transformada de Fourier de la función $f(t)$, por medio de

$$g(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\, dt. \tag{15.22}$$

Transformada Exponencial. Siendo así, de acuerdo con la Ec. 15.20 (o la Sección 6.4), se tiene la relación inversa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega x}\, d\omega. \tag{15.23}$$

Es de hacerse notar que las Ecs. 15.22 y 15.23 son casi pero no simétricas ya que difieren en el signo de i.

Transformada del Coseno. Si $f(x)$ es par o impar, estas transformadas se pueden expresar en una forma algo distinta. Considere, primeramente, $f(x) = f(-x)$, par. Estableciendo el exponencial de la Ec. 15.22 en la forma trigonométrica, se tiene

$$\begin{aligned} g_c(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t)\, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f_c(t)\cos\omega t\, dt, \end{aligned} \tag{15.24}$$

en que la dependencia de sen ωt desaparece en la integración sobre el intervalo simétrico $(-\infty, \infty)$. De forma similar, la Ec. 15.23 se transforma en

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} g_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega. \tag{15.25}$$

Las Ecs. 15.24 y 15.25 se conocen como transformadas de Fourier del coseno.

Transformada del Seno. El par correspondiente de transformadas de Fourier del seno se obtiene al suponer que $f(x) = -f(-x)$, impar, y aplicando los mismos argumentos de simetría. Las ecuaciones son

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_s(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt,^1 \tag{15.26}$$

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g_s(\omega) \operatorname{sen} \omega x \, d\omega. \tag{15.27}$$

De acuerdo con la última ecuación, se puede desarrollar la interpretación física de que $f(x)$ está definida por un continuo de ondas sinusoidales. La amplitud de sen ωx está definida por $\sqrt{2/\pi}\, g_s(\omega)$, en donde $g_s(\omega)$ es la transformada de Fourier del seno de $f_s(x)$. Como podrá observarse, la Ec. 15.27 es la integral análoga a la suma (Ec. 14.18). Para los casos del coseno y exponencial se pueden considerar interpretaciones similares.

Si se aceptan las Ec. 15.22, 15.24 y 15.26 como las transformadas integrales directas, descritas por $\mathscr{L}$ en la Ec. 15.10 (Sección 15.1) las transformadas inversas correspondientes, $\mathscr{L}^{-1}$ de la Ec. 15.11, están definidas por las Ecs. 15.23, 15.25 y 15.27.

EJEMPLO 15.3.1 TREN DE ONDAS FINITO

Una aplicación importante de la transformada de Fourier es la resolución de un pulso finito en ondas sinusoidales. Imaginemos que un tren de ondas infinito sen $\omega_0 t$ se corta por medio de los obturadores de celda de Kerr de modo que se tiene

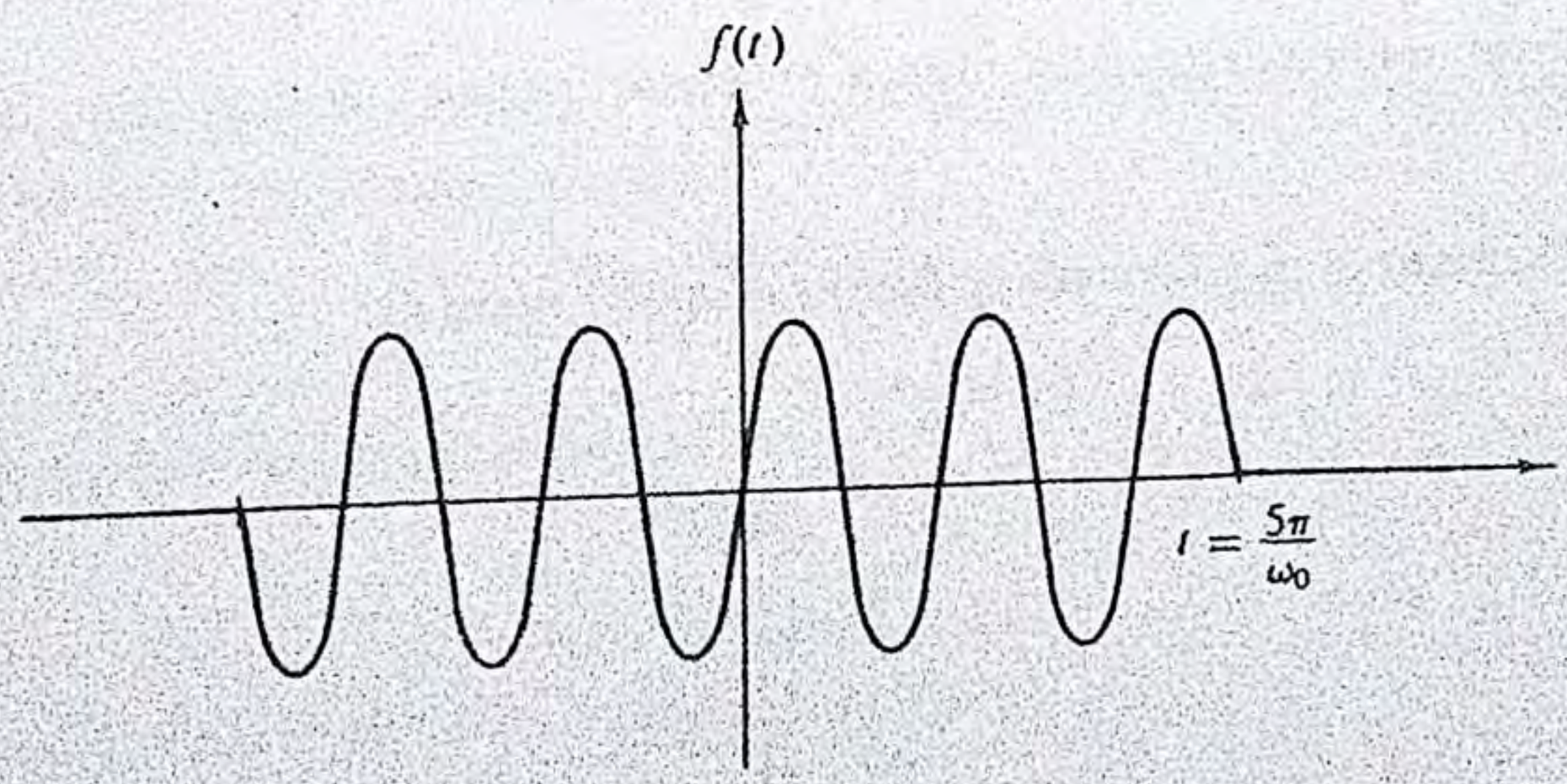


Fig. 15.1 Tren de ondas finito

[1] Observe que el factor $-i$ ha sido absorbido en esta $g(\omega)$.

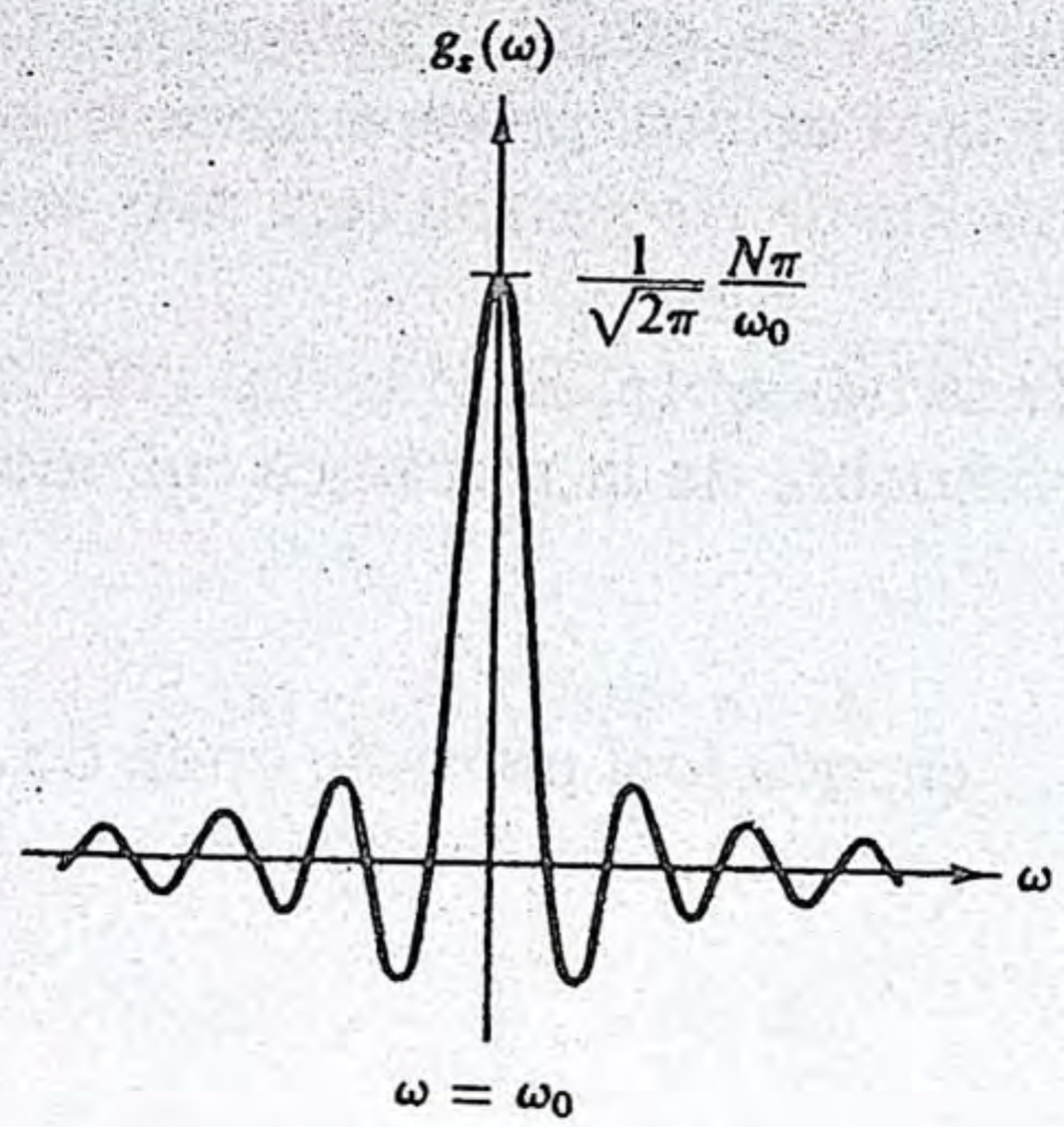


Fig. 15.2 Transformada de Fourier del tren de ondas finito

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}\omega_0 t, & |t| < \dfrac{N\pi}{\omega_0}, \\ 0, & |t| > \dfrac{N\pi}{\omega_0}. \end{cases} \tag{15.28}$$

Esto corresponde a N ciclos del tren de ondas original. Ya que $f(t)$ es impar, se puede utilizar la transformada de Fourier del seno (Ec. 15.26) para obtener

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{N\pi/\omega_0} \operatorname{sen}\omega_0 t \operatorname{sen}\omega t \, dt. \tag{15.29}$$

Integrando se encuentra la función de amplitud

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\operatorname{sen}[(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\operatorname{sen}[(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)} \right] \tag{15.30}$$

Es de cierto interés conocer la forma en que $g_s(\omega)$ depende de la frecuencia. Para ω_0 grande y $\omega \approx \omega_0$ solamente el primer término es de importancia. En la Fig. 15.2 se ha construido una gráfica del mismo. Esta es la curva de amplitud para el modelo de difracción de rendija simple. Se tienen ceros en

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm\frac{1}{N}, \qquad \pm\frac{2}{N}, \text{ etc.} \tag{15.31}$$

Ya que las contribuciones fuera del máximo central son pequeñas, se puede considerar

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{N} \tag{15.32}$$

como una medida adecuada de la dispersión de la frecuencia del pulso de onda. Evidentemente, si N es grande (pulso grande), la dispersión de la frecuencia será pequeña. Por otra parte, cuando el pulso cortado es corto, N pequeña, la distribución de frecuencia será más amplia.

Principio de la Incertidumbre. Este es un análogo clásico del famoso principio de la incertidumbre de la mecánica cuántica. Si se trata de ondas electromagnéticas,

$$\frac{h\omega}{2\pi} = E, \qquad \text{energía (del pulso de onda o fotón)}$$

$$\frac{h\,\Delta\omega}{2\pi} = \Delta E, \tag{15.33}$$

en donde h es la constante de Planck, la cual representa la incertidumbre en la energía del pulso. También existe cierta incertidumbre en cuanto al tiempo, ya que la onda de N ciclos requiere de $2N\pi/\omega_0$ segundos para su paso. Considerando

$$\Delta t = \frac{2N\pi}{\omega_0}, \tag{15.34}$$

se tiene el producto de estas dos incertidumbres:

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{h\,\Delta\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi N}{\omega_0}$$

$$= h\,\frac{\omega_0}{2\pi N} \cdot \frac{2\pi N}{\omega_0} = h. \tag{15.35}$$

El principio de incertidumbre de Heisenberg establece de hecho

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \frac{h}{4\pi} \tag{15.36}$$

y esto queda evidentemente satisfecho en el ejemplo.

EJERCICIOS

15.3.1 (a) Demuestre que $g(-\omega) = g^*(\omega)$ es la condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea real.

(b) Demuestre que $g(-\omega) = -g^*(\omega)$ es la condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea imaginariamente pura.

15.3.2 La función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

es una función de etapa finita simétrica.

(a) Determine $g_c(\omega)$, la transformada de Fourier del coseno de $f(x)$.

(b) Considerando la transformada inversa del coseno, demuestre que

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \omega \cos \omega x}{\omega} \, d\omega.$$

(c) De acuerdo con la parte (b), demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \omega \cos \omega x}{\omega} \, d\omega = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ \dfrac{\pi}{4}, & |x| = 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & |x| < 1. \end{cases}$$

Respuesta. (a) $g_c(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\operatorname{sen} \omega}{\omega}$.

15.3.3 (a) Demuestre que las transformadas de Fourier del seno y el coseno de e^{-ax} son

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}.$$

Sugerencia. Cada una de las transformadas puede relacionarse con la otra mediante la integración por partes.

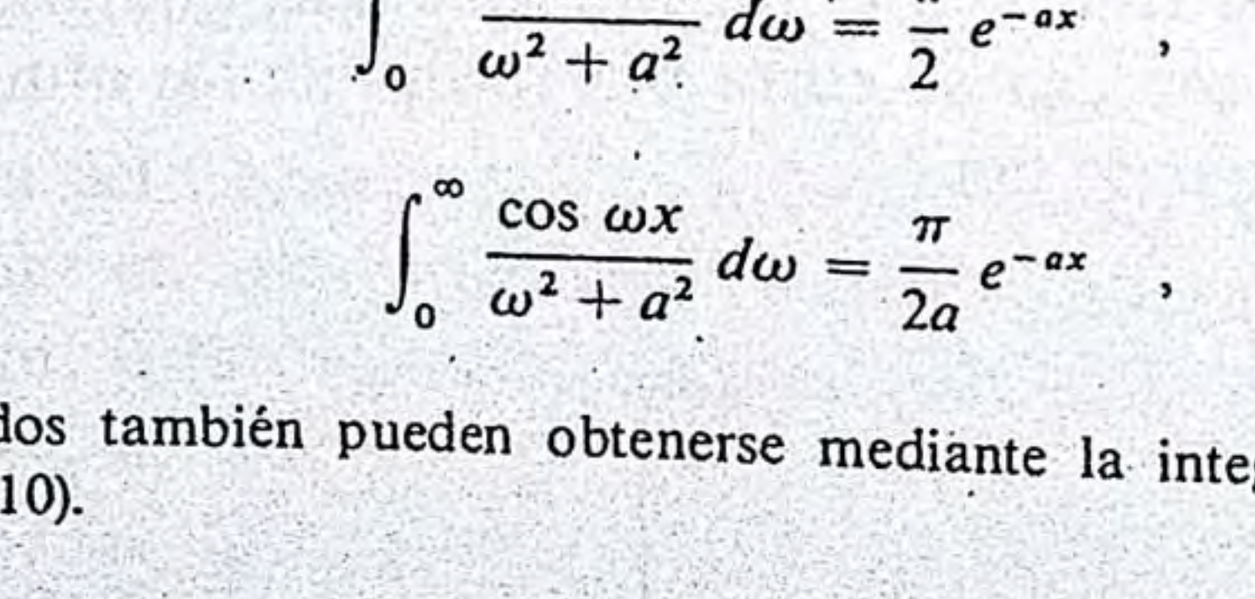
(a) Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\omega \operatorname{sen} \omega x}{\omega^2 + a^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \qquad x > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + a^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \qquad x \geq 0.$$

Estos resultados también pueden obtenerse mediante la integración de contorno (Ejercicio 7.2.10).

15.3.4 Encuentre la transformada de Fourier del pulso triangular



$$f(x) = \begin{cases} h(1 - a|x|) & |x| < 1/a, \\ 0, & |x| > 1/a. \end{cases}$$

Nota. Esta función proporciona otra secuencia delta con $h = a$ y $a \to \infty$.

15.3.5 En una cavidad resonante una oscilación electromagnética de frecuencia ω_0 se desvanece en la forma

$$A(t) = A_0 e^{-\omega_0 t/2Q} e^{-i\omega_0 t}, \qquad t > 0.$$

(Considere $A(t) = 0$ para $t < 0$.)

El parámetro Q es una medida de la relación de energía almacenada a la energía perdida por ciclo. Calcule la distribución de frecuencia de la oscilación, $a^*(\omega)a(\omega)$, en donde $a(\omega)$ es la transformada de Fourier de $A(t)$.
Nota. Cuanto mayor es Q, más aguda será la línea de resonancia.

$$\textit{Respuesta.} \quad a^*(\omega)a(\omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0/2Q)^2}.$$

15.3.6 Verifique que las siguientes son transformadas integrales de Fourier entre sí:

(a) $\left.\begin{matrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{matrix}\right\}$ y $J_0(ay)$,

(b) $\left.\begin{matrix} 0, & |x| < a \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}, & |x| > a \end{matrix}\right\}$ y $N_0(a|y|)$,

(c) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ y $K_0(a|y|)$.

(d) ¿Puede usted dar alguna sugerencia del porqué $I_0(ay)$ no se ha incluido en esta lista?
Sugerencia. J_0, N_0 y K_0 pueden transformarse con bastante facilidad mediante el uso de la representación exponencial, invirtiendo el orden de integración y haciendo uso de la representación exponencial de la función delta de Dirac (Sección 15.2). Estos casos pueden tratarse igualmente que las transformadas de Fourier del coseno.

15.3.7 El cálculo del campo magnético de un circuito de corriente circular en coordenadas cilíndricas circulares origina la integral

$$\int_0^\infty \cos kz \, k \, K_1(ka) \, dk.$$

Demuestre que esta integral es igual a

$$\frac{\pi a}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Sugerencia. Trate de diferenciar el Ejercicio 15.3.6 (c).

15.3.8 Pudiera requerirse definir la secuencia

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & |x| < 1/2n. \\ 0 & |x| > 1/2n. \end{cases}$$

(Esto es la Ec. 8.83a.) Exprese $\delta_n(x)$ como una integral de Fourier (a través del teorema de la integral de Fourier, transformada inversa, etc.) Finalmente, demuestre que se puede indicar

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\,dk.$$

15.3.9 Utilizando la secuencia

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2x^2),$$

demuestre que

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\,dk.$$

Nota. Recuerde que $\delta(x)$ se define en términos de su comportamiento como parte de un *integrando*, Sección 8.6, especialmente las Ecs. 8.85*a* y 8.85*b*.

15.3.10 La integral de Fourier, Ec. 15.18, se ha dejado sin significado para $f(t) = \cos \alpha t$. Demuestre que la integral de Fourier se puede extender para abarcar $f(t) = \cos \alpha t$ mediante el uso de la función delta de Dirac.

15.3.11 Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} ka\, J_0(k\rho)\,dk = \begin{cases} (a^2-\rho^2)^{-1/2}, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

Aquí, a y ρ son positivas. La ecuación se deriva de la determinación de la distribución de carga en un disco conductor aislado de radio a. Cf. Ejercicios 2.11.2 y 11.1.28.

15.4 Transformada de Fourier de las Derivadas

Utilizando la forma exponencial, la transformada de Fourier de $f(x)$ es

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx \tag{15.37}$$

y para $df(x)/dx$

$$g_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx}\, e^{i\omega x}\,dx. \tag{15.38}$$

Integrando la Ec. 15.38 por partes, se obtiene

$$g_1(\omega) = \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx. \tag{15.39}$$

Si $f(x)$ desaparece a medida que $x \to \pm\infty$, se obtiene

$$g_1(\omega) = -i\omega\, g(\omega); \tag{15.40}$$

es decir, la transformada de la derivada es $(-i\omega)$ veces la transformada de la función original. Esto puede generalizarse sin dificultades a la enésima derivada para proporcionar

$$g_n(\omega) = (-i\omega)^n\, g(\omega), \tag{15.41}$$

consideramos que todas las partes integradas desaparezcan a medida que $x \to \pm\infty$.

EJEMPLO 15.4.1 ECUACION DE ONDA

Esta técnica se puede utilizar con ventaja en la manipulación de las ecuaciones diferenciales parciales. Para ilustrar la técnica podemos derivar una expresión ya conocida de la física elemental. Una cuerda infinitamente larga vibra libremente. La amplitud y de las vibraciones (pequeñas) satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{15.42}$$

Se supondrá que

$$y = f(x) \tag{15.43}$$

a $t = 0$.

Aplicando la transformada de Fourier, lo cual significa multiplicar por $e^{i\alpha x}$ e integrar sobre x, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{i\alpha x}\, dx = \frac{1}{v^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} e^{i\alpha x}\, dx \tag{15.44}$$

o

$$(-i\alpha)^2\, Y(\alpha, t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Y(\alpha, t)}{\partial t^2}. \tag{15.45}$$

En este caso hemos utilizado

$$Y(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{i\alpha x} dx \tag{15.46}$$

y la Ec. 15.41 para la segunda derivada. Observe que la parte integrada de la Ec. 15.39 desaparece. La onda aún no se ha salido hasta ∞. Ya que no aparecen derivadas con respecto a α, la Ec. 15.45 es de hecho una ecuación diferencial ordinaria, en realidad la ecuación del oscilador lineal. Esta transformación, desde una ecuación diferencial parcial a una ordinaria, es un logro significativo. Se resuelve la Ec. 15.45 sometida a las condiciones iniciales adecuadas. En $t = 0$ y aplicando la Ec. 15.43, la Ec. 15.46 se reduce a

$$Y(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x}\, dx$$
$$= F(\alpha). \tag{15.47}$$

La solución general de la Ec. 15.45 en la forma exponencial es

$$Y(\alpha, t) = F(\alpha) e^{\pm i v \alpha t}. \tag{15.48}$$

Utilizando la fórmula de inversión (Ec. 15.23) se tiene

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha, t) e^{-i\alpha x}\, d\alpha \tag{15.49}$$

y, mediante la Ec. 15.48,

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha(x \mp vt)}\, d\alpha. \tag{15.50}$$

Ya que $f(x)$ es la transformada inversa de Fourier de $F(\alpha)$,

$$y(x, t) = f(x \mp vt), \tag{15.51}$$

correspondiente a las ondas que avanzan en las direcciones $+x$ y $-x$ respectivamente.

Las combinaciones lineales de onda particulares están definidas por la condición limitante de la Ec. 15.43 y algunas otras condiciones limitantes tales como la restricción en $\partial y/\partial t$.

EJERCICIOS

15.4.1 La ecuación de envejecimiento de Fermi unidimensional para la difusión de neutrones que se termalizan en cierto medio (tal como el grafito) es

$$\frac{\partial^2 q(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial q(x, \tau)}{\partial \tau}.$$

Aquí, q es el número de neutrones que se "termalizan", decayendo abajo de cierta energía por segundo por volumen unitario. El envejecimiento de Fermi, τ, es una medida de la pérdida de energía.

Si $q(x, 0) = S\,\delta(x)$, correspondiente a la fuente planar de neutrones en $x = 0$, emitiendo S neutrones por unidad de área por segundo, derive la solución

$$q = S \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}}$$

Sugerencia. Sustituya $q(x, \tau)$ con

$$p(k,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} q(x,\tau)e^{ikx}\,dx.$$

Esto es análogo a la difusión de calor en un medio infinito.

15.4.2 La Ec. 15.41 proporciona

$$g_2(\omega)=-\omega^2 g(\omega)$$

para la transformada de Fourier de la segunda derivada de $f(x)$. La condición $f(x) \to 0$ para $x \to \pm\infty$ se puede mitigar ligeramente. Encuentre la condición menos restrictiva de la ecuación anterior para $g_2(\omega)$ que sea consistente.

Respuesta. $\left[\dfrac{df(x)}{dx}-i\omega f(x)\right]e^{i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0.$

15.5 Teorema de la Convolución

Se consideran dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ con las transformadas de Fourier $F(t)$ y $G(t)$, respectivamente. Se define la operación

$$f*g\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)\,dy \tag{15.52}$$

como la convolución de 2 funciones f y g dentro del intervalo $(-\infty,\infty)$. Dicho en otras palabras, algunas veces se denomina a esto *Faltung* utilizando el nombre alemán como sustituto de "pliegue".[1] Ahora se transforma la integral en la Ec. 15.52 mediante la introducción de las transformadas de Fourier.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)\,dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-it(x-y)}dt\,dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-itx}dt\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ity}\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,G(t)e^{-itx}\,dt,\end{aligned} \tag{15.53}$$

intercambiando el orden de integración y transformando $g(y)$. Este resultado puede interpretarse como sigue: la transformada inversa de Fourier

[1] Para $f(y)=e^{-y}$, $f(y)$ y $f(x-y)$ se muestran en forma de gráfica en la Fig. 15.3. Evidentemente, $f(y)$ y $f(x-y)$ son imágenes de espejo entre sí con relación a la línea vertical $y=x/2$, es decir, $f(x-y)$ se puede generar al "plegar" sobre $f(y)$ en la línea $y=x/2$.

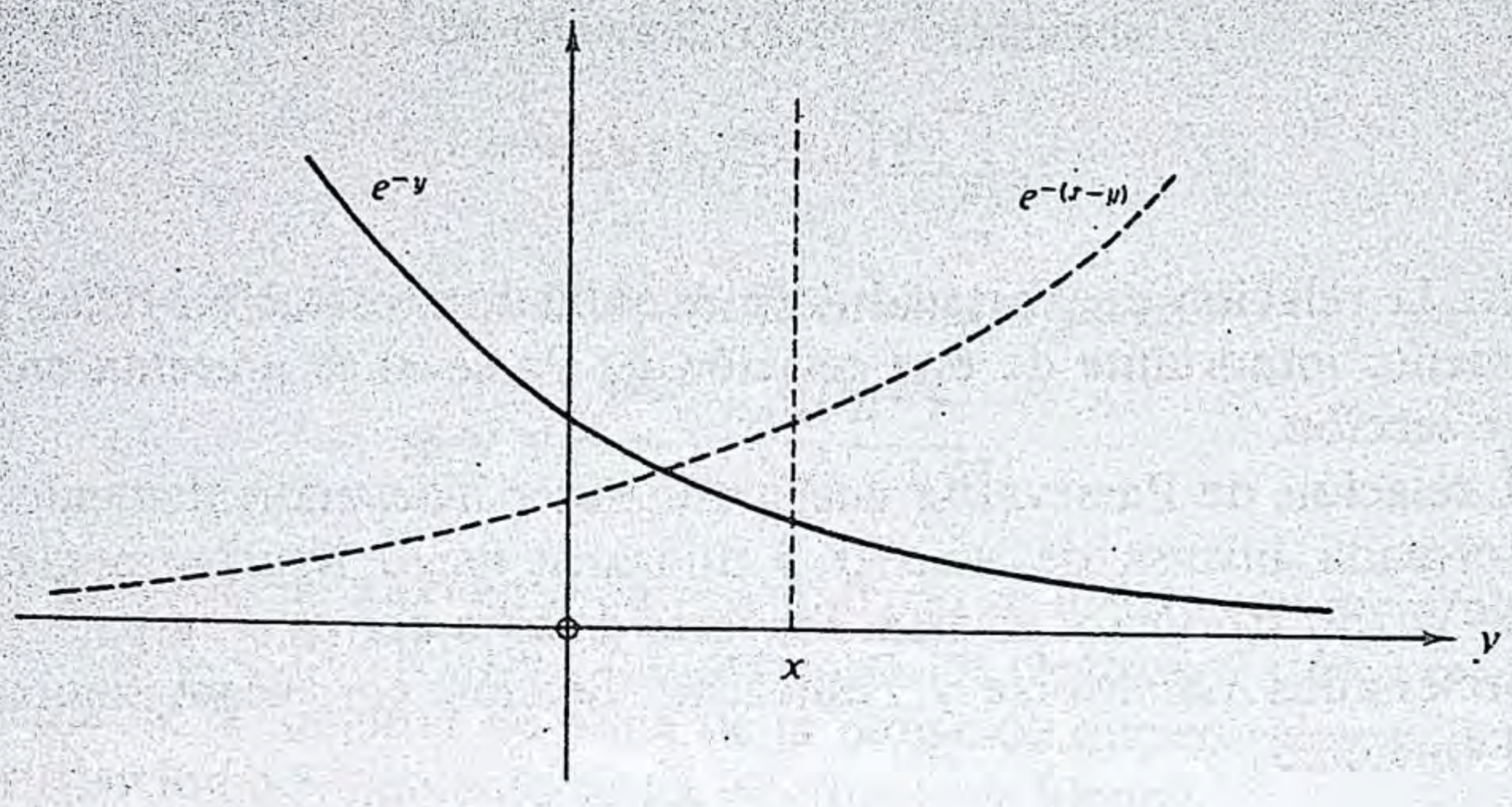


Fig. 15.3

de un *producto* de transformadas de Fourier es la convolución de las funciones originales, $f * g$.

Para el caso especial $x = 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, G(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)\, g(y)\, dy. \tag{15.54}$$

Relación de Parseval. Resultados análogos a las Ecs. 15.53 y 15.54 se pueden obtener para transformadas de Fourier del seno y coseno (Ejercicios 15.5.1, 2). La Ec. 15.54 y las convoluciones correspondientes del seno y coseno frecuentemente se denominan "relaciones de Parseval" por analogía con el teorema de Parseval para la serie de Fourier (Capítulo 14, Ejercicio 14.4.2).

La realción de Parseval[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G^*(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt, \tag{15.55}$$

se puede derivar de un modo bastante apropiado utilizando la representación de la función delta de Dirac, Ec. 15.21*d*. Se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x)\, e^{ixt}\, dx\, dt, \tag{15.56}$$

con atención a la conjugación compleja en la transformada $G^*(x)$ a $g^*(t)$. Integrando sobre t primeramente, y utilizando la Ec. 15.21*d*,

[1] Observe que todos los argumentos son positivos en contraste con la Ec. 15.54.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x)\, \delta(x-\omega)\, dx\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G^*(\omega)\, d\omega, \tag{15.57}$$

es decir la relación de Parseval deseada. Una interpretación física extremadamente importante de esta relación de Parseval se presenta en la siguiente sección.

La relación de Parseval se puede establecer independientemente de la transformada inversa de Fourier y utilizarse luego rigurosamente para derivar la transformada inversa. Mayores detalles acerca de esto han sido proporcionados por Morse y Feshbach,[1] Sección 4.8 (véase también el Ejercicio 15.5.3).

EJERCICIOS

15.5.1 Establezca la ecuación de convolución correspondiente a la Ec. 15.53 para

(a) las transformadas de Fourier del seno

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f(x-y)\, dy = -\int_{0}^{\infty} F_s(s)\, G_s(s) \cos sx\, ds,$$

en donde f y g son funciones impares.

(b) las transformadas de Fourier del coseno

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f(x-y)\, dy = \int_{0}^{\infty} F_c(s)\, G_c(s) \cos sx\, ds,$$

en donde f y g son funciones pares.

15.5.2 Demuestre que para las transformadas de Fourier del seno y el coseno la relación de Parseval tiene la forma

$$\int_{0}^{\infty} F(t)\, G(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} f(y)\, g(y)\, dy.$$

15.5.3 A partir de la relación de Parseval (Ec. 15.54), sea $g(y) = 1$, $0 \leqslant y \leqslant \alpha$ y cero en toda otra parte. A partir de esto derive la transformada inversa de Fourier (Ec. 15.23). *Sugerencia.* Diferencie con respecto a α.

[1] MORSE, P. M. y H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics.* Nueva York: McGraw-Hill (1953).

15.6 Representación del Momento

En la dinámica avanzada y la mecánica cuántica, el momento lineal y la posición espacial se presentan sobre un mismo fundamento. En esta sección habremos de comenzar con la distribución espacial usual y habremos de derivar la distribución de momento correspondiente. Para el caso unidimensional, la función de onda $\psi(x)$, una solución de la ecuación de onda de Schrödinger, tiene las siguientes propiedades:

1. $\psi^*(x)\,\psi(x)\,dx$ es la probabilidad de encontrar la partícula cuántica entre x y $x + dx$ y

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\,\psi(x)\,dx = 1, \tag{15.58}$$

correspondiente a una *partícula* (a lo largo del eje x).

Asimismo, se tiene

3. $$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x\,\psi(x)\,dx \tag{15.59}$$

para la posición *promedio* de la partícula a lo largo del eje x. Esto se denomina frecuentemente valor esperado.

Se requiere de una función $g(p)$ que proporcione la misma información acerca del momento.

1. $g^*(p)\,g(p)\,dp$ es la probabilidad de que la partícula cuántica tenga un momento entre p y $p + dp$.

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(p)\,g(p)\,dp = 1. \tag{15.60}$$

3. $$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(p) p\,g(p) dp \tag{15.61}$$

Tal como se muestra más adelante, tal función está definida por la transformada de Fourier de la función espacial $\psi(x)$. Específicamente[1]

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar}\,dx \tag{15.62}$$

$$g^*(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) e^{ipx/\hbar}\,dx. \tag{15.63}$$

[1] La $\hbar$ puede evitarse al usar el número de onda k, $p = k\hbar$ (y $\mathbf{p} = \mathbf{k}\hbar$), de modo que

$$\varphi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \psi(x)\,e^{-ikx}\,dx.$$

Un ejemplo de esta notación aparece en la Sección 16.1.

Para verificar esto, comprobemos las propiedades 2 y 3.

La propiedad 2, es decir la normalización, se satisface automáticamente como una relación de Parseval, Ec. 15.55. Si la función espacial $\psi(x)$ se normaliza a la unidad, la función de momento $g(p)$ también.

Para comprobar la propiedad 3, se debe demostrar que

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(p) p\, g(p)\, dp = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x)\, dx, \tag{15.64}$$

en donde $(\hbar/i)(d/dx)$ es el operador de momento en la representación espacial. Se sustituyen las funciones de momento y la primera integral se transforma en

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iiint_{-\infty}^{\infty} p e^{-ip(x-x')/\hbar}\, \psi^*(x')\, \psi(x)\, dp\, dx'\, dx. \tag{15.65}$$

Ahora

$$p e^{-ip(x-x')/\hbar} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{\hbar}{i} e^{-ip(x-x')/\hbar} \right]. \tag{15.66}$$

Sustituyendo en la Ec. 15.65 e integrando por partes, conservando constantes a x' y p, se obtiene

$$\langle p \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x-x')/\hbar}\, dp \right] \cdot \psi^*(x') \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x)\, dx'\, dx. \tag{15.67}$$

En este caso se supone que $\psi(x)$ desaparece a medida que $x \to \pm\infty$, eliminando así la parte integrada. Utilizando nuevamente la función delta de Dirac, Ec. 15.21*c*, la Ec. 15.67 se reduce a la Ec. 15.64 para verificar la representación del momento. El lector habrá de notar que técnicamente se ha empleado la transformada inversa de Fourier en la Ec. 15.62. Esto ha sido escogido deliberadamente para lograr el signo adecuado en la Ec. 15.67.

EJEMPLO 15.6.1 ATOMO DE HIDROGENO

El estado básico del átomo de hidrógeno se puede describir por medio de la función de onda e

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{\pi a_0^3} \right)^{1/2} e^{-r/a_0}, \tag{15.68}$$

siendo a_0 el radio de Bohr, $\hbar^2/me^2$. Ahora se tiene una función de onda tridimensional. La transformada correspondiente a la Ec. 15.62 es

$$g(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}\, d^3r. \tag{15.69}$$

Sustituyendo la Ec. 15.68 en la Ec. 15.69 y utilizando

$$\int e^{-ar+i\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\, d^3r = \frac{8\pi a}{(a^2+b^2)^2}, \tag{15.70}$$

se obtiene la función de onda de momento hidrogénica

$$g(\mathbf{p}) = \frac{2^{3/2}}{\pi}\frac{a_0^{3/2}\hbar^{5/2}}{(a_0^2p^2+\hbar^2)^2}. \tag{15.71}$$

Tales funciones de momento han encontrado su utilidad en los problemas tales como la dispersión de Compton para los electrones atómicos, la distribución de la longitud de onda de la radiación dispersa dependiendo de la distribución del momento de los electrones de blanco.

La relación entre la representación espacial ordinaria y la representación del momento se puede hacer más evidente al considerar las relaciones de conmutación básicas de la mecánica cuántica. Se puede pasar de una hamiltoniana clásica a una ecuación de onda de Schrödinger al requerir que el momento p y la posición x no *conmuten*. En lugar de esto, se requiere que

$$[p, x] \equiv (px - xp) = -i\hbar. \tag{15.72}$$

Para el caso multidimensional, la Ec. 15.72 se sustituye por

$$[p_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}. \tag{15.73}$$

La representación (espacial) de Schrödinger se obtiene al utilizar

$$\begin{aligned} x_j &\to x_j, \\ p_i &\to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{x}$$

sustituyendo el momento por la derivada espacial parcial. El lector podrá determinar fácilmente que

$$[p, x]\psi(x) = -i\hbar\,\psi(x). \tag{15.74}$$

Sin embargo, la Ec. 15.72 puede ser satisfecha igualmente por el uso de

$$\begin{aligned} x_j &\to i\hbar\frac{\partial}{\partial p_j}, \\ p_i &\to p_i. \end{aligned} \tag{p}$$

Esta es la representación del momento. Siendo así,

$$[p, x]\, g(p) = -i\hbar\, g(p). \tag{15.75}$$

En consecuencia, la presentación (x) no es única; (p) es una posible alternativa.

En general, la representación de Schrödinger (x) que origina la ecuación de onda de Schrödinger es más conveniente debido a que la ener-

gía potencial V generalmente se define como una función de la posición $V(x, y, z)$. La representación de momento (p) normalmente da lugar a una ecuación integral (cf. Capítulo 16 para las desventajas y ventajas de las ecuaciones integrales). A modo de excepción, considere el oscilador armónico.

EJEMPLO 15.6.2 OSCILADOR ARMONICO

La hamiltoniana clásica (energía cinética + energía potencial = energía total) es

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E. \tag{15.76}$$

En la representación de Schrödinger, se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\,\psi(x) = E\,\psi(x). \tag{15.77}$$

Para la energía total E igual $\sqrt{(k/m)}\hbar/2$ se tiene una solución

$$\psi(x) = e^{-(\sqrt{mk}/2\hbar)x^2}. \tag{15.78}$$

La representación de momento origina

$$\frac{p^2}{2m}g(p) - \frac{\hbar^2 k}{2}\frac{d^2 g(p)}{dp^2} = E\,g(p). \tag{15.79}$$

Nuevamente para

$$E = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\hbar}{2} \tag{15.80}$$

la ecuación de onda de momento (15.79) queda satisfecha por

$$g(p) = e^{-p^2/(2\hbar\sqrt{mk})}. \tag{15.81}$$

Cualquiera de las representaciones, espacial o de momento (y un número infinito de otras posibilidades), se puede utilizar, dependiendo esto de cuál sea la más conveniente para el problema particular que se considere.

La demostración de que $g(p)$ es la función de onda del momento correspondiente a la Ec. 15.78, es decir que corresponde a la transformada inversa de Fourier de la Ec. 15.78, se deja para el Ejercicio 15.6.3.

EJERCICIOS

15.6.1 La función $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ describe una onda planar de momento $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ normalizada a la densidad unitaria. (Se supone la dependencia del tiempo para $e^{-i\omega t}$.) Demuestre que estas funciones de onda planares satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})^* e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}\, dx\, dy\, dz = (2\pi)^3\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

15.6.2 Una onda planar infinita en la mecánica cuántica se puede representar por medio de la función

$$\psi(x) = e^{ip'x/\hbar}.$$

Encuentre la función de distribución de momento correspondiente. Observe que tiene un infinito y que $\psi(x)$ no se ha normalizado.

15.6.3 Un oscilador cuántico lineal en su estado básico tiene la función de onda

$$\psi(x) = a^{-1/2}\pi^{-1/4}e^{-x^2/2a^2}.$$

Demuestre que la función de momento correspondiente es

$$g(p) = a^{1/2}\pi^{-1/4}\hbar^{-1/2}e^{-a^2p^2/2\hbar^2}.$$

15.6.4 Una partícula libre en la mecánica cuántica se describe por medio de la onda planar

$$\psi_k(x, t) = e^{i[kx - (\hbar k^2/2m)t]}.$$

Combinando las ondas de momento adyacente con un factor ponderador de amplitud $\varphi(k)$ se forma un paquete de onda

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{i[kx - (\hbar k^2/2m)t]}\, dk.$$

(a) Resuelva para $\varphi(k)$ considerando que

$$\Psi(x, 0) = e^{-x^2/2a^2}.$$

(b) Utilizando el valor conocido de $\varphi(k)$ integre para lograr la forma explícita de $\Psi(x, t)$. Observe que este paquete de onda se difunde con el tiempo

Respuesta. $$\Psi(x, t) = \frac{e^{-\{x^2/2[(a^2 + (i\hbar/m)t]\}}}{[1 + (i\hbar t/ma^2)]^{1/2}}.$$

15.6.5 El deuterón, Ejemplo 9.1.2, se puede describir razonablemente con una función de onda de Hulthen

$$\psi(\mathbf{r}) = A[e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}]/r$$

en donde A, α, y β son constantes. Ecuentre $g(\mathbf{p})$ es decir la función de momento correspondiente.

Nota. La transformada de Fourier puede volver a establecerse como transformadas de Fourier del seno y coseno o como una transformada de Laplace, Sección 15.7.

15.6.6 El factor de forma nuclear $F(k)$ y la distribución de carga $\rho(r)$ son transformadas de Fourier tridimensionales entre sí:

$$F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \rho(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r.$$

Si el factor de forma medido es

$$F(k) = (2\pi)^{-3/2}\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)^{-1},$$

encuentre la distribución de carga correspondiente.

Respuesta. $\rho(r) = \dfrac{a^2}{4\pi}\dfrac{e^{-ar}}{r}$.

15.7 Transformadas de Laplace Elementales

Definición. La transformada de Laplace $f(s)$ o $\mathscr{L}$ de una función $F(t)$ se define por medio de[1]

$$f(s) = \mathscr{L}\{F(t)\} = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st} F(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt. \tag{15.82}$$

Tal vez sean convenientes algunos comentarios acerca de la existencia de la integral. La integral infinita de $F(t)$,

$$\int_0^\infty F(t)\, dt,$$

no necesariamente debe existir. Por ejemplo, $F(t)$ pudiera ser divergente exponencialmente para t grande. Sin embargo, si se tiene alguna *constante* s_0 tal que

$$|e^{-s_0 t} F(t)| \leqslant M, \tag{15.83}$$

una constante positiva para t lo suficientemente grande, t, $t > t_0$, la transformada de Laplace (Ec. 15.82), existirá para $s > s_0$; se dice que $F(t)$ es de orden exponencial. A modo de contraejemplo, $F(t) = e^{t^2}$ no satisface la condición definida por la Ec. 15.83 y *no* es de orden exponencial. $\mathscr{L}\{e^{t^2}\}$ *no existe.*

[1] Esto se denomina ocasionalmente transformada de Laplace unilateral; la integral desde $-\infty$ hasta $+\infty$ se denomina transformada de Laplace bilateral. Algunos autores introducen un factor adicional de s. Esta s adicional aparentemente tiene poca ventaja y continuamente interfiere (cf. Jeffreys y Jeffreys, Sección 14.13 para comentarios adicionales). Generalmente se considera que s es real y positiva. Existe la posibilidad de tener s compleja considerando que $\mathscr{R}(s) > 0$.

La transformada de Laplace también puede fallar en cuanto a su existencia debido a una singularidad suficientemente intensa en la función $F(t)$ a medida que $t \to 0$; es decir

$$\int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt$$

diverge en el origen para $n \leqslant -1$. La transformada de Laplace $\mathscr{L}\{t^n\}$ no existe para $n \leqslant -1$.

Siendo así, para dos funciones $F(t)$ y $G(t)$, para las cuales existen las integrales

$$\mathscr{L}\{a\,F(t) + b\,G(t)\} = a\mathscr{L}\{F(t)\} + b\mathscr{L}\{G(t)\}, \tag{15.84}$$

la operación definida por $\mathscr{L}$ es *lineal.*

Funciones Elementales. Para introducir la transformada de Laplace, procedamos a aplicar la operación a algunas funciones elementales. En todos los casos se supone que $F(t) = 0$ para $t < 0$.

$$F(t) = 1 \qquad (t > 0).$$

Siendo así

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} \, dt = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0. \tag{15.85}$$

Nuevamente, se permite que

$$F(t) = e^{kt} \qquad (t > 0).$$

La transformada de Laplace se transforma en

$$\mathscr{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{kt} \, dt = \frac{1}{s-k} \qquad \text{para } s > k. \tag{15.86}$$

Utilizando esta relación se puede obtener fácilmente la transformada de Laplace de otras funciones. Ya que

$$\begin{aligned} \cosh kt &= \tfrac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt}), \\ \operatorname{senh} kt &= \tfrac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt}), \end{aligned} \tag{15.87}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{\cosh kt\} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right) = \frac{s}{s^2 - k^2}, \\ \mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right) = \frac{k}{s^2 - k^2}, \end{aligned} \tag{15.88}$$

ambas válidas para $s > k$. Mediante las relaciones

$$\begin{aligned} \cos kt &= \cosh ikt, \\ \operatorname{sen} kt &= -i \operatorname{senh} ikt, \end{aligned} \tag{15.89}$$

las transformadas de Laplace son

$$\mathscr{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2},$$
$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}, \tag{15.90}$$

ambas válidas para $s > 0$. Otra derivación de esta última transformada se proporciona en la siguiente sección.

Finalmente, para $F(t) = t^n$, se tiene

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt,$$

lo cual es justamente la función factorial. Siendo así,

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0, \quad n > -1. \tag{15.91}$$

Transformada Inversa. Estas operaciones son de poco interés a menos de que se pueda aplicar la transformada inversa, tal como en las transformadas de Fourier, es decir con

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s),$$

siendo así

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t). \tag{15.92}$$

Considerada literalmente, esta transformada inversa *no* es única; es decir, dos funciones $F_1(t)$ y $F_2(t)$ pueden tener la misma transformada, $f(s)$. Sin embargo, en este caso,

$$F_1(t) - F_2(t) = N(t)$$

en donde $N(t)$ es una función nula, significando que

$$\int_0^{t_0} N(t) \, dt = 0.$$

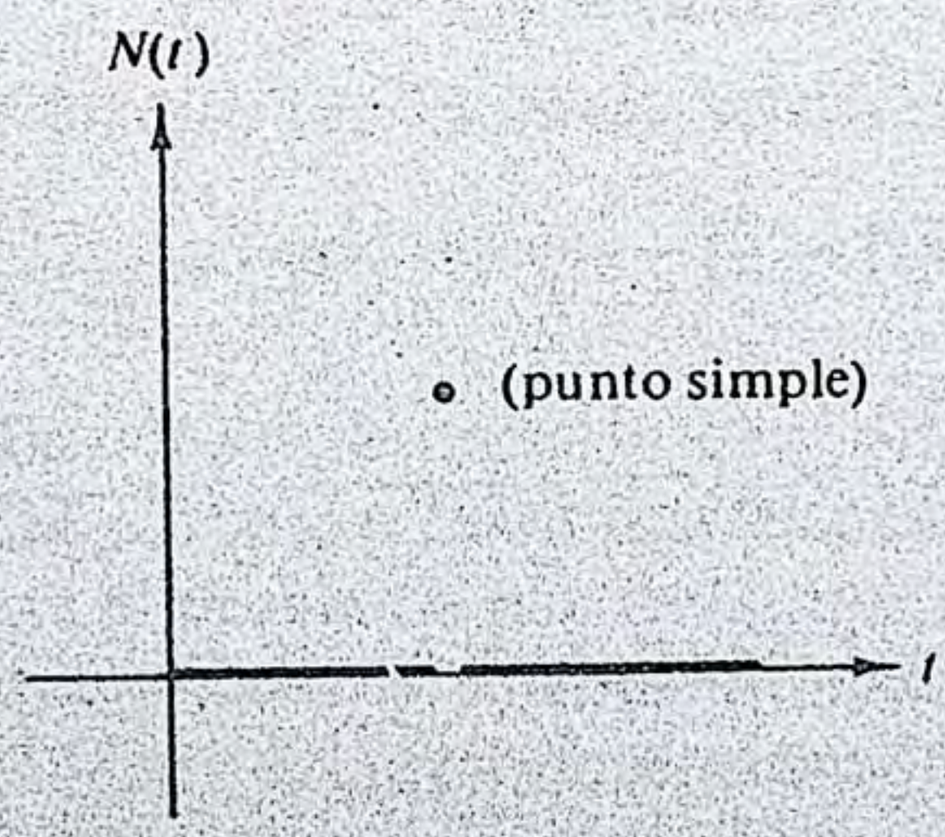


Fig. 15.4 Una posible función nula

para todas las t_0 positivas. Este resultado se conoce como teorema de Lerch. En consecuencia, para el físico y el ingeniero $N(t)$ casi siempre debe considerarse como cero y la operación inversa se vuelve única.

La determinación de la transformada inversa se puede realizar en dos formas. (1) Una técnica general para $\mathscr{L}^{-1}$ será establecida en la Sección 15.11 mediante el uso del cálculo de los residuos. (2) Se establecerá una tabla de transformadas, la cual será utilizada para definir las transformadas inversas exactamente de la misma manera que se utiliza la tabla de logaritmos para buscar el antilogaritmo. Estas transformadas constituyen los principios embriónicos de tal tabla. Para un conjunto más completo, véase la Tabla 15.2, página 830 o AMS-55, Capítulo 29.

Desarrollo de Fracción Parcial. La utilización de tal tabla de transformadas (o transformadas inversas) se facilita mediante el desarrollo de $f(s)$ en *fracciones parciales.*

Frecuentemente, $f(s)$ o sea la transformada, se presenta en la forma $g(s)/h(s)$, en donde $g(s)$ y $h(s)$ son polinomios sin factores comunes, siendo $g(s)$ de grado menor que $h(s)$. Si los factores de $h(s)$ son todos lineales y distintos, entonces mediante la teoría de las fracciones parciales se puede indicar

$$f(s) = \frac{c_1}{s - a_1} + \frac{c_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - a_n}, \tag{15.93}$$

en donde los términos c_i son independientes de s. Cuando cualquiera de las raíces, por ejemplo a_1, es un múltiplo (ocurriendo m veces), entonces $f(s)$ tiene la forma

$$f(s) = \frac{c_{1,m}}{(s - a_1)^m} + \frac{c_{1,m-1}}{(s - a_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{s - a_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{c_i}{s - a_i}. \tag{15.94}$$

Finalmente, si uno de los factores es cuadrático, $(s^2 + ps + q)$, el numerador, en lugar de ser una constante simple tiene la forma

$$\frac{as + b}{s^2 + ps + q}.$$

Existen diversas formas de determinar las constantes introducidas. Por ejemplo, en la Ec. 15.93 se puede multiplicar por $(s - a_i)$ y obtener

$$c_i = \lim_{s \to a_i} (s - a_i) f(s). \tag{15.95}$$

En los casos elementales, frecuentemente la solución directa es la más sencilla.

EJEMPLO 15.7.1 DESARROLLO DE FRACCION PARCIAL

Sea

$$f(s) = \frac{k^2}{s(s^2 + k^2)} = \frac{c}{s} + \frac{as + b}{s^2 + k^2} \tag{15.96}$$

Colocando el lado derecho de la ecuación sobre un denominador común e igualando potencias similares de s en el numerador

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)}, \tag{15.97}$$

$$c + a = 0, \qquad s^2,$$

$$b = 0, \qquad s^1,$$

y

$$ck^2 = k^2, \qquad s^0.$$

Resolviendo estas ($s \neq 0$),

$$c = 1,$$

$$b = 0,$$

$$a = -1,$$

originando

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2}, \tag{15.98}$$

y

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} = 1 - \cos kt \tag{15.99}$$

mediante las Ecs. 15.85 y 15.90.

EJEMPLO 15.7.2

Como una de las aplicaciones de las transformadas de Laplace, considere la evaluación de

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x}\, dx. \tag{15.100}$$

Suponga que se toma la transformada de Laplace de esta integral definida (e impropia):

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x}\, dx\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x}\, dx\, dt. \tag{15.101}$$

Ahora, intercambiando el orden de integración (lo cual debe justificarse),[1] se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left[\int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} tx\, dt\right] dx = \int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2}, \tag{15.102}$$

ya que el factor dentro del paréntesis es justamente la transformada de Laplace de sen tx. De acuerdo con las tablas de integrales

[1] Véase Jeffreys y Jeffreys, Capítulo 1.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{x}{s}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2s} = f(s). \tag{15.103}$$

Mediante la Ec. 15.85 se realiza la transformación inversa para obtener

$$F(t) = \frac{\pi}{2}, \qquad t > 0, \tag{15.104}$$

lo cual concuerda con la evaluación mediante cálculo de residuos (Sección 7.2). Se ha supuesto que $t > 0$ en $F(t)$. Para $F(-t)$, tan solo se requiere considerar que $\operatorname{sen}(-tx) = -\operatorname{sen} tx$, proporcionando $F(-t) = -F(t)$. Finalmente, si $t = 0$, $F(0)$ evidentemente es cero. En consecuencia

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & t < 0. \end{cases} \tag{15.105}$$

Observe que $\int_0^\infty (\operatorname{sen} tx/x)\,dx$, considerada como una función de t, describe una función en etapas, una etapa de altura π a $t = 0$. Esto es consistente con la Ec. 8.83d.

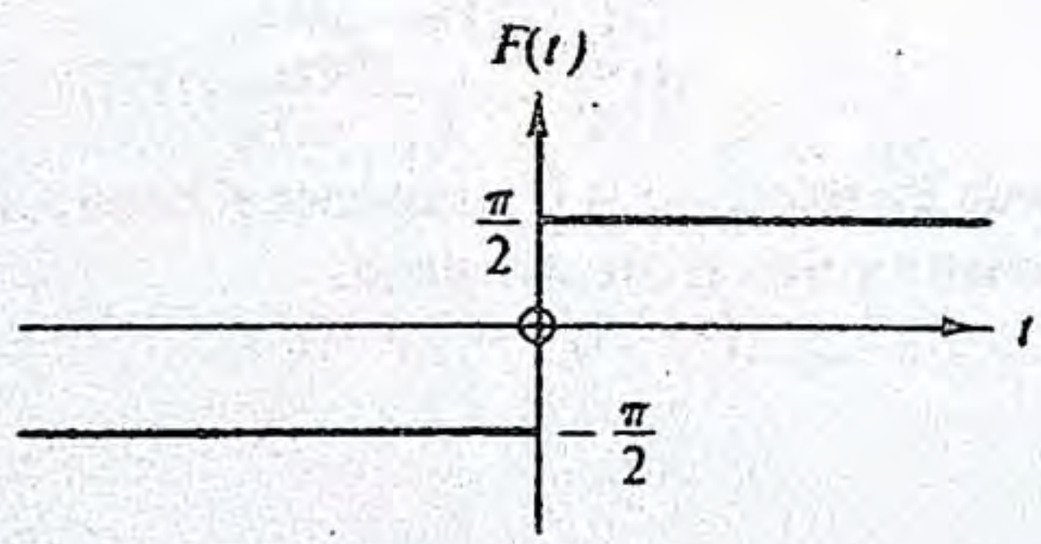


Fig. 15.5 $F(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x}\,dx$, una función de etapas

EJERCICIOS

15.7.1 Demuestre que

$$\lim_{s\to\infty} s f(s) = \lim_{t\to+0} F(t).$$

Sugerencia. Suponga que $F(t)$ puede expresarse como $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

15.7.2 Demuestre que

$$\frac{1}{\pi}\lim_{s\to 0}\mathscr{L}\{\cos xt\} = \delta(x).$$

15.7.3 Verifique que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}\right\} = \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, \qquad a^2 \neq b^2.$$

15.7.4 Demuestre que

(a)

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}, \qquad a \neq b.$$

(b)

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s+b)}\right\} = \frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}, \qquad a \neq b.$$

15.7.5 El potencial electrostático de un disco conductor cargado se conoce que tiene la forma general (coordenadas cilíndricas circulares)

$$\Phi(\rho, z) = \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(k\rho) f(k)\, dk$$

en donde $f(k)$ es desconocida. A distancias grandes ($z \to \infty$), el potencial debe aproximarse al potencial de Coulomb $Q/4\pi\varepsilon_0 z$. Demuestre que

$$\lim_{k\to 0} f(k) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Sugerencia. Se puede establecer $\rho = 0$ y suponer el desarrollo de Maclaurin de $f(k)$ o, utilizando e^{-t} construir una secuencia delta.

15.8 Transformada de Laplace de Derivadas

Probablemente la principal aplicación de las transformadas de Laplace se tiene en la conversión de las ecuaciones diferenciales en formas más simples que pueden resolverse con mayor facilidad. Por ejemplo, posteriormente se podrá ver que las ecuaciones diferenciales acopladas con coeficientes constantes se transforman en ecuaciones algebraicas lineales simultáneas.

Procedamos a transformar la primera derivada de $F(t)$.

$$\mathscr{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{d\,F(t)}{dt}\,dt$$

$$= e^{-st} F(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt$$

$$= s\mathscr{L}\{F(t)\} - F(0). \tag{15.106}$$

De de un punto de vista estricto, $F(0) = F(+0)$[1] y dF/dt se requiere que al menos sea continua en parte para $0 \leqslant t < \infty$. Evidentemente, tanto $F(t)$ como su derivada deben ser tales que las integrales no sean divergentes. Incidentalmente, la Ec. 15.106 proporciona otra demostración del Ejercicio 15.7.1.

El desarrollo proporciona

$$\mathscr{L}\{F^{(2)}(t)\} = s^2\mathscr{L}\{F(t)\} - sF(+0) - F'(+0), \tag{15.107}$$

$$\mathscr{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n\mathscr{L}\{F(t)\} - s^{n-1} F(+0) - s^{n-2} F'(+0) - \cdots - F^{(n-1)}(+0). \tag{15.108}$$

Observe cuidadosamente la forma en que las condiciones iniciales, $F(+0)$, $F'(+0)$, y así sucesivamente, se incorporan en la transformada. La Ec. 15.107 se puede utilizar para derivar $\mathscr{L}\{\text{sen } kt\}$. Se utiliza la identidad

$$-k^2 \operatorname{sen} kt = \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{sen} kt. \tag{15.109}$$

Luego, aplicando la operación de la transformada de Laplace

$$-k^2\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \mathscr{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{sen} kt\right\}$$

$$= s^2\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\} - s \operatorname{sen}(0) - \frac{d}{dt} \operatorname{sen} kt \,|_{t=0}. \tag{15.110}$$

Ya que $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $d/dt \operatorname{sen} kt|_{t=0} = k$,

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}, \tag{15.111}$$

verificando así la Ec. 15.90.

EJEMPLO 15.8.1 OSCILADOR ARMONICO SIMPLE

A modo de un ejemplo físico pero razonable, considere una masa m oscilando bajo la influencia de un muelle ideal, en que la constante de muelle es k. Como es usual, la fricción puede despreciarse. Siendo así, la segunda ley de Newton se transforma en

$$m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + k\, X(t) = 0; \tag{15.112}$$

[1] El cero se alcanza desde el lado *positivo*.

asimismo,

$$X(0) = X_0,$$
$$X'(0) = 0.$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$m\mathscr{L}\left\{\frac{d^2X}{dt^2}\right\} + k\mathscr{L}\{X(t)\} = 0, \tag{15.113}$$

y mediante el uso de la Ec. 15.107 esto se transforma en

$$ms^2\, x(s) - msX_0 + k\, x(s) = 0, \tag{15.114}$$

$$x(s) = X_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \qquad \text{con } \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}. \tag{15.115}$$

De acuerdo con la Ec. 15.90, se observa que esto es la transformada de cos xxxi lo cual proporciona

$$X(t) = X_0 \cos \omega_0 t \tag{15.116}$$

como era de esperarse.

EJEMPLO 15.8.2 NUTACION DE LA TIERRA

Un ejemplo algo más involucrado lo proporciona la nutación de los polos de la Tierra (precesión libre de fuerza). Tratando a la Tierra como un esferoide rígido (oblato), las ecuaciones de Euler para el movimiento se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -aY \\ \frac{dY}{dt} &= +aX \end{aligned} \tag{15.117}$$

en donde $a \equiv [(I_z - I_x)/I_z]\omega_z$,

$X = \omega_x$,

$Y = \omega_y$ con el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$,

$I_z =$ momento de inercia alrededor del eje z e $I_y = I_x$ momento de inercia alrededor del eje x(o y).

El eje z coincide con el eje de simetría de la Tierra. Difiere del eje en cuanto a la rotación diaria de la Tierra, $\boldsymbol{\omega}$, en algo así como 15 metros medidos en los polos. La transformación de estas ecuaciones diferenciales acopladas proporciona

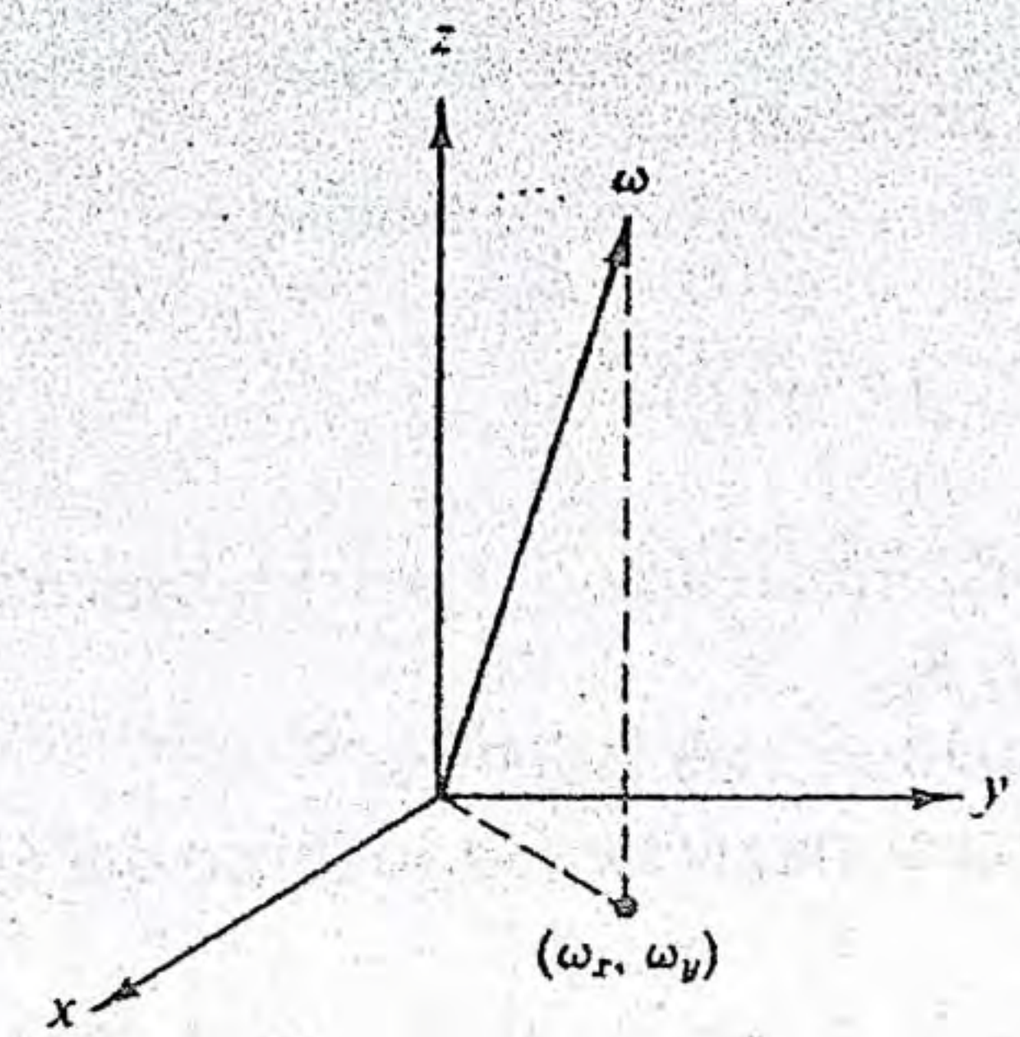


Fig. 15.6

$$s\,x(s) - X(0) = -a\,y(s),$$
$$s\,y(s) - Y(0) = a\,x(s). \tag{15.118}$$

Combinando para eliminar $y(s)$, se obtiene

$$s^2\,x(s) - s\,X(0) + a\,Y(0) = -a^2\,x(s)$$

o

$$x(s) = X(0)\frac{s}{s^2 + a^2} - Y(0)\frac{a}{s^2 + a^2}. \tag{15.119}$$

En consecuencia,

$$X(t) = X(0)\cos at - Y(0)\operatorname{sen} at. \tag{15.120}$$

De manera similar

$$Y(t) = X(0)\operatorname{sen} at + Y(0)\cos at. \tag{15.121}$$

Se observa que esto corresponde a la rotación del vector (X, Y) en sentido contrario a las manecillas del reloj (para $a > 0$) alrededor del eje z con el ángulo $\theta = at$ y la velocidad angular a.

La interpretación directa puede encontrarse al seleccionar el eje de tiempo de manera que $Y(0) = 0$. Siendo así

$$X(t) = X(0)\cos at,$$
$$Y(t) = X(0)\operatorname{sen} at, \tag{15.122}$$

con las ecuaciones paramétricas para la rotación de (X, Y) en una órbita circular de radio $X(0)$ con la velocidad angular a en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

En caso de la velocidad angular de la Tierra, el vector $X(0)$ es de aproximadamente 15 metros, mientras que a, tal como se ha definido antes, corresponde a un periodo $(2\pi/a)$ de aproximadamente 300 días. De hecho, debido a las desviaciones con respecto al cuerpo rígido idealizado

supuesto al establecer las ecuaciones de Euler, el período es de aproximadamente 427 días.[1]

Si en la Ec. 15.117 se establece

$$X(t) = L_x,$$

$$Y(t) = L_y,$$

en donde L_x y L_y = los componentes x y y del momento angular, $\mathbb{L}$,

$a = -g_L B_z$,

g_L = relación giromagnética

B_z = campo magnético (a lo largo del eje z,),

La Ec. 15.117 describe la precesión de Larmor para cuerpos cargados en un campo magnético uniforme, B_z.

Función Delta de Dirac. Para su uso con las ecuaciones diferenciales, es de utilidad una transformada adicional: la correspondiente a la función delta de Dirac.[2]

$$\mathscr{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t - t_0)\, dt = e^{-st_0}, \quad \text{para } t_0 \geqslant 0, \tag{15.123}$$

y para $t_0 = 0$

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1, \tag{15.124}$$

en donde se supone que se utiliza una representación de la función delta de Dirac tal que

$$\int_0^\infty \delta(t)\, dt = 1, \qquad \delta(t) = 0 \quad \text{para} \quad t > 0. \tag{15.125}$$

Como un método alternativo, $\delta(t)$ se puede considerar como el límite a medida que $\varepsilon \to 0$ de $F(t)$, en donde

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varepsilon^{-1}, & 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & t > \varepsilon. \end{cases} \tag{15.126}$$

Mediante el cálculo directo

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}. \tag{15.127}$$

[1] Menzel, D. ed., *Fundamental Formulas of Physics*, pág. 695. Nueva York: Prentice-Hall (1955).

[2] Desde un punto de vista estricto, la función delta de Dirac es indefinida. Sin embargo, la integral sobre la misma es bastante definida. Este procedimiento se desarrolla en la Sección 8.6 utilizando las secuencias delta.

Tomando el límite de la integral (en lugar de la integral del límite)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{L}\{F(t)\} = 1$$

o sea la Ec. 15.124

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

Esta función delta frecuentemente se denomina función de impulso debido a que es de utilidad para describir las fuerzas impulsoras, es decir las fuerzas que tienen una duración de tiempo breve.

EJEMPLO 15.8.3 FUERZA IMPULSORA

La segunda ley de Newton para una fuerza impulsora que actúa en una partícula de masa m se transforma en

$$m \frac{d^2X}{dt^2} = P\,\delta(t) \tag{15.128}$$

en donde P es una constante.

Transformando, obtenemos

$$ms^2\,x(s) - ms\,X(0) - m\,X'(0) = P. \tag{15.129}$$

Para una partícula que comienza desde el reposo, $X'(0) = 0$.[1] También habremos de considerar $X(0) = 0$. Siendo así,

$$x(s) = \frac{P}{ms^2}, \tag{15.130}$$

y

$$X(t) = \frac{P}{m}\,t, \tag{15.131}$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{P}{m}, \qquad \text{una constante.} \tag{15.132}$$

El efecto del impulso $P\,\delta(t)$ consiste en la transferencia (instantánea) de P unidades de momento lineal a la partícula.

Un análisis similar se aplica al galvanómetro balístico. El esfuerzo de torsión en el galvanómetro está definido inicialmente por ki, en donde i es un pulso de corriente y k es una constante de proporcionalidad. Ya que i es de duración breve, se establece

$$ki = kq\,\delta(t) \tag{15.133}$$

[1] Esto de hecho debería ser $X'(+0)$. Para incluir el efecto del impulso, considere que el impulso ocurre en $t = \varepsilon$ y permita que $\varepsilon \to 0$.

en donde q es la carga total transportada por la corriente i. Siendo así, con I el momento de inercia,

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = kq\,\delta(t), \tag{15.134}$$

y transformando como antes se encuentra que el efecto del pulso de corriente es la transferencia de kq unidades de momento *angular* al galvanómetro.

EJERCICIOS

15.8.1 Utilice la expresión de la transformada de segunda derivada para obtener la transformada de cos kt.

15.8.2 Si $F(t)$ se puede desarrollar en una serie de potencias (Taylor o Laurent), es decir

$$F(t) = \sum_n a_n t^n,$$

y

$$\int_0^\infty e^{-st} \sum_n a_n t^n \, dt$$

o

$$\sum_n a_n \int_0^\infty e^{-st}\, t^n \, dt$$

existe, demuestre que $f(s)$, la transformada de Laplace de $F(t)$, no contiene potencias de s mayores de s^{-1}. Compruebe el resultado mediante el cálculo de $\mathscr{L}\{\delta(t)\}$ y comente acerca de este fracaso.

15.8.3 Los núcleos radioactivos se degradan de acuerdo con la ley

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

en donde N es la concentración de cierto nucleido y λ es una constante de degradación particular. Esta ecuación puede interpretarse en el sentido de que establece que la tasa de degradación es proporcional al número de los núcleos radioactivos presentes. Todos se degradan independientemente.

En una serie radioactiva de n nucleidos distintos, comenzando con N_1,

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \text{ etc.},$$

$$\frac{dN_n}{dt} = \lambda_{n-1} N_{n-1}, \text{ constante}.$$

Encuentre $N_1(t)$, $N_2(t)$ y $N_3(t)$, $n = 3$, con $N_1(0) = N_0$, $N_2(0) = N_3(0) = 0$.

Respuesta. $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$,

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}),$$

$$N_3(t) = N_0\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}\right).$$

Encuentre una expresión adecuada para N_2 y N_3, que sea válida para t pequeña cuando $\lambda_1 \approx \lambda_2$.

Respuesta. $N_2 \approx N_0 \lambda_1 t$

$$N_3 \approx \frac{N_0}{2}\lambda_1 \lambda_2 t^2.$$

Encuentre una expresión adecuada para N_2 y N_3, que sea válida para t pequeña cuando

(a) $\lambda_1 \gg \lambda_2$, (b) $\lambda_1 \ll \lambda_2$.

Respuesta. (a) $N_2 \approx N_0 e^{-\lambda_2 t}$

$N_3 \approx N_0(1 - e^{-\lambda_2 t})$, $\lambda_1 t \gg 1$.

(b) $N_2 \approx N_0 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t}$,

$N_3 \approx N_0(1 - e^{-\lambda_1 t})$, $\lambda_2 t \gg 1$.

15.8.4 La formación de un isótopo en un reactor nuclear está definida por

$$\frac{dN_2}{dt} = nv\sigma_1 N_{10} - \lambda_2 N_2(t) - nv\sigma_2 N_2(t).$$

Aquí, el producto nv es el flujo de neutrones, neutrones por centímetro cúbico, multiplicado por los centímetros/segundo de velocidad media; σ_1 y σ_2 (cm^2) son las medidas de la probabilidad de absorción neutrónica por el isótopo original, concentración N_{10}, la cual se supone constante y del isótopo recientemente formado, concentración N_2, respectivamente. La constante de degradación radioactiva para el isótopo es λ_2.

(a) Encuentre la concentración N_2 del nuevo isótopo como función del tiempo.

(b) Si el elemento original es Eu^{153}, $\sigma_1 = 400$ barnios $= 400 \times 10^{-24}$ cm^2, $\sigma_2 = 1000$ barnios $= 1000 \times 10^{-24}$ cm^2, y $\lambda_2 = 1.4 \times 10^{-9}$ seg^{-1}. Si $N_{10} = 10^{20}$ y $(nv) = 10^9$ cm^{-2} seg^{-1}, encuentre N_2, la concentración de Eu^{154} después de un año continuo de irradiación continua. Indique si la suposición de que N_1 es constante se justifica

15.8.5 En un reactor nuclear se forma Xe^{135} tanto como producto por la fisión directa como por la degradación del producto de I^{135}, duración promedio de 6.7 horas. La duración promedio del Xe^{135} es de 9.2 horas. Ya que el Xe^{135} absorbe intensamente los neutrones térmicos "envenenando" consecuentemente el reactor nuclear, su concentración es un asunto de gran interés. Las ecuaciones de importancia son

$$\frac{dN_I}{dt} = \gamma_I \varphi \sigma_f N_U - \lambda_I N_I,$$

$$\frac{dN_X}{dt} = \lambda_I N_I + \gamma_X \varphi \sigma_f N_U - \lambda_X N_X - \varphi \sigma_X N_X.$$

Aquí, N_I = concentración del I^{135} (Xe^{135}, U^{235}). Suponga N_U = constante.
γ_I = rendimiento de I^{135} por fisión = 0.060,
γ_X = rendimiento de Xe^{135} directamente de la fisión = 0.003,

$\lambda_I = I^{135}$ (Xe^{135}) constante de degradación $= \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}} = \dfrac{0.693}{t_{1/2}}$

σ_f = sección transversal de fisión neutrónica térmica para U^{235},
σ_X = sección transversal de absorción neutrónica térmica para $Xe^{135} = 3.5 \times 10^6$ barnios $= 3.5 \times 10^{-18}$ cm^2.
(σ_I, la sección transversal de absorción del I^{135} es despreciable)
φ = flujo de neutrones = neutrones/cm^3 × velocidad media (cm/seg)

1. Encuentre $N_X(t)$ en términos del flujo de neutrones φ y el producto $\sigma_f N_U$.
2. Encuentre $N_X(t \to \infty)$.
3. Una vez que N_X ha alcanzado el equilibrio, el reactor deja de funcionar, $\varphi = 0$. Encuentre $N_X(t)$ después del paro. Observe que el incremento de N_X que puede ser de algunas horas interfiere con el fundamento del reactor una vez más.

15.9 Otras Propiedades

Sustitución. Si se sustituye el parámetro s por $s - a$ en la definición de la transformada de Laplace (Ec. 15.82), se tiene

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} F(t)\, dt \qquad (15.135)$$
$$= \mathscr{L}\{e^{at} F(t)\}.$$

En consecuencia, la sustitución de s por $s - a$ corresponde a multiplicar $F(t)$ por e^{at} e inversamente. Este resultado puede utilizarse con ventaja en la ampliación de la tabla de transformadas. De acuerdo con la Ec. 15.90 se encuentra inmediatamente que

$$\mathscr{L}\{e^{at} \operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2}; \qquad (15.136)$$

asimismo,

$$\mathscr{L}\{e^{at} \cos kt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}, \qquad s > a.$$

EJEMPLO 15.9.1 OSCILADOR AMORTIGUADO

Estas expresiones son de utilidad cuando se considera la masa oscilante con amortiguamiento proporcional a la velocidad. La Ec. 15.112, con tal amortiguamiento añadido, se transforma en

$$m\, X''(t) + b\, X'(t) + k\, X(t) = 0, \qquad (15.137)$$

en donde b es una constante de proporcionalidad. Supongamos que la partícula comienza desde el reposo en $X(0) = X_0$, $X'(0) = 0$. La ecuación transformada es

$$m[s^2 x(s) - sX_0] + b[s\,x(s) - X_0] + k\,x(s) = 0 \tag{15.138}$$

y

$$x(s) = X_0 \frac{ms + b}{ms^2 + bs + k}. \tag{15.139}$$

Esto puede manejarse al completar el cuadrado del denominador,

$$s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} = \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right). \tag{15.140}$$

Si el amortiguamiento es pequeño, $b^2 < 4$ km, en donde el último término es positivo y será designado como ω_1^2.

$$x(s) = X_0 \frac{s + b/m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}$$

$$= X_0 \frac{s + b/2m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} + X_0 \frac{(b/2m\omega_1)\omega_1}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}. \tag{15.141}$$

Mediante la Ec. 15.136

$$X(t) = X_0 e^{-(b/2m)t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{b}{2m\omega_1}\operatorname{sen}\omega_1 t\right)$$

$$= X_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-(b/2m)t}\cos(\omega_1 t - \varphi) \tag{15.142}$$

en donde

$$\tan\varphi = \frac{b}{2m\omega_1},$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Evidentemente, a medida que $b \to 0$, la solución llega a ser la solución para el caso sin amortiguamiento (Sección 15.8).

Análogo RLC. Es de hacerse notar la similaridad entre esta oscilación armónica simple amortiguada de una masa en un muelle y el circuito RLC (resistencia, inductancia y capacitancia). En cualquier instante, la suma de las diferencias de potencial alrededor del circuito deben ser cero (ley de Krchhoff, conservación de la energía). Esto proporciona

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int^t I\,dt = 0. \tag{15.143}$$

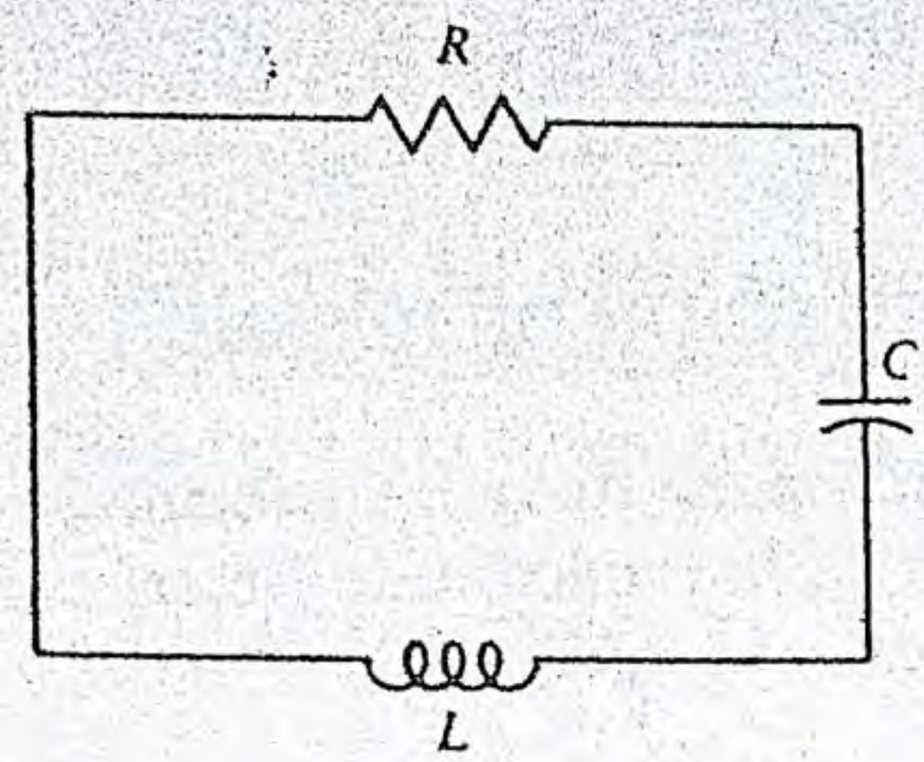


Fig. 15.7 Circuito RLC

Diferenciando la corriente I con respecto al tiempo (para eliminar la integral), se tiene

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0. \tag{15.144}$$

Si se sustituye

$I(t)$ con $X(t)$,

L con m,

R con b,

C^{-1} con k,

esto es idéntico al problema mecánico. Esto tan solo constituye un ejemplo de la unificación de diversas ramas de la física por medio de las matemáticas. En el libro de Olson se puede encontrar una descripción más completa de este tema.[1]

Translación. En esta ocasión, permítase que $f(s)$ sea multiplicada por e^{-bs}, $b > 0$.

$$e^{-bs}f(s) = e^{-bs}\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(t+b)}\,F(t)\,dt. \tag{15.145}$$

Ahora, se permite que $t + b = \tau$. La Ec. 15.145 se transforma en

$$e^{-bs}f(s) = \int_b^\infty e^{-s\tau}\,F(\tau - b)\,d\tau. \tag{15.146}$$

Ya que se ha supuesto que $F(t)$ es igual a cero para $t < 0$, $F(\tau - b) = 0$ para $0 \leqslant \tau < b$. En consecuencia, el límite inferior se puede extender a cero sin cambiar el valor de la integral. Luego, observando que τ es solo una variable de integración.

[1] Olson, H. F., *Dynamical Analogies*. Nueva York: Van Nostrand (1943).

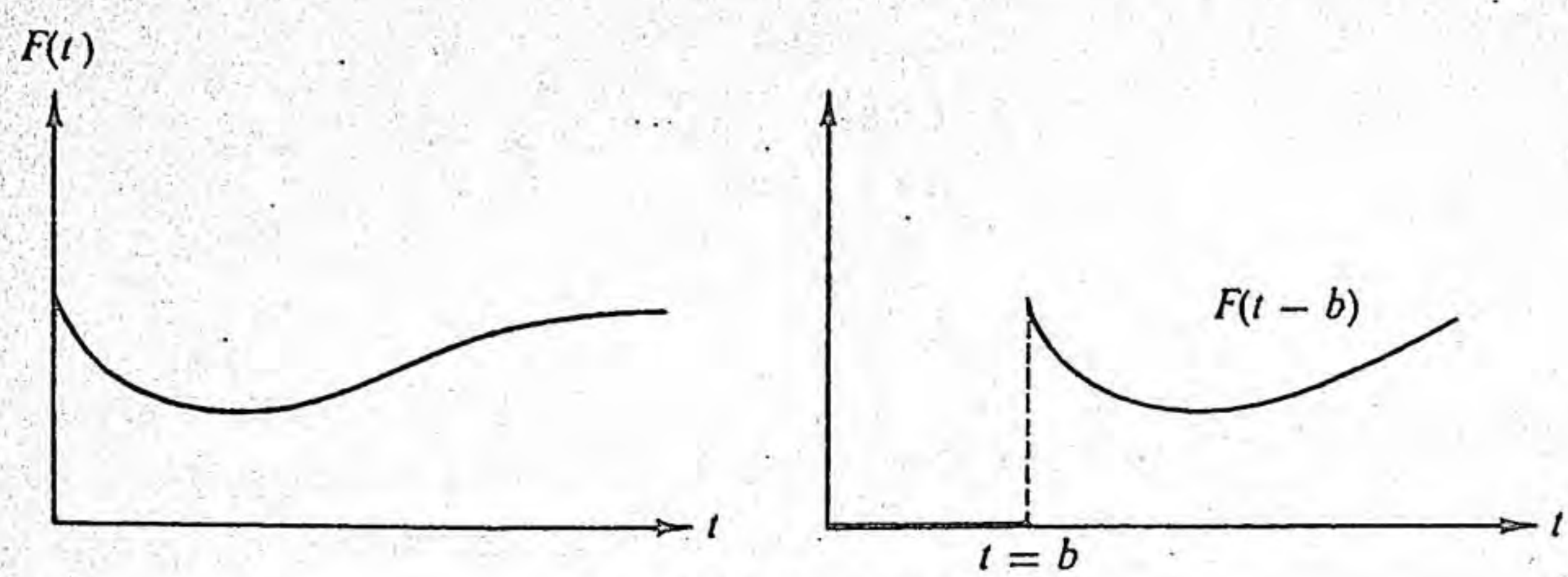


Fig. 15.8 Translación

$$e^{-bs} f(s) = \mathscr{L}\{F(t-b)\}. \tag{15.147}$$

EJEMPLO 15.9.2 ONDAS ELECTROMAGNETICAS

La ecuación de onda electromagnética con $E = E_y$ o E_z, una onda transversal que se propaga a lo largo del eje x, *es*

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{15.148}$$

Transformando esta ecuación con respecto a t,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{L}\{E(x,t)\} - \frac{s^2}{v^2}\mathscr{L}\{E(x,t)\} + \frac{s}{v^2}E(x,0) + \frac{1}{v^2}\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{15.149}$$

Si se tiene la condición inicial $E(x,0) = 0$ y

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,$$

entonces,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{L}\{E(x,t)\} = \frac{s^2}{v^2}\mathscr{L}\{E(x,t)\}. \tag{15.150}$$

La solución (de esta ecuación diferencial *ordinaria*) es

$$\mathscr{L}\{E(x,t)\} = c_1 e^{-(s/v)x} + c_2 e^{+(s/v)x}; \tag{15.151}$$

en que c_1 y c_2 se obtienen mediante condiciones limitantes adicionales. Si la onda permanece finita a medida que $x \to \infty$, $\mathscr{L}\{E(x,t)\}$ también lo hará. En consecuencia, $c_2 = 0$.

Si $E(0,t)$ se designa por $F(t)$, entonces $c_1 = f(s)$ y

$$\mathscr{L}\{E(x,t)\} = e^{-(s/v)x} f(s). \tag{15.152}$$

De acuerdo con la propiedad de translación (Ec. 15.147), se encuentra inmediatamente que

$$E(x, t) = \begin{cases} F\left(t - \dfrac{x}{v}\right), & t \geqslant \dfrac{x}{v}, \\ 0, & t < \dfrac{x}{v}. \end{cases} \tag{15.153}$$

La diferenciación y sustitución en la Ec. 15.148 verifica la Ec. 15.153. La solución representa una onda (o pulso) que se mueve en la dirección x positiva con la velocidad v. Observe que para $x > vt$ la región permanece inalterada; el pulso no tiene tiempo de llegar a la misma. Si se hubiera deseado una señal propagada a lo largo del eje x negativo, c_1 tendría que haberse establecido igual a 0 y de este modo se hubiera obtenido

$$E(x, t) = \begin{cases} F\left(t + \dfrac{x}{v}\right), & t \geqslant -\dfrac{x}{v}, \\ 0, & t < -\dfrac{x}{v}, \end{cases} \tag{15.154}$$

una onda a lo largo del eje x negativo.

Derivada de una Transformada. Cuando $F(t)$, que es al menos continua en parte, y s se seleccionan de modo que $e^{-st} F(t)$ sea convergente exponencialmente para s grande, la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

es convergente de modo uniforme y se puede diferenciar (bajo el signo de integral) con respecto a s. Siendo así,

$$f'(s) = \int_0^\infty (-t)e^{-st} F(t)\, dt = \mathscr{L}\{-t\, F(t)\}. \tag{15.155}$$

Continuando este proceso,

$$f^{(n)}(s) = \mathscr{L}\{(-t)^n F(t)\}. \tag{15.156}$$

Todas las integrales obtenidas así serían uniformemente convergentes debido al comportamiento exponencial decreciente de $e^{-st} F(t)$.

La misma técnica puede aplicarse para originar otras transformadas. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{kt}\, dt \\ &= \frac{1}{s-k}, \qquad (s > k). \end{aligned} \tag{15.157}$$

 Diferenciando con respecto a s (o con respecto a k), se obtiene

$$\mathscr{L}\{te^{kt}\} = \frac{1}{(s-k)^2}, \qquad s > k. \tag{15.158}$$

EJEMPLO 15.9.3 ECUACION DE BESSEL

Una aplicación interesante de la transformada de Laplace diferenciada aparece en la solución de la ecuación de Bessel con $n = 0$. De acuerdo con el Capítulo 11, se tiene

$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + x^2\, y(x) = 0. \tag{15.159}$$

Dividiendo entre x y sustituyendo $t = x$ y $F(t) = y(x)$ para estar de acuerdo con la presente notación, la ecuación de Bessel se transforma en

$$t\, F''(t) + F'(t) + t\, F(t) = 0. \tag{15.160}$$

Se requiere de una solución regular, en particular $F(0) = 1$. Asimismo, se supone que la $F(t)$ desconocida tiene una transformada. En consecuencia, mediante la transformación y uso de las Ecs. 15.107 y 15.155, se tiene

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2 f(s) - s\right] + s f(s) - 1 - \frac{d}{ds} f(s) = 0. \tag{15.161}$$

Ya que $F(0)$ es finita, la sustitución en la Ec. 15.160 indica que $F'(0) = 0$. Readaptando la Ec. 15.161, se obtiene

$$(s^2 + 1) f'(s) + s f(s) = 0 \tag{15.162}$$

o

$$\frac{df}{f} = -\frac{s\, ds}{s^2 + 1}. \tag{15.163}$$

Mediante la integración

$$\ln f(s) = -\tfrac{1}{2} \ln (s^2 + 1) + \ln C, \tag{15.164}$$

lo cual puede restablecerse en la forma

$$f(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}}. \tag{15.165}$$

Para hacer uso de la Ec. 15.91, $f(s)$ se desarrolla en una serie de potencias negativas de s, convergente para $s > 1$.

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{C}{s}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{C}{s}\left[1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! s^4} - \cdots + \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2 s^{2n}} + \cdots\right]. \end{aligned} \tag{15.166}$$

Invirtiendo, término por término, se obtiene

$$F(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2^n n!)^2}. \tag{15.167}$$

Cuando C se establece igual a 1, tal como se requiere de acuerdo con la condición inicial $F(0) = 1$, $F(t)$ es justamente $J_0(t)$, es decir la ya conocida función de Bessel de orden cero. En consecuencia,

$$\mathscr{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}. \tag{15.168}$$

Observe que se ha supuesto $s > 1$. La demostración para $s > 0$ se deja como problema.

Probablemente es de hacerse notar que esta aplicación ha sido exitosa y relativamente sencilla debido a que se ha considerado $n = 0$ en la ecuación de Bessel. Esto ha hecho posible separar un factor de x (o t). En caso de que esto no se hubiera hecho, los términos de forma $t^2 F(t)$ habrían introducido una segunda derivada de $f(s)$. La ecuación resultante no habría resultado tan fácil de resolver en comparación con la original.

Cuando se traspasa el campo de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, la transformada de Laplace aún puede aplicarse, pero no existe ninguna garantía de que será de utilidad.

La aplicación a la ecuación de Bessel, $n \neq 0$, se puede localizar en las referencias. Alternativamente, se puede demostrar que

$$\mathscr{L}\{J_n(at)\} = \frac{a^{-n}(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^n}{\sqrt{s^2 + a^2}} \tag{15.169}$$

mediante el hecho de expresar $J_n(t)$ como una serie infinita y por medio de la transformación término por término.

Integración de Transformadas. Nuevamente, con $F(t)$ siendo al menos continua en parte y x lo suficientemente grande de modo que $e^{-xt} F(t)$ disminuya exponencialmente (a medida que $x \to \infty$), la integral

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} F(t)\, dt \tag{15.170}$$

es uniformemente convergente con respecto a x. Esto justifica el invertir el orden de la integración en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \int_s^b f(x)\, dx &= \int_s^b \int_0^{\infty} e^{-xt} F(t)\, dt\, dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{F(t)}{t} (e^{-st} - e^{-bt})\, dt, \end{aligned} \tag{15.171}$$

en la integración con respecto a x. El límite inferior s se selecciona lo suficientemente grande de modo que $f(s)$ se encuentre dentro de la región de convergencia uniforme. Ahora, permitiendo que $b \to \infty$ se tiene

$$\int_s^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}\, e^{-st}\, dt$$

$$= \mathscr{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}, \tag{15.172}$$

considerando que $F(t)/t$ es finita en $t=0$ que tiene divergencia menos intensa que t^{-1} (de modo que existe $\mathscr{L}\{F(t)/t\}$)

EJERCICIOS

15.9.1 Resuelva la Ec. 15.137, la cual describe un oscilador armónico simple amortiguado para $X(0) = X_0, X'(0) = 0$ y

(a) $b^2 = 4$ km (amortiguado críticamente)

(b) $b^2 > 4$ km (sobreamortiguado)

Respuesta. (a) $X(t) = X_0 e^{-(b/2m)t}\left(1 + \frac{b}{2m} t\right)$.

15.9.2 Resuelva la Ec. 15.137, la cual describe un oscilador armónico simple amortiguado para $X(0) = 0$, $X'(0) = v_0$ y

(a) $b^2 < 4$ km (amortiguamiento débil)

(b) $b^2 = 4$ km (amortiguamiento crítico)

Respuesta. (a) $X(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-(b/2m)t} \operatorname{sen} \omega_1 t$,

(b) $X(t) = v_0 t\, e^{-(b/2m)t}$.

(c) $b^2 > 4$ km (sobreamortiguamiento)

15.9.3 El movimiento de un cuerpo que cae en un medio resistente se puede describir mediante

$$m\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = mg - b\frac{d X(t)}{dt}$$

cuando la fuerza de retardo es proporcional a la velocidad. Encuentre $X(t)$ y $dx(t)/dt$ para las condiciones iniciales

$$X(0) = \left.\frac{dX}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

15.9.4 Circuito de llamada. En ciertos circuitos electrónicos, la resistencia, inductancia y capacitancia se sitúan en el circuito de placa en paralelo (Fig. 15.9). Se mantiene un voltaje constante a través de los elementos en paralelo, conservando cargado el capacitor. En el tiempo $t = 0$ el circuito se desconecta de la fuente de voltaje. Encuentre los voltajes a través de los elementos en paralelo R, L y C como una función del tiempo. Suponga que R es *grande*.

Sugerencia. Mediante las leyes de Kirchhoff

$$I_R + I_C + I_L = 0 \quad \text{y} \quad E_R = E_C = E_L.$$

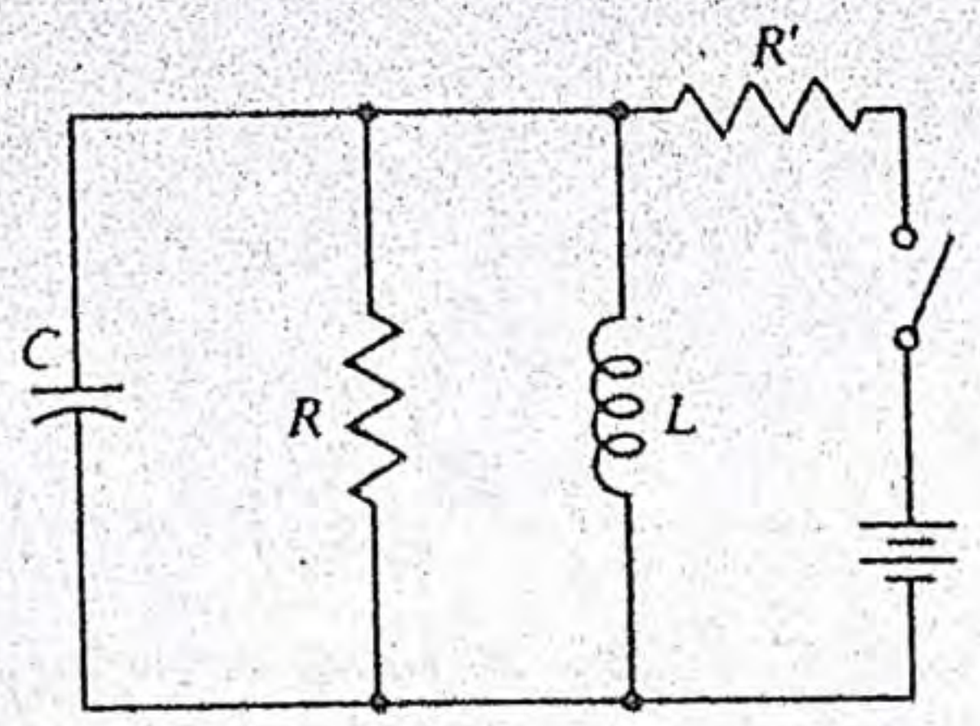


Fig. 15.9 Circuito de llamada

en donde

$$E_R = I_R R,$$

$$E_C = \frac{q_0}{C} + \frac{1}{C}\int_0^t I_C\, dt,$$

$$E_L = L\frac{dI_L}{dt},$$

$q_0 =$ carga inicial del capacitor

Con la impedancia CD de $L = 0$, se tiene $I_L(0) = I_0$, $E_L(0) = 0$. Esto significa $q_0 = 0$.

15.9.5 Con $J_0(t)$ expresado como una integral de contorno, aplique la operación de la transformada de Laplace, invierta el orden de integración y así demuestre que

$$\mathscr{L}\{J_0(t)\} = (s^2 + 1)^{-1/2}, \qquad \text{para } s > 0.$$

15.9.6 Evalúe $\int_0^\infty xJ_0(x)\, dx$.

Sugerencia. La aplicación directa de la Ec. 11.15 conduce a las oscilaciones infinitas. Intente con otra cosa, por ejemplo la transformada de Laplace con $s \to 0$.

15.9.7 Desarrolle la transformada de Laplace para $J_n(t)$ a partir de $\mathscr{L}\{J_0(t)\}$ mediante el uso de las relaciones de recurrencia de la función de Bessel.
Sugerencia. Existe la posibilidad de aplicar la inducción matemática.

15.9.8 El cálculo del campo magnético de un circuito de corriente circular en coordenadas cilíndricas circulares origina la integral

$$\int_0^\infty e^{-kz} kJ_1(ka)\, dk, \qquad \mathscr{R}(z) \geq 0.$$

Demuestre que esta integral es igual a $a/(z^2 + a^2)^{3/2}$.

15.9.9 El potencial electrostático de una carga de punto q en el origen en coordenadas cilíndricas circulares es

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty e^{-kz} J_0(k\rho)\, dk = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}, \qquad \mathscr{R}(z) \geq 0.$$

A partir de esta relación, demuestre que las transformadas de Fourier del coseno y seno de $J_0(k\rho)$ son

(a) $$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,F_c\{J_0(k\rho)\} \doteq \int_0^\infty J_0(k\rho)\cos k\zeta\,dk = \begin{cases}(\rho^2-\zeta^2)^{-1/2}, & \rho>\zeta,\\ 0, & \rho<\zeta.\end{cases}$$

(b) $$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,F_s\{J_0(k\rho)\} = \int_0^\infty J_0(k\rho)\,\mathrm{sen}\,k\zeta\,dk = \begin{cases}0, & \rho>\zeta,\\ (\zeta^2-\rho^2)^{-1/2}, & \rho<\zeta.\end{cases}$$

15.9.10 Demuestre que

$$\mathscr{L}\{I_0(at)\} = (s^2-a^2)^{-1/2}, \qquad s>a.$$

15.9.11 Verifique las siguientes transformadas de Laplace

(a) $\mathscr{L}\{j_0(at)\} = \mathscr{L}\left\{\dfrac{\mathrm{sen}\,at}{at}\right\} = \dfrac{1}{a}\cot^{-1}\left(\dfrac{s}{a}\right)$, (b) $\mathscr{L}\{n_0(at)\}$ no existe

(c) $$\mathscr{L}\{i_0(at)\} = \mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{senh}\,at}{at}\right\} = \frac{1}{2a}\ln\frac{s+a}{s-a} = \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{s}{a}\right),$$

(d) $\mathscr{L}\{k_0(at)\}$ no existe

15.9.12 Desarrolle una solución de transformadas de Laplace para la ecuación de Laguerre

$$t\,F''(t) + (1-t)\,F'(t) + n\,F(t) = 0.$$

Observe que se requiere de una derivada de la transformada y una transformada de las derivadas. Llegue tan lejos como sea posible con $n = n$; entonces (y solamente entonces) establezca $n = 0$.

15.9.13 Demuestre que la transformada de Laplace del polinomio de Laguerre $L_n(at)$ está definida por

$$\mathscr{L}\{L_n(at)\} = \frac{(s-a)^n}{s^{n+1}}, \qquad s>0.$$

15.9.14 Demuestre que

$$\mathscr{L}\{E_1(t)\} = \frac{1}{s}\ln(s+1), \qquad s>0,$$

en donde

$$E_1(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-\tau}d\tau}{\tau} = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{x}\,dx.$$

$E_1(t)$ es la función de integral exponencial.

15.9.15 (a) A partir de la Ec. 15.172, demuestre que

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}\,dt$$

considerando que existe la integral.

(b) De acuerdo con el resultado anterior, demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

es consistente con las Ec. 15.105 y 7.41.

15.9.16 (a) Demuestre que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} kt}{t}\right\} = \cot^{-1}\left(\frac{s}{k}\right).$$

(b) Utilizando este resultado (con $k = 1$), demuestre que

$$\mathscr{L}\{si(t)\} = -\frac{1}{s}\tan^{-1} s,$$

en donde

$$si(t) = -\int_t^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx, \quad \text{la integral del seno.}$$

15.9.17 Si $F(t)$ es periódica con un período a tal que $F(t + a) = F(t)$ para todas las $t \geqslant 0$, demuestre que

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^a e^{-st} F(t)\, dt}{1 - e^{-as}}$$

con la integración ahora tan solo sobre el *primer período* de $F(t)$.

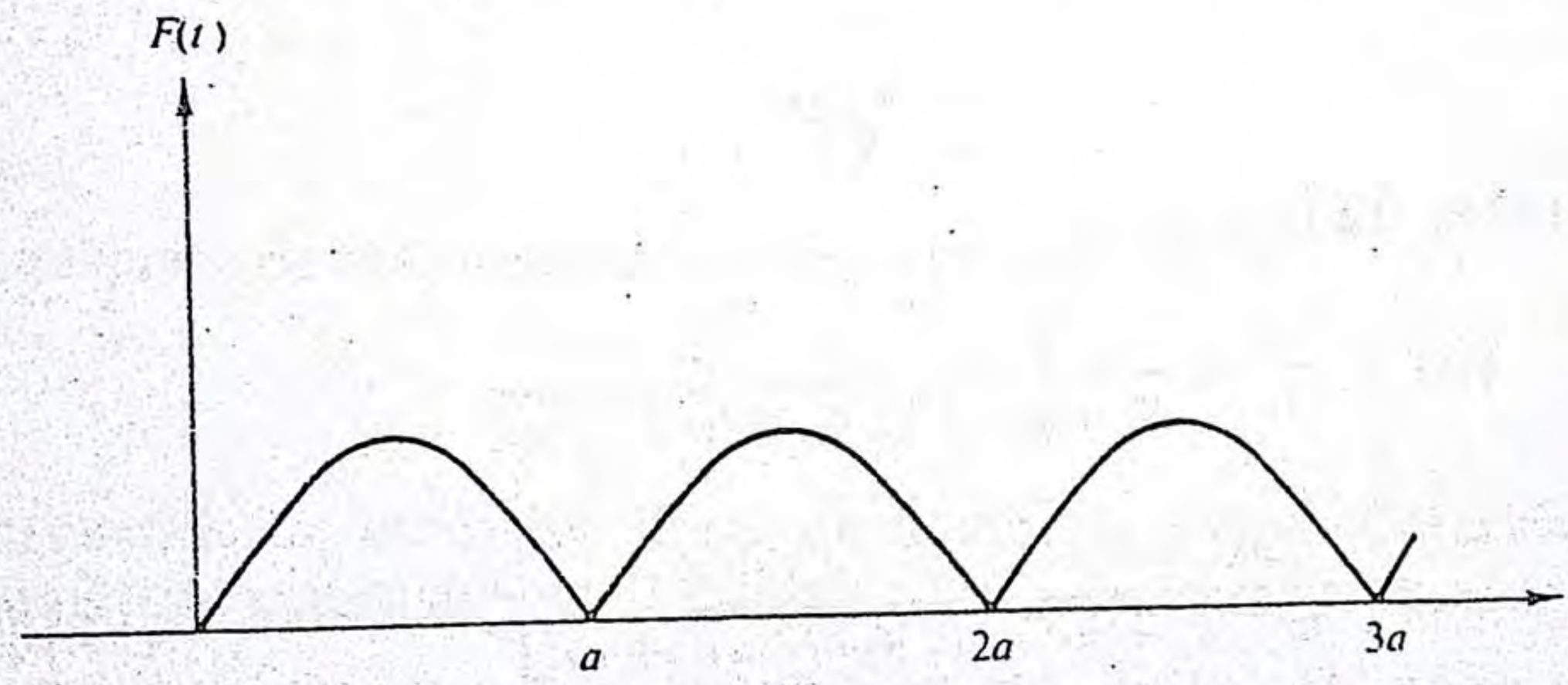


Fig. 15.10 Función periódica

15.9.18 Encuentre la transformada de Laplace de la onda cuadrada (período a) definida por

$$F(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a/2 \\ 0, & a/2 < t < a. \end{cases}$$

Respuesta. $f(s) = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1 - e^{-as/2}}{1 - e^{-as}}$.

15.9.19 Demuestre que

(a) $\mathscr{L}\{\cosh at \cos at\} = \dfrac{s^3}{s^4 + 4a^4}$,

(b) $\mathscr{L}\{\cosh at \operatorname{sen} at\} = \dfrac{as^2 + 2a^3}{s^4 + 4a^4}$,

(c) $\mathscr{L}\{\operatorname{senh} at \cos at\} = \dfrac{as^2 - 2a^3}{s^4 + 4a^4}$,

(d) $\mathscr{L}\{\operatorname{senh} at \operatorname{sen} at\} = \dfrac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$.

15.10 Teorema de Faltung o Convolución

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace es la definida por el teorema de Faltung o de la convolución.[1]. Se consideran dos transformadas

$$f_1(s) = \mathscr{L}\{F_1(t)\} \quad \text{y} \quad f_2(s) = \mathscr{L}\{F_2(t)\} \tag{15.173}$$

y se multiplican entre sí. Para evitar complicaciones cuando se cambian las variables, los límites superiores se mantienen finitos.

$$f_1(s) \cdot f_2(s) = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-sx} F_1(x)\, dx \int_0^{a-x} e^{-sy} F_2(y)\, dy. \tag{15.174}$$

Los límites superiores se seleccionan de tal modo que el área de integración, mostrada en la Fig. 15.11*a*, corresponda al triángulo sombreado y no

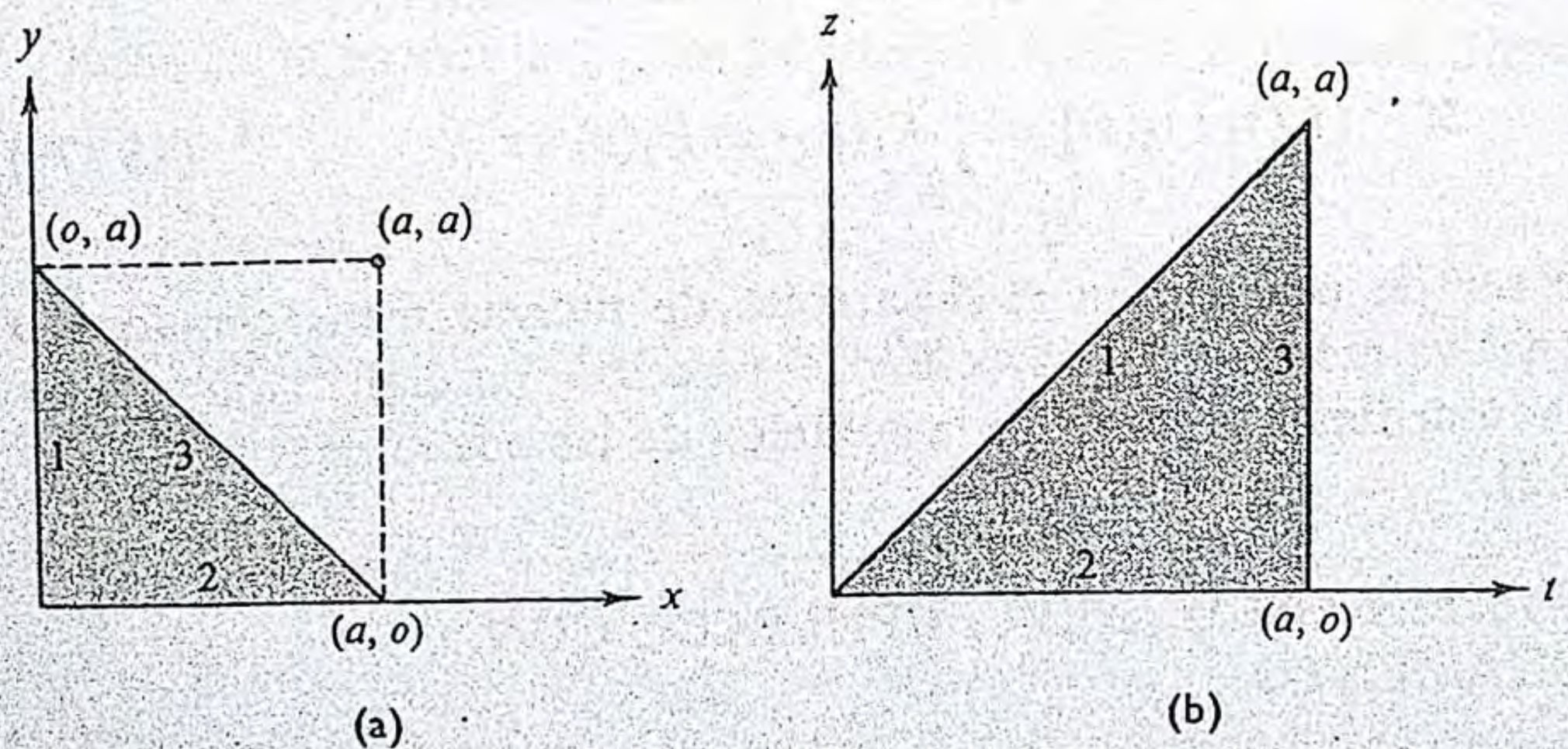


Fig. 15.11 Cambio de variables, (a) plano *xy*, (b) plano *zt*

Una derivación alternativa hace uso de la integral de Bromwich (Sección 15.11). Esto corresponde al Ejercicio 15.11.3.

al cuadrado. Esta modificación es permisible debido a que se supone que los dos *integrandos* disminuyen exponencialmente.

En el límite $a \to \infty$, la integral sobre el triángulo sin sombrear origina una contribución de cero. Sustituyendo $x = t - z$, $y = z$: la región de integración queda representada en el triángulo que se muestra en la Fig. 15.11*b*. Utilizando los jacobianos para transformar el elemento de área, se tiene

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} dt\,dz = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} dt\,dz \tag{15.175}$$

o sea $dx\,dy = dt\,dz$. Con esta sustitución, la Ec. 15.174 se transforma en

$$\begin{aligned} f_1(s) \cdot f_2(s) &= \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-st} \int_0^t F_1(t - z)\, F_2(z)\, dz\, dt \\ &= \mathscr{L}\left\{ \int_0^t F_1(t - z)\, F_2(z)\, dz \right\}. \end{aligned} \tag{15.176}$$

Por conveniencia, esta integral se representa mediante el símbolo

$$\int_0^t F_1(t - z)\, F_2(z)\, dz \equiv F_1 * F_2 \tag{15.177}$$

y se denomina convolución, lo cual es bastante similar a la convolución de Fourier (Sección 15.5). Si se sustituye $w = t - z$, se encuentra

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1, \tag{15.178}$$

demostrando que la relación es simétrica.

Obteniendo la transformada inversa, también se encuentra

$$\mathscr{L}^{-1}\{f_1(s) \cdot f_2(s)\} = \int_0^t F_1(t - z)\, F_2(z)\, dz. \tag{15.179}$$

Esto puede ser de utilidad en el desarrollo de nuevas transformadas o como alternativa para un desarrollo de fracción parcial. Una de las aplicaciones inmediatas se tiene en la solución de las ecuaciones integrales (Sección 16.2).

EJEMPLO 15.10.1 OSCILADOR IMPULSADO CON AMORTIGUAMENTO

Como una ilustración del uso del teorema de la convolución, regresemos a la masa m en un muelle, con amortiguamiento y la fuerza impulsora $F(t)$. La ecuación de movimiento (15.112) se transforma ahora en

$$m\,X''(t) + b\,X'(t) + k\,X(t) = F(t). \tag{15.180}$$

Las condiciones iniciales $X(0) = 0$, $X'(0) = 0$ se utilizan para simplificar esta ilustración y la ecuación transformada es

$$ms^2\,x(s) + bs\,x(s) + k\,x(s) = f(s) \tag{15.181}$$

o

$$x(s) = \frac{f(s)}{m} \times \frac{1}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}, \tag{15.182}$$

en donde $\omega_1^2 \equiv k/m - b^2/4m^2$, igual que antes.

Mediante el teorema de la convolución (Ec. 15.176 o 15.179),

$$X(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t F(t - z)e^{-(b/2m)z} \operatorname{sen}\omega_1 z\, dz. \tag{15.183}$$

Si la fuerza es impulsora, $F(t) = P\,\delta(t)$,[1]

$$X(t) = \frac{P}{m\omega_1} e^{-(b/2m)t} \operatorname{sen}\omega_1 t. \tag{15.184}$$

P representa el momento transferido por el impulso y la constante P/m toma el lugar de la velocidad inicial $X'(0)$.

Si $F(t) = F_0$ sen ωt, la Ec. 15.183 se puede utilizar aunque probablemente sea más adecuado un desarrollo de fracción parcial. Con

$$f(s) = \frac{F_0\omega}{s^2 + \omega^2}$$

la Ec. 15.182 se transforma en

$$x(s) = \frac{F_0\omega}{m} \times \frac{1}{s^2 + \omega^2} \times \frac{1}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}$$

$$= \frac{F_0\omega}{m}\left[\frac{a's + b'}{s^2 + \omega^2} + \frac{c's + d'}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}\right]. \tag{15.185}$$

Los coeficientes a', b', d' y d' son independientes de s. El cálculo directo indica que

$$a' = \frac{b}{m}\omega^2 + \frac{m}{b}(\omega_0^2 - \omega^2)^2,$$

$$b' = -\frac{m}{b}(\omega_0^2 - \omega^2)\left[\frac{b}{m}\omega^2 + \frac{m}{b}(\omega_0^2 - \omega^2)^2\right].$$

Ya que c' y d' originan términos decrecientes exponencialmente (transitorios), en este caso serán desechados. Efectuando la operación inversa, se

[1] Observe que $\delta(t)$ queda *dentro* del intervalo $[0, t]$.

encuentra la solución de estado estable

$$X(t) = \frac{F_0}{[b^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2]^{1/2}} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi), \tag{15.186}$$

en donde

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Diferenciando el denominador, se encuentra que la amplitud tiene un máximo cuando

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2} = \omega_1^2 - \frac{b^2}{4m^2}. \tag{15.187}$$

Esta es la condición de resonancia. En la resonancia, la amplitud se transforma en $F_0/b\omega_1$, mostrando que la masa m adquiere una oscilación infinita en la resonancia cuando el amortiguamiento se desprecia ($b = 0$). Es de hacerse notar que se tienen tres frecuencias características distintas:

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2},$$

resonancia para las oscilaciones forzadas, con amortiguamiento,

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2},$$

frecuencia de oscilación libre, con amortiguamiento.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

frecuencia de oscilación libre, sin amortiguamiento. Coinciden *tan solo* cuando el amortiguamiento es cero.

Regresando a las Ecs. 15.180 y 15.182, la Ec. 15.180 es la ecuación diferencial para la respuesta de un sistema dinámico a una fuerza de impulsión arbitraria. La respuesta final depende evidentemente tanto de la fuerza de impulsión como de las características del sistema. Esta dependencia doble se separa en el espacio de la transformada. En la Ec. 15.182, la transformada de la respuesta (salida) aparece como el producto de dos factores, uno que describe la fuerza de impulsión (entrada) y otro que describe el sistema dinámico. Esta última parte, que modifica la entrada y proporciona la salida, se denomina frecuentemente *función de transferencia*. Específicamente, $[(s + b/2m)^2 + \omega_1^2]^{-1}$ es la función de transferencia correspondiente al oscilador amortiguado. El concepto de la función de transferencia es de gran utilidad en el campo de los servomecanismos. Frecuentemente, las características de algunos servomecanismos particulares se describen al definir su función de transferencia. Siendo así, el

teorema de convolución proporciona la señal de salida para una señal de entrada particular.

EJEMPLO 15.10.2 TAUTOCRONO

Otra ilustración del teorema de la convolución la proporciona el tautócrono o problema de tiempo igual, el cual está relacionado con el famoso problema del braquistócrono (cálculo de variaciones, Sección 17.2). El problema consiste en determinar la curva que pasa a través del origen, para la cual el tiempo requerido para que una partícula se deslice hacia abajo de la curva respecto al origen (sin fricción) es *independiente* del punto de partida. La partícula comienza desde el reposo.

Mediante el principio de la conservación de la energía, la energía cinética ganada equivale a la pérdida de energía potencial,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = mg(y_0 - y), \qquad \left(\frac{d\lambda}{dt} < 0\right), \tag{15.188}$$

en donde λ es la distancia a lo largo de la curva desde el origen, m es la

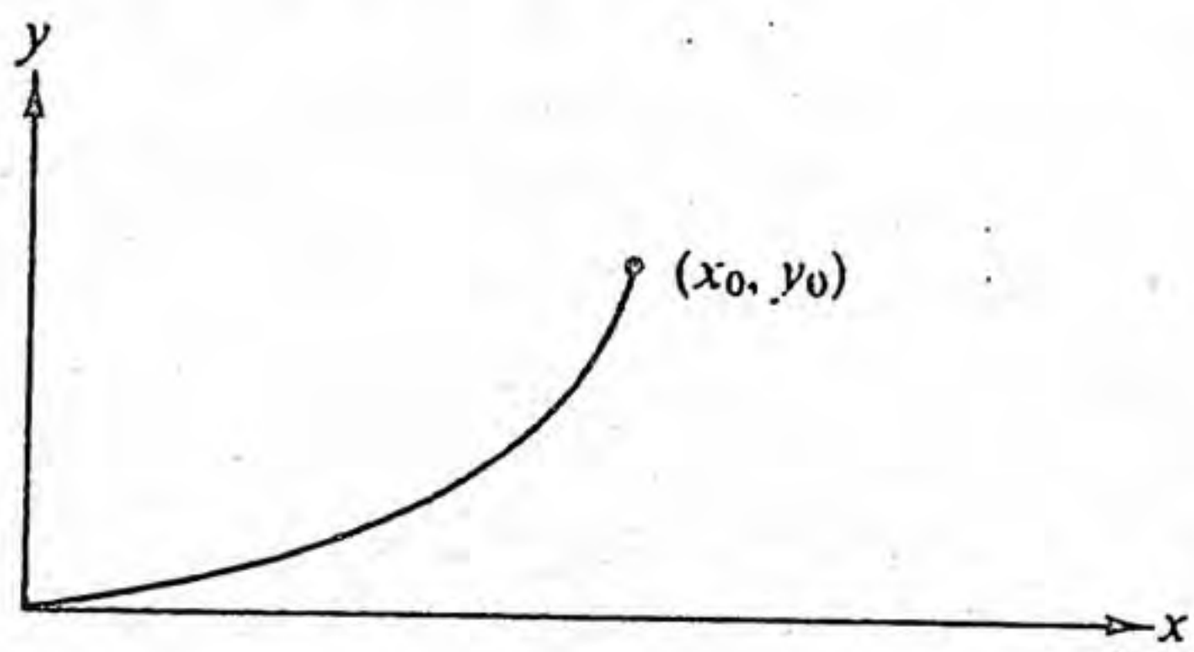


Fig. 15.12 Tautócrono

masa de la partícula y g es la aceleración de la gravedad. Siendo así,

$$\frac{-d\lambda}{\sqrt{y_0 - y}} = \sqrt{2g}\, dt. \tag{15.189}$$

Integrando desde la parte superior a la inferior (tiempo $t = 0$ hasta el tiempo $t = T$) se tiene

$$\sqrt{2g}T = -\int_{y=y_0}^{y=0} \frac{d\lambda}{\sqrt{y_0 - y}} = \int_{y=0}^{y=y_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{y_0 - y}}. \tag{15.190}$$

El tiempo de descanso, T, es constante e independiente de y_0. Ahora bien, la longitud de trayectoria λ es alguna función de la altura por ejemplo $\lambda = F(y)$ y

$$\frac{d\lambda}{dy} = F'(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \tag{15.191}$$

En consecuencia,

$$\sqrt{2g}T = \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-1/2} F'(y)\, dy$$
$$= y^{-1/2} * F'(y), \tag{15.192}$$

mediante la definición de convolución. Ya que la transformada de la convolución de dos funciones es el producto de las transformadas,

$$\sqrt{2g}T \frac{1}{s} = \mathscr{L}\{F'(y)\} \cdot \mathscr{L}\{y^{-1/2}\}$$
$$= \mathscr{L}\{F'(y)\} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{s}} \tag{15.193}$$

de acuerdo con la Ec. 15.91. Observe que $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$. En consecuencia,

$$\mathscr{L}\{F'(y)\} = \frac{\sqrt{2g}T}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \tag{15.194}$$

lo cual puede invertirse para proporcionar

$$F'(y) = \frac{\sqrt{2g}T}{\pi} y^{-1/2}. \tag{15.195}$$

Elevando al cuadrado la Ec. 15.191, se obtiene

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{c}{y}, \tag{15.196}$$

en donde

$$c = \frac{2gT^2}{\pi^2}.$$

La separación de variables proporciona

$$dx = \sqrt{\frac{c - y}{y}}\, dy, \tag{15.197}$$

lo cual queda satisfecho por

$$x = \frac{c}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta),$$
$$y = \frac{c}{2}(1 - \cos\theta), \tag{15.198}$$

las ecuaciones paramétricas para un cicloide que pasa a través del origen. La Fig. 15.13 representa el tautócrono. Este análisis demuestra que una partícula deslizante (sin fricción) hacia abajo de la curva, en el primer cuadrante, hasta la curva reflejada en el segundo cuadrante, deslizándose hacia atrás y hacia adelante, tiene un período independiente de la am-

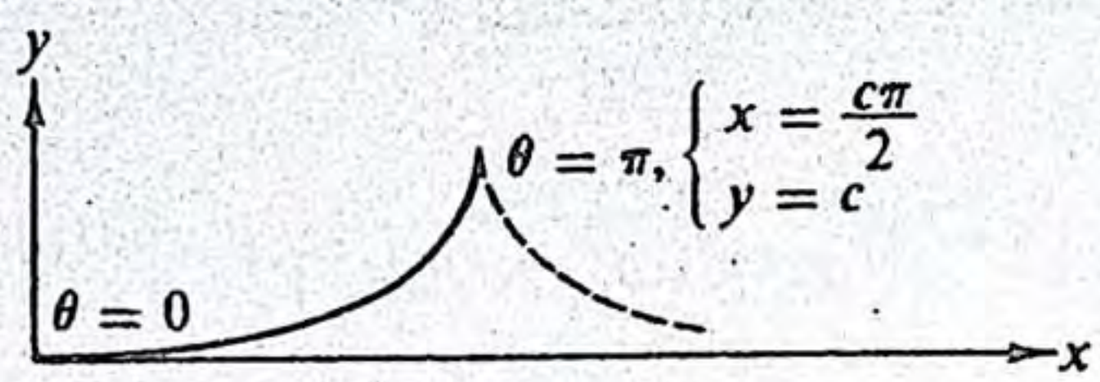


Fig. 15.13 Tautócrono, trayectoria cicloidal

plitud. La independencia de la amplitud también se podría aplicar a un péndulo cuya lenteja estuviera limitada a seguir tal trayectoria cicloidal. Algunos de los primeros relojes de péndulo con oscilaciones de gran amplitud incluyeron justamente tales restricciones cicloidales.

EJERCICIOS

15.10.1 De acuerdo con el teorema de la convolución, demuestre que

$$\frac{1}{s}f(s) = \mathscr{L}\left\{\int_0^t F(x)\,dx\right\}$$

en donde $f(s) = \mathscr{L}\{F(t)\}$.

15.10.2 Si $F(t) = t^a$ y $G(t) = t^b$,

(a) Demuestre que la convolución

$$F * G = t^{a+b+1}\int_0^1 y^a(1-y)^b\,dy.$$

(b) Mediante el uso del teorema de la convolución, demuestre que

$$\int_0^1 y^a(1-y)^b\,dy = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}.$$

Si se sustituye a por a-1 y b por $b-1$, esta es la fórmula de Euler para la función beta (Ec. 10.60).

15.10.3 Utilizando la integral de convolución calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}, \qquad a^2 \neq b^2.$$

15.10.4 Un oscilador sin amortiguamiento se impulsa por medio de la fuerza F_0 sen ωt. Encuentre el desplazamiento como una función del tiempo. Observe que consiste de una combinación lineal de dos movimientos armónicos simples, uno con la frecuencia de la fuerza de impulsión y uno con la frecuencia ω_0 del oscilador libre. (Suponga $X(0) = X'(0) = 0$).

Respuesta. $X(t) = \dfrac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\,\text{sen}\,\omega_0 t - \text{sen}\,\omega t\right)$.

15.11 Transformación Inversa de Laplace

Integral de Bromwich. Ahora se procederá a desarrollar una expresión para la transformada inversa de Laplace, $\mathscr{L}^{-1}$, que aparece en la ecuación

$$F(t) = \mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}. \tag{15.199}$$

Un procedimiento se basa en la transformada de Fourier para la cual se conoce la relación inversa. Sin embargo, existe una dificultad. La función de Fourier transformable tiene que satisfacer las condiciones de Dirichlet. En particular, se requiere que

$$\lim_{\omega \to \infty} G(\omega) = 0 \tag{15.200}$$

de modo que la integral infinita quede bien definida.[1] Ahora se desea tratar funciones, $F(t)$, que pueden ser divergentes exponencialmente. Para eliminar esta dificultad, se extrae un factor exponencial, $e^{\gamma t}$ de la función de Laplace (posiblemente) divergente y se establece

$$F(t) = e^{\gamma t}\, G(t). \tag{15.201}$$

Si $F(t)$ es divergente como $e^{\alpha t}$, se requiere que γ sea mayor que α *de modo que* $G(t)$ *sea convergente.* Ahora, con $G(t) = 0$ para $t < 0$ y restringida de cualquier modo que pueda representarse por medio de una integral de Fourier (Ec. 15.20),

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, du \int_0^{\infty} G(v) e^{-iuv} dv. \tag{15.202}$$

Utilizando la Ec. 15.201, se puede volver a establecer (Ec. 15.202)

$$F(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, du \int_0^{\infty} F(v) e^{-\gamma v} e^{-iuv}\, dv. \tag{15.203}$$

Ahora, con el cambio de variable,

$$s = \gamma + iu, \tag{15.204}$$

la integral sobre v se lleva a la forma de la transformada de Laplace

$$\int_0^{\infty} F(v) e^{-sv}\, dv = f(s); \tag{15.205}$$

s es ahora una variable compleja y $\mathscr{R}(s) \geqslant \gamma$ para garantizar la convergencia. Observe que la transformada de Laplace ha representado una función especificada en el eje real positivo sobre el plano complejo, $\mathscr{R}(s) \geqslant \gamma$.

Con γ como una constante, $ds = i\, du$. Sustituyendo la Ec. 15.205 en la Ec. 15.203, se obtiene

[1] Si se incluyen las funciones delta, $G(\omega)$ puede ser un coseno. Aun cuando esto no satisface la Ec. 15.200, $G(\omega)$ aún está limitada.

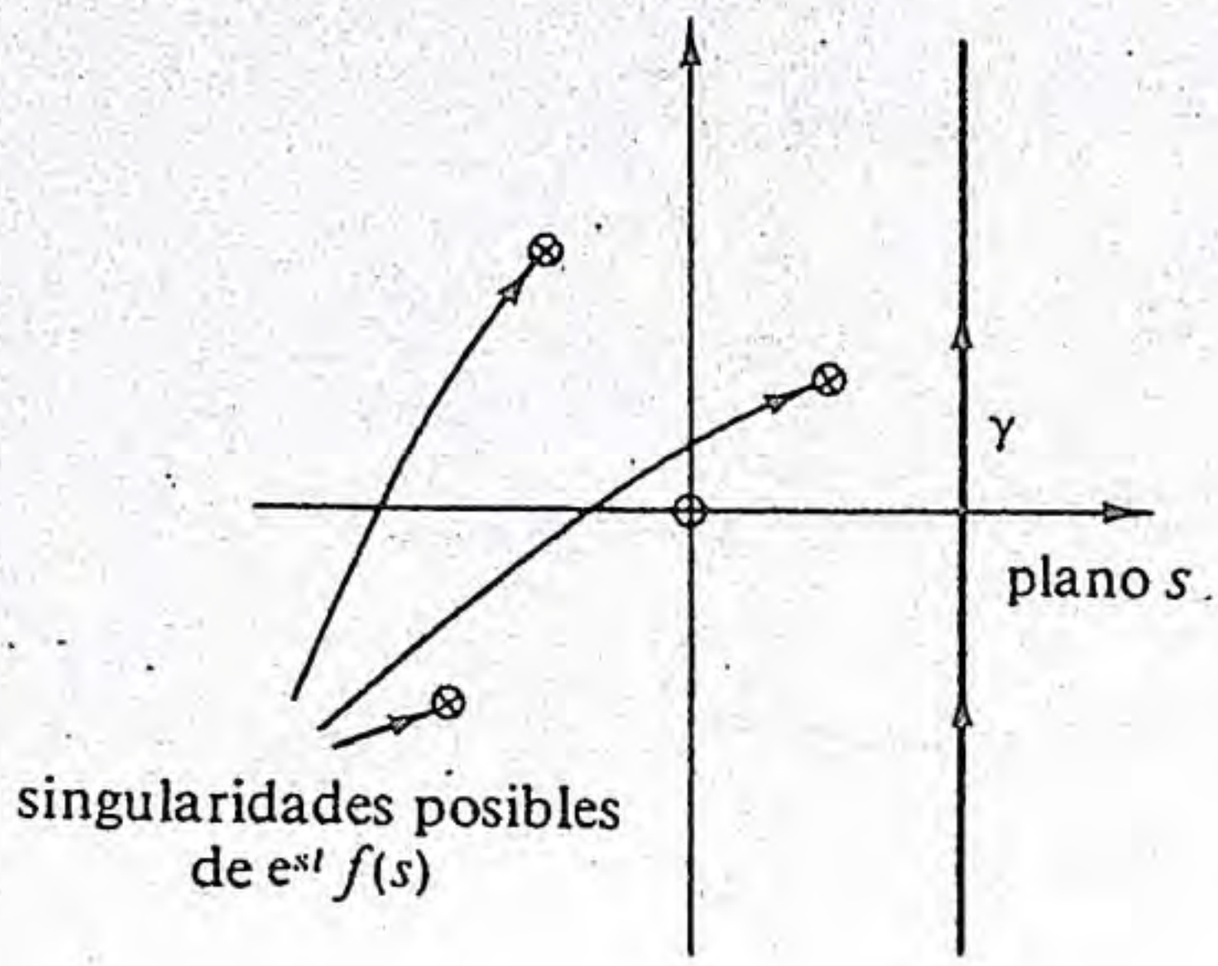


Fig. 15.14 Singularidades de $e^{st} f(s)$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s)\, ds. \tag{15.206}$$

Esta es la transformada inversa. Se ha girado la línea de integración a través de 90° (mediante el uso de $ds = i\, du$). La trayectoria se ha convertido en una línea *vertical* infinita en el plano complejo, en que la constante γ se ha seleccionado de modo que todas las singularidades de $f(s)$ se encuentren en el lado izquierdo.

La Ec. 15.206, la transformada inversa, generalmente se conoce como integral de Bromwich, aun cuando ocasionalmente se denomina teorema de Fourier-Mellin o integral de Fourier-Mellin. Esta integral puede evaluarse ahora mediante los métodos usuales de la integración de contorno (Capítulo 7). Si $t > 0$, el contorno puede cerrarse por medio de un semicírculo infinito en el plano medio izquierdo. Siendo así, mediante el teorema de los residuos (Sección 7.2).

$$F(t) = \sum \text{(residuos incluidos para } \mathscr{R}(s) < \gamma). \tag{15.207}$$

Posiblemente, este método de evaluación con $\mathscr{R}(s)$ variando a través de valores negativos pudiera parecer paradójico considerando el requerimiento previo de que $\mathscr{R}(s) \geqslant \gamma$. La paradoja desaparece cuando se recuerda que el requerimiento $\mathscr{R}(s) \geqslant \gamma$ ha sido impuesto para garantizar la convergencia de la integral de transformada de Laplace que definió a $f(s)$. Una vez obtenida $f(s)$, se puede proceder a aplicar las ventajas de sus propiedades como función analítica en el plano complejo que se quiera seleccionar. De hecho, se ha utilizado la continuación analítica para obtener $\mathscr{L}\{F(t)\}$ en el plano medio izquierdo del mismo modo que la relación de recurrencia para la función factorial ha sido utilizada para ampliar la definición de la integral de Euler (Ec. 10.5) al plano medio izquierdo.

Probablemente un par de ejemplos pueda aclarar la evaluación de la Ec. 15.206.

EJEMPLO 15.11.1

Si $f(s) = a/(s^2 - a^2)$, entonces

$$e^{st} f(s) = \frac{ae^{st}}{s^2 - a^2} = \frac{ae^{st}}{(s+a)(s-a)}. \tag{15.208}$$

Se tiene un polo simple en $s = a$, residuo $= \frac{1}{2}e^{at}$ y un segundo polo en $s = -a$, residuo $= -\frac{1}{2}e^{-at}$,

$$\sum \text{residuos} = \tfrac{1}{2}(e^{at} - e^{-at}) = \operatorname{senh} at \tag{15.209}$$

lo cual concuerda con la Ec. 15.88.

EJEMPLO 15.11.2

Si

$$f(s) = \frac{1 - e^{-as}}{s},$$

entonces se tiene

$$e^{st} f(s) = \frac{e^{st}}{s} - e^{-as}\left(\frac{e^{st}}{s}\right) \tag{15.210}$$

El primer término de la derecha tiene un polo simple en $s = 0$, residuo $= 1$. Siendo así, mediante la Ec. 15.207

$$F_1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{15.211}$$

Despreciando el signo menos y el término e^{-as}, se encuentra que el segundo término en el lado derecho tiene un polo simple en $s = 0$, residuo $= 1$. Considerando la propiedad de translación (Ec. 15.147), se tiene

$$F_2(t) = \begin{cases} 1, & t - a > 0, \\ 0, & t - a < 0. \end{cases} \tag{15.212}$$

En consecuencia,

$$F(t) = F_1(t) - F_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 < t < a, \\ 0, & t > a, \end{cases} \tag{15.213}$$

una función de etapa de altura unitaria y longitud a.

Quizás sea conveniente mencionar dos aspectos. En primer lugar estos dos ejemplos difícilmente pueden demostrar la utilidad y poderío de la integral de Bromwich. Siempre se encuentra disponible para la inversión de una transformada compleja cuando las tablas resultan inadecuadas.

En segundo lugar, esta derivación no corresponde a una de tipo rigurosa. Más bien, se ha presentado como un argumento factible aun cuando puede volverse riguroso. La determinación de la transformada inversa

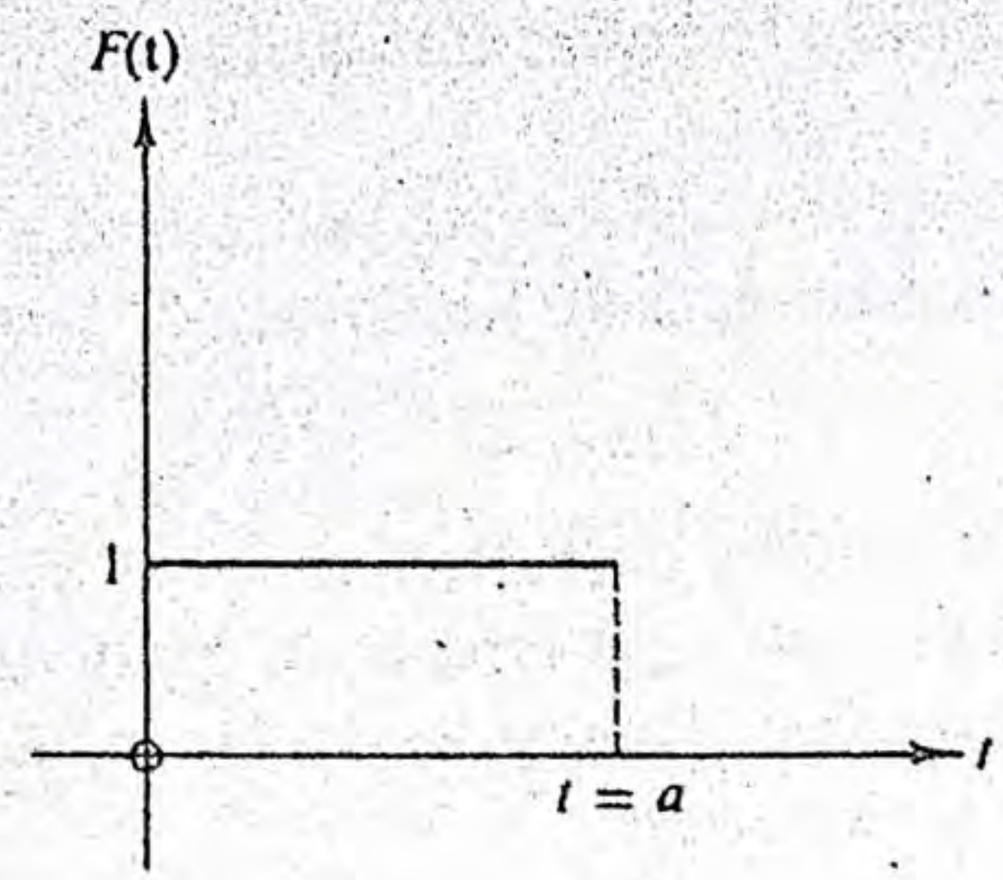


Fig. 15.15 Función de etapa de longitud finita

es algo similar a la solución de una ecuación diferencial. De hecho, tiene poca importancia la forma como se obtiene la solución. Trate de pensar en esto, si así lo desea. La solución siempre puede comprobarse sustituyendo nuevamente en la ecuación diferencial original. De modo similar, $F(t)$ puede (y, para comprobar la ausencia de errores de descuido, debe) comprobarse determinando mediante la Ec. 15.82

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s).$$

Como ilustración final del uso de la transformada inversa de Laplace, se dispone de ciertos resultados del trabajo de Brillouin y Sommerfeld (1914) en la teoría electromagnética.

EJEMPLO 15.11.3 VELOCIDAD DE LAS ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN UN MEDIO DISPERSIVO

La velocidad de grupo u de las ondas progresivas está relacionada con la velocidad de fase v por medio de la ecuación

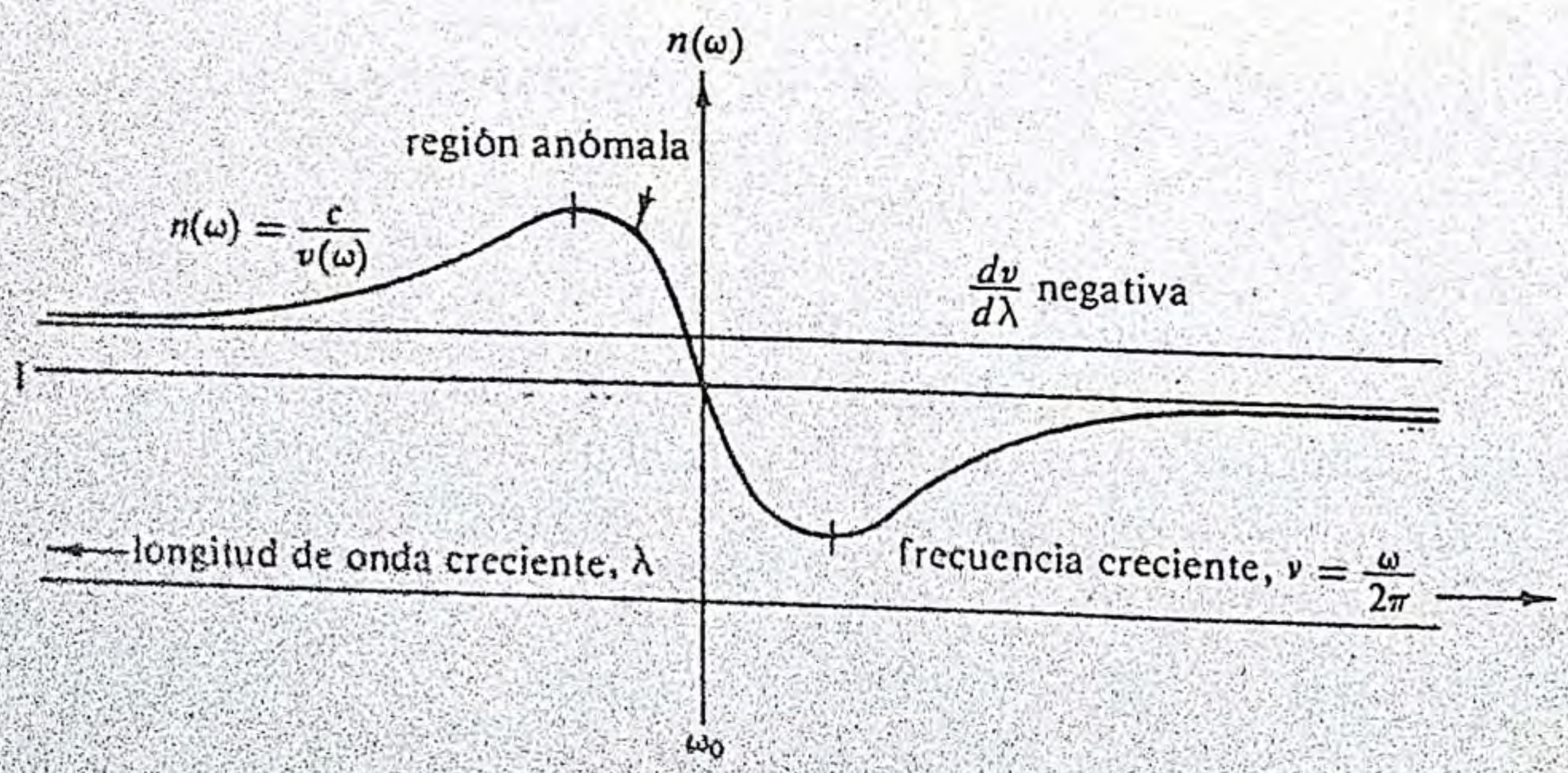


Fig. 15.16 Dispersión óptica

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \tag{15.214}$$

Aquí, λ es la longitud de onda. En las cercanías de la línea de absorción (resonancia), $dv/d\lambda$ puede ser suficientemente negativa de modo que $u > c$. La duda que inmediatamente se presenta se refiere al hecho de que si la señal se puede transmitir con mayor rapidez que c, es decir la velocidad de la luz en el vacío. Esta duda, la cual supone que una velocidad de grupo es significativa, tiene importancia fundamental para la teoría de la relatividad especial.

Se requiere de una solución para la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{15.215}$$

correspondiente a la vibración armónica que se inicia en el origen y tiempo cero. Ya que el medio es dispersivo, v es una función de la frecuencia angular. Por ejemplo, imagine una onda planar, con frecuencia angular ω, incidente en el obturador en el origen. En $t = 0$, el obturador se abre (instatáneamente) y se permite que la onda avance a lo largo del eje x positivo.

Procedamos a establecer una solución comenzando en $x = 0$. Es conveniente el uso de la integral de Cauchy

$$\psi(0, t) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st}}{s + i\omega} \, ds = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-i\omega t}, & t > 0. \end{cases} \tag{15.216}$$

El hecho de que esto es justamente la integral de Bromwich se puede verificar al observar que

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-i\omega t}, & t > 0, \end{cases} \tag{15.217}$$

y aplicando la transformada de Laplace. La función transformada $f(s)$ se convierte en

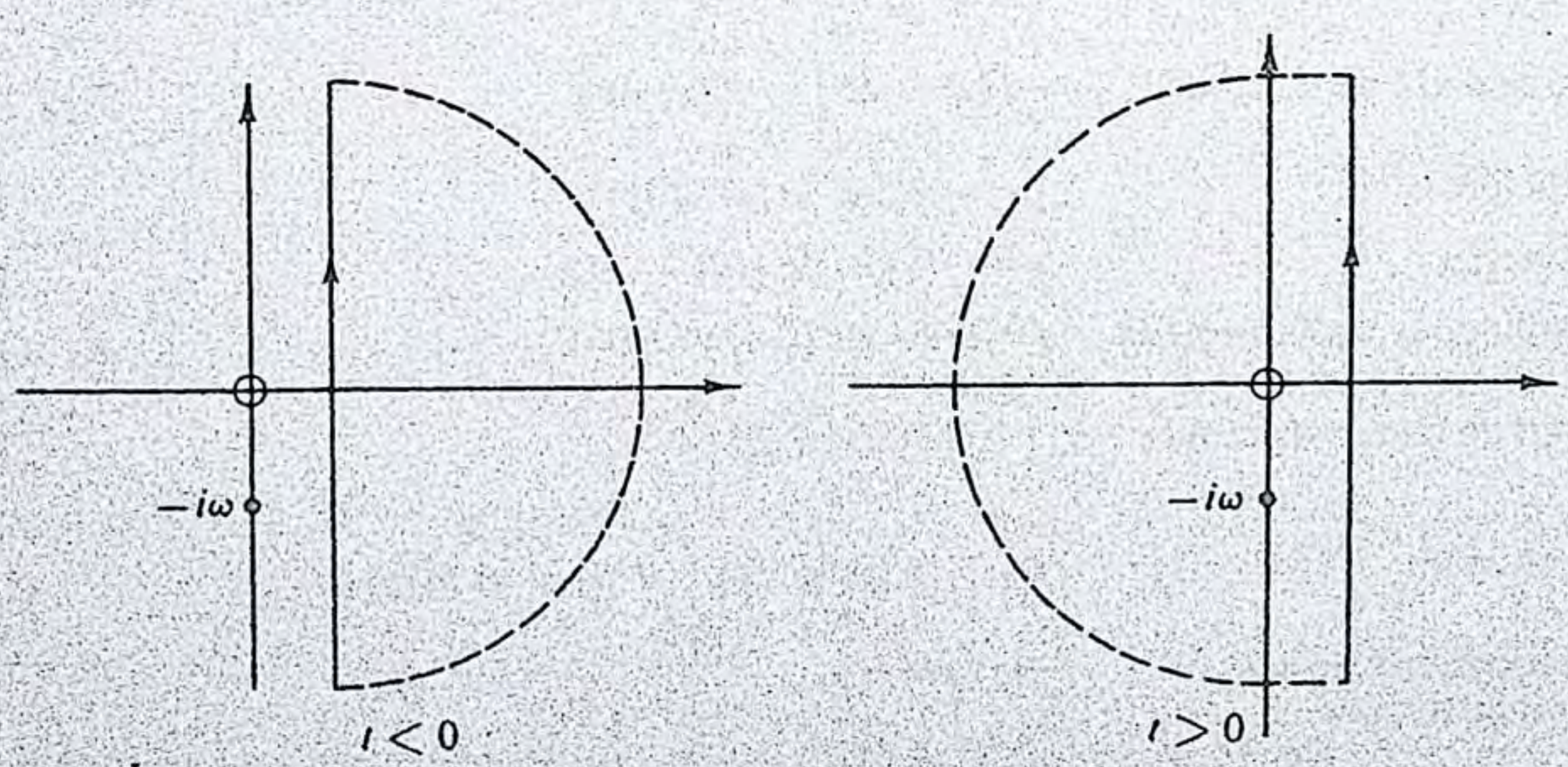


Fig. 15.17 Contornos cerrados posibles

$$f(s) = \frac{1}{s + i\omega}. \tag{15.218}$$

La integral de Cauchy-Bromwich proporciona la dependencia con respecto al tiempo de la señal que deja el origen en $t = 0$. Para incluir la dependencia con respecto al espacio, se observa que

$$e^{s(t - x/v)}$$

lo cual satisface la ecuación de onda. Considerando esto como una guía, se sustituye t por $t - x/v$ y se establece una solución

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{s(t - x/v)}}{s + i\omega}\, ds. \tag{15.219}$$

Como se recordará de la derivación de la integral de Bromwich, la variable s sustituye a ω de la transformación de Fourier. En consecuencia, la velocidad de onda v se convierte en una función de s, es decir $v(s)$. Su forma particular no necesariamente debe ser de interés. Tan solo se requiere la propiedad

$$\lim_{|s| \to \infty} v(s) = \text{constante}, \; c. \tag{15.220}$$

Esto es como lo sugiere el comportamiento asintótico de la curva en el lado derecho de la Fig. 15.16.[1]

La evaluación de la Ec. 15.219 por medio del cálculo de residuos permite la selección de la trayectoria de integración a modo de un semicírculo en el plano medio *derecho*, pero considerando que

$$t - \frac{x}{c} < 0.$$

Siendo así,

$$\psi(x, t) = 0, \qquad t - \frac{x}{c} < 0, \tag{15.221}$$

lo cual significa que la velocidad de la señal no puede exceder a la velocidad de la luz en el vacío, c. Este resultado simple pero significativo fue ampliado por Sommerfeld y Brillouin para demostrar en qué forma avanza la onda en el medio dispersivo.

[1] La Ec. 15.220 se deriva rigurosamente de la teoría de la dispersión anómala.

EJERCICIOS

15.11.1 Derive la integral de Bromwich a partir de la fórmula de la integral de Cauchy. *Sugerencia.* Aplique la transformada inversa $\mathscr{L}^{-1}$ a

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\alpha \to \infty} \int_{\gamma - i\alpha}^{\gamma + i\alpha} \frac{f(z)}{s - z}\, dz,$$

en donde $f(z)$ es analítica para $\mathscr{R}(z) \geqslant \gamma$.

15.11.2 Comenzando con

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s)\, ds,$$

demuestre que al introducir

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sz} F(z)\, dz$$

se puede convertir una integral en una representación de Fourier de una función delta de Dirac. A partir de esto, derive la transformada inversa de Laplace.

15.11.3 Derive el teorema de convolución para la transformación de Laplace mediante el uso de la integral de Bromwich.

15.11.4 Encuentre

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - k^2}\right\}$$

(a) mediante el desarrollo de fracción parcial,
(b) repita utilizando la integral de Bromwich.

15.11.5 Encuentre

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)}\right\}$$

(a) mediante el uso del desarrollo de fracción parcial,
(b) repita utilizando el teorema de convolución,
(c) repita utilizando la integral de Bromwich.

Respuesta. $F(t) = 1 - \cos kt$.

15.11.6 Utilice la integral de Bromwich para encontrar la función cuya transformada es $f(s) = s^{-1/2}$. Observe que $f(s)$ tiene un punto de ramificación en $s = 0$. El eje x negativo se puede considerar como línea de corte.

Respuesta. $F(t) = (\pi t)^{-1/2}$.

15.11.7 Demuestre que

$$\mathscr{L}^{-1}\{(s^2 + 1)^{-1/2}\} = J_0(t)$$

mediante la evaluación de la integral de Bromwich.
Sugerencia. Convierta la integral de Bromwich en una representación integral de $J_0(t)$.

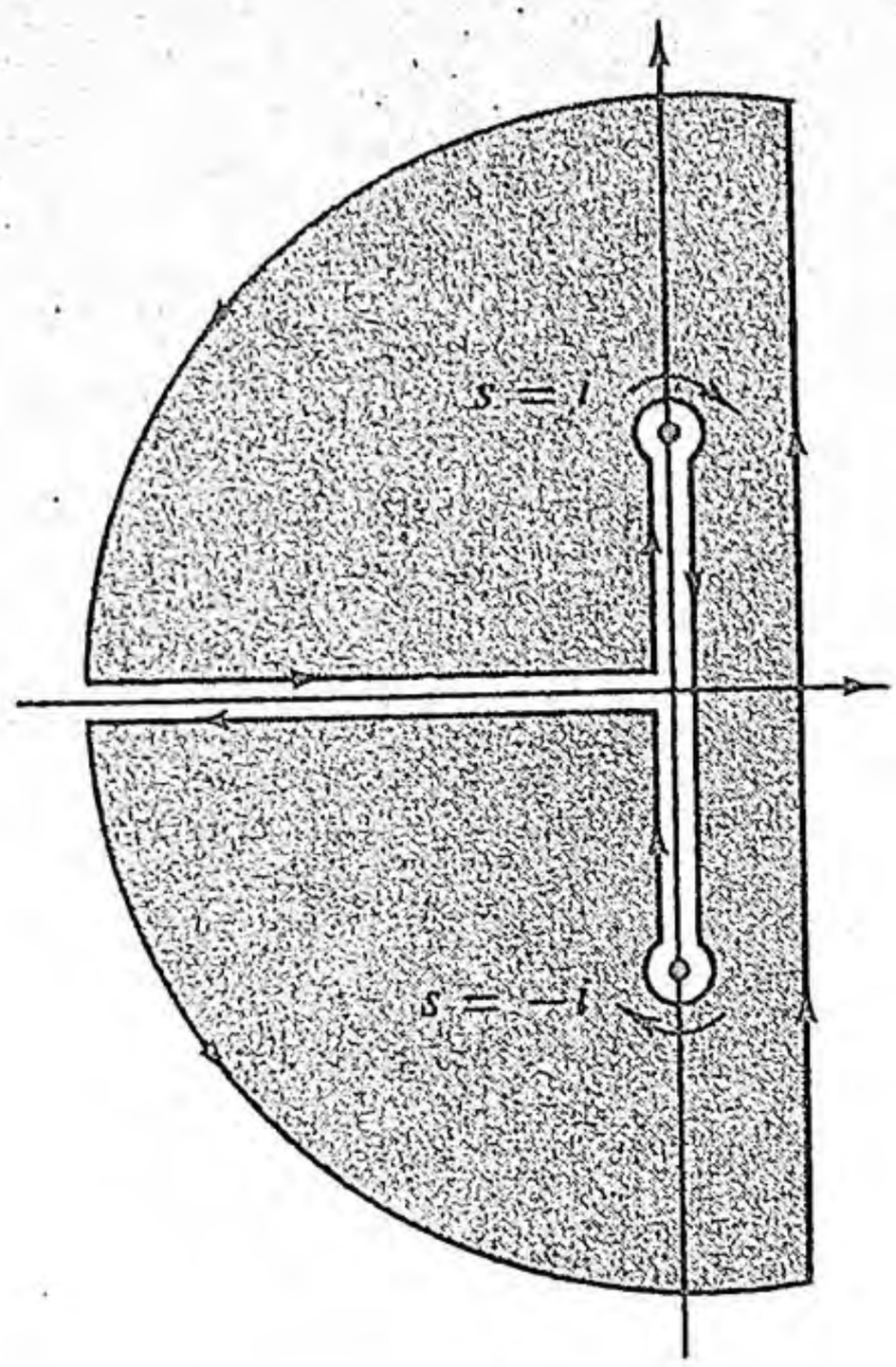


Fig. 15.18 Un contorno posible para la inversión de $J_0(t)$

TABLA 15.1

Operaciones de transformada de Laplace

Operaciones		Ecuación
1. Transformada de Laplace	$f(s) = \mathscr{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$	(15.82)
2. Transformada de derivada	$sf(s) - F(+0) = \mathscr{L}\{F'(t)\}$	(15.106)
	$s^2 f(s) - s\,F(+0) - F'(+0) = \mathscr{L}\{F''(t)\}$	
3. Transformada de integral	$\frac{1}{s} f(s) = \mathscr{L}\left\{\int_0^t F(x)\, dx\right\}$	(Ej. 15.10.1)
4. Sustitución	$f(s-a) = \mathscr{L}\{e^{at} F(t)\}$	(15.135)
5. Translación	$e^{-bs} f(s) = \mathscr{L}\{F(t-b)\}$	(15.147)
6. Derivada de la transformada	$f^{(n)}(s) = \mathscr{L}\{(-t)^n F(t)\}$	(15.156)
7. Integral de la transformada	$\int_s^\infty f(x)\, dx = \mathscr{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}$	(15.172)
8. Convolución	$f_1(s) \cdot f_2(s) = \mathscr{L}\left\{\int_0^t F_1(t-z)\, F_2(z)\, dz\right\}$	(15.176)
9. Transformada inversa, integral de Bromwich	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s)\, ds = F(t)$	(15.206)

TABLA 15.2

Transformada de Laplace

	$f(s)$	$F(t)$	Limitación	Ecuación
1.	1	$\delta(t)$	Singularidad en $+0$	(15.124)
2.	$\frac{1}{s}$	1	$s>0$	(15.85)
3.	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	$s>0$ $n>-1$	(15.91)
4.	$\frac{1}{s-k}$	e^{kt}	$s>k$	(15.86)
5.	$\frac{1}{(s-k)^2}$	te^{kt}	$s>k$	(15.158)
6.	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$\cosh kt$	$s>k$	(15.88)
7.	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$\operatorname{senh} kt$	$s>k$	(15.88)
8.	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$\cos kt$	$s>0$	(15.90)
9.	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$\operatorname{sen} kt$	$s>0$	(15.90)
10.	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	$e^{at}\cos kt$	$s>a$	(15.136)
11.	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$e^{at}\operatorname{sen} kt$	$s>a$	(15.136)
12.	$(s^2+a^2)^{-1/2}$	$J_0(at)$	$s>0$	(15.168)
13.	$(s^2-a^2)^{-1/2}$	$I_0(at)$	$s>a$	(Ej. 15.9.10)
14.	$\frac{1}{a}\cot^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)$	$j_0(at)$	$s>0$	(Ej. 15.9.11)
15.	$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2a}\ln\frac{s+a}{s-a}\\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)\end{array}\right\}$	$i_0(at)$	$s>a$	(Ej. 15.9.11)
16.	$\frac{(s-a)^n}{s^{n+1}}$	$L_n(at)$	$s>0$	(Ej. 15.9.13)
17.	$\frac{1}{s}\ln(s+1)$	$E_1(x)=-Ei(-x)$	$s>0$	(Ej. 15.9.14)
18.	$\frac{\ln s}{s}$	$-\ln t-C$	$s>0$	(Ej. 15.11.9)

En el Capitulo 29 de AMS-55 aparece una tabla más amplia de las transformadas de Laplace.

15.11.8 Evalúe la transformada inversa de Laplace

(a) $\mathscr{L}^{-1}\{(s^2 - a^2)^{-1/2}\} = I_0(at)$

(b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s - \sqrt{s^2 - a^2})^\nu}{\sqrt{s^2 - a^2}}\right\} = a^\nu I_\nu(at), \qquad \nu > -1.$

15.11.9 Demuestre que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\ln s}{s}\right\} = -\ln t - \gamma,$$

en donde $\gamma = 0.5772 \cdots$, la constante de Euler-Mascheroni.

REFERENCIAS

CARSLAW H. S. y J. C. JAEGER, *Operational Methods in Applied Mathematics.* 2a. ed., Oxford: Oxford University Press (1947). En este caso, la transformada de Laplace se desarrolla y aplica a una amplia variedad de campos en la física y la ingeniería.

ERDELYI, A., Ed., *Tables of Integral Transforms,* Volúmenes I y II. Bateman Manuscrit Project. Nueva York: McGraw-Hill, Volumen I: *Fourier, Laplace, Mellin Transforms.* Volumen II: *Hankel Transforms and Special Functions.* Una recopilación enciclopédica de las transformadas, funciones especiales y sus propiedades. Referencia de suma utilidad.

JEFFREYS, H. y B. S. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics.* 3a. ed. Cambridge: Cambridge University Press (1966).

LEPAGE, W. R., *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers.* Nueva York: McGraw-Hill (1961). El análisis de las variables complejas se desarrolla cuidadosamente y luego se aplica a las transformadas de Fourier y Laplace. Escrito para una lectura estudiantil, pero seria.

PAPOULIS, A., *The Fourier Integral and Its Applications.* Nueva York: McGraw-Hill (1962). Un desarrollo riguroso de las transformadas de Fourier y Laplace. Amplias aplicaciones en la ciencia y la ingeniería.

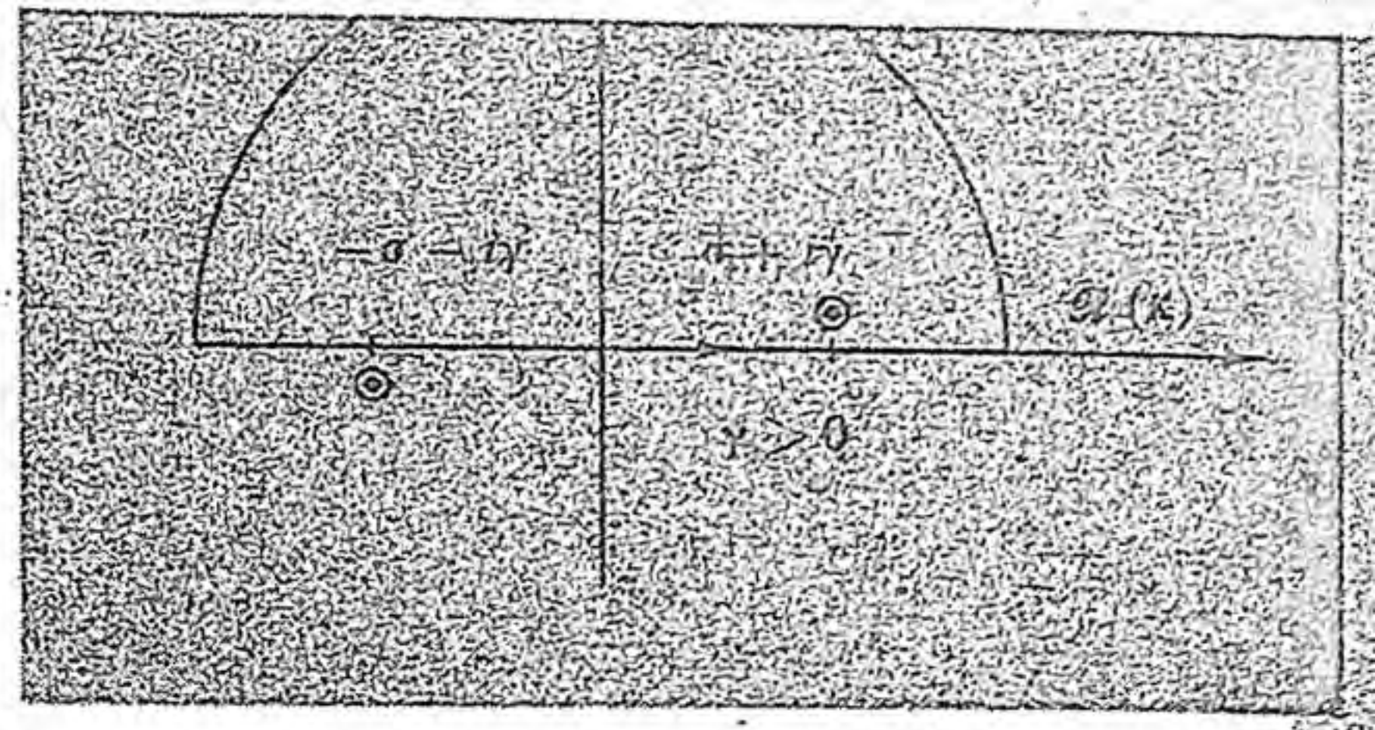
SCOTT, E. J., *Transform Calculus with an Introduction to Complex Variables.* Nueva York: Harper (1955). Se da una gran importancia a la transformada de Laplace. La integración de contorno para la variable compleja se desarrolla y se utiliza extensamente.

SNEDDON, I. N., *Fourier Transforms.* Nueva York: McGraw-Hill (1951). Un tratado amplio y detallado que incluye una gran cantidad de aplicaciones a una amplia variedad de campos de la física moderna y clásica.

TITCHMARSH, E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals.* Oxford: Oxford University Press (1948). Un tratado amplio de las integrales de Fourier y las transformadas integrales relacionadas.

TRANTER, C. J., *Integral Transforms in Mathematical Physics,* 2a. ed. Londres: Methuen, Nueva York: Wiley (1951). Un trabajo breve y conciso pero de utilidad que abarca las transformadas de Laplace, Fourier, Hankel y Mellin, así como sus inversas.

VAN DER POL, B. y H. BREMMER, *Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral.* 2a. ed. Cambridge: Cambridge University Press (1955). Este es un desarrollo basado en el intervalo de integral $-\infty$ a $+\infty$, más bien que en el usual de 0 a $+\infty$. El Capítulo V contiene un estudio detallado de la función delta de Dirac (función de impulso).



CAPITULO 16

ECUACIONES INTEGRALES

16.1 Introducción

A excepción de las transformadas de integral del último capítulo, hemos considerado las ecuaciones con relaciones entre la función desconocida $\varphi(x)$ y una o más de sus derivadas. Ahora procederemos a investigar las ecuaciones que contienen la función desconocida dentro de una integral. Estas ecuaciones se clasifican en dos formas:

1. Si los límites de integración son fijos, la ecuación se denomina ecuación de Fredholm; si uno de los límites es variable, es una ecuación de Volterra.

2. Si la función desconocida aparece *solamente* bajo el signo de la integral, se denomina de "primera clase". Si aparece tanto en el interior como en el exterior de la integral, se denomina de "segunda clase".

Definiciones. Simbólicamente se tienen
La ecuación de Fredholm de primera clase:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{16.1}$$

Ecuación de Fredholm de segunda clase:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{16.2}$$

 Ecuación de Volterra de primera clase:

$$f(x) = \int_a^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{16.3}$$

Ecuación de Volterra de segunda clase:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{16.4}$$

En los cuatro casos, $\varphi(t)$ es la función desconocida. $K(x, t)$, que se designará núcleo, y $f(x)$ se suponen conocidas. Cuando $f(x) = 0$, se dice que la ecuación es homogénea.

Quizás el lector se preguntará, con cierta justificación, por qué habríamos de preocuparnos por las ecuaciones integrales. Después de todo, las ecuaciones diferenciales han logrado hacer un trabajo más bien satisfactorio en cuanto a la descripción de nuestro mundo hasta ahora. Existen dos razones para introducir aquí las ecuaciones integrales.

En primer lugar, hemos dado una gran importancia a la solución de las ecuaciones diferenciales *sujetas a condiciones limitantes particulares*. Por ejemplo, la condición limitante en $r = 0$ determina que la función de Neumann $N_n(r)$ se encuentre presente cuando se resuelve la ecuación de Bessel. La condición limitante para $r \to \infty$ determina el hecho de que $I_n(r)$ se encuentre presente en la solución de la ecuación de Bessel modificada. La ecuación de integral relaciona la función desconocida no solamente con sus valores en los puntos vecinos (derivadas) sino también con sus valores a través de una región, incluyendo la limitante. En un sentido bastante realista, las condiciones limitantes se incorporan en la ecuación integral más que ser impuestas en la etapa final de la solución. Como posteriormente se describe, cuando se construyen los núcleos (Sección 16.5), la forma del núcleo depende de los valores en los límites. En consecuencia, la ecuación integral es compacta y puede transformarse en una forma más conveniente y poderosa que la ecuación diferencial. En segundo lugar, independientemente de que nos guste o no, existen ciertos problemas, tales como algunos de los fenómenos de difusión y transporte, que no pueden representarse por medio de las ecuaciones diferenciales. Si se desea resolver tales problemas, nos vemos forzados a utilizar las ecuaciones integrales. Un ejemplo más importante de esta clase de situaciones físicas se presenta a continuación.

EJEMPLO 16.1.1 TEORIA DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES. ECUACION DE BOLTZMANN

La ecuación fundamental de la teoría del transporte de neutrones es una expresión de la ecuación de continuidad para los neutrones:

$$\text{producción} = \text{pérdidas} + \text{fugas}.$$

Bajo el concepto de producción se tienen varias fuentes

$$S(v, \Omega, \mathbf{r})dv\, d\Omega$$

representando la introducción de S neutrones por centímetro cúbico por segundo con *velocidades* entre v y $v + dv$ y la dirección de movimiento Ω dentro del ángulo sólido $d\Omega$.

Una fuente adicional la proporcionan las colisiones de dispersión que *dispersan* los neutrones dentro de los intervalos justamente mencionados. La tasa de dispersión está definida por

$$\sum_s (v, v', \Omega, \Omega')\, \varphi(v', \Omega', \mathbf{r}),$$

en donde $\sum_s$ es la probabilidad (macroscópica) de que un neutrón de velocidad v', dirección Ω', sea dispersado con la velocidad resultante v, dirección Ω. La cantidad $\varphi(v', \Omega', \mathbf{r})$ es el flujo de neutrones. Expresado como vector, $\boldsymbol{\varphi} = \Omega\varphi$ tiene la dirección de la velocidad neutrónica y una magnitud igual al número de neutrones por segundo de velocidad v que cruzan el área unitaria en la posición $\mathbf{r}$ y en la dirección Ω (Fig. 16.1).

La integración con respecto a las velocidades iniciales disponibles (v') y sobre todas las direcciones (Ω'), proporciona

$$\iint \sum_s (v, v', \Omega, \Omega')\, \varphi(v', \Omega', \mathbf{r})\, dv'\, d\Omega'$$

para el segundo término de producción.

Las pérdidas proceden de las fugas definidas por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(v, \Omega, \mathbf{r})$$

y de la absorción y dispersión hacia otro intervalo de velocidad (menor). Estas son

$$\left[\sum_a (v) + \sum_s (v)\right]\varphi(v, \Omega, \mathbf{r}).$$

Si el medio no es homogéneo e isotrópico, los términos $\sum$ pueden tener una dependencia de la posición y la dirección además de la dependencia indicada en cuanto a la velocidad y la energía.

Finalmente, la ecuación de continuidad se transforma en

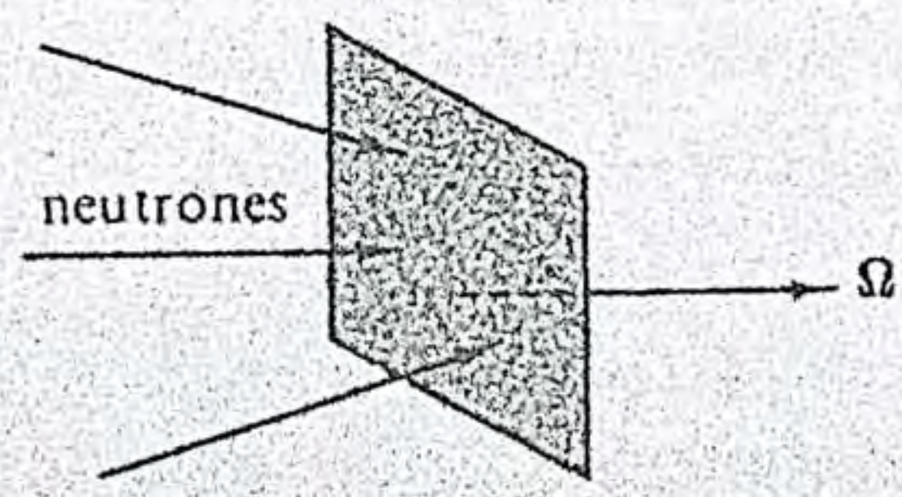


Fig. 16.1 Flujo de neutrones

$$\iint \sum_a (v, v', \Omega, \Omega')\, \varphi(v', \Omega', \mathbf{r})\, dv'\, d\Omega' + S(v, \Omega, \mathbf{r})$$
$$= \nabla \cdot \varphi(v, \Omega, \mathbf{r}) + \left[\sum_a (v) + \sum_s (v)\right] \varphi(v, \Omega, \mathbf{r}). \tag{16.5}$$

Esta es la ecuación de estado uniforme de Boltzmann, o sea una ecuación integro-diferencial. En esta forma, la ecuación de Boltzmann resulta casi imposible de manejar. Gran parte de la teoría del transporte de neutrones consiste en el desarrollo de métodos que constituyen compromisos entre la precisión física y la factibilidad matemática.[1]

La ecuación integral también puede aparecer como tema de una selección deliberada con base en la conveniencia o la necesidad del poderío matemático de la formulación con una ecuación integral.

EJEMPLO 16.1.2 REPRESENTACION DEL MOMENTO EN LA MECANICA CUANTICA

La ecuación de Schrödinger (en la representación de espacio ordinario) es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r}) = E\, \psi(\mathbf{r}) \tag{16.6}$$

o

$$(-\nabla^2 + a^2)\, \psi(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r}) \tag{16.7}$$

en donde

$$a^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E,$$

$$v(\mathbf{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}).$$

La Ec. 16.7 se puede generalizar a la forma

$$(-\nabla^2 + a^2)\, \psi(\mathbf{r}) = \int v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \psi(\mathbf{r}')\, d^3x'. \tag{16.8}$$

Para el caso especial de

$$v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = v(\mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{16.9}$$

lo cual representa la interacción local, la Ec. 16.8 se reduce a la Ec. 16.7. La Ec. 16.8 se somete ahora a la transformada de Fourier (cf. Sección 15.6).

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^3x. \tag{16.10}$$

[1] Cf. *Reactor Handbook*, 2a. ed., Vol. III, Parte A, *Physics*, H. Soodak, Ed. Nueva York; Interscience Publishers (1962). Cf. Capítulo 3.

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^3k.$$

En este caso se ha introducido la abreviación

$$\frac{\mathbf{p}}{\hbar} = \mathbf{k} \qquad (2\pi \times \text{número de onda}) \tag{16.11}$$

Desarrollando la Ec. 16.10 se obtiene

$$\int (-\nabla^2 + a^2)\, \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^3x = \iint v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \psi(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^3x'\, d^3x. \tag{16.12}$$

Observe que ∇^2 en la izquierda opera solamente en $\psi(\mathbf{r})$. Integrando el lado izquierdo por partes y sustituyendo la Ec. 16.10 para $\psi(\mathbf{r}')$ en la derecha,

$$\begin{aligned}\int (k^2 + a^2)\, \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^3x &= (2\pi)^{3/2}(k^2 + a^2)\, \Phi(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \Phi(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')}\, d^3x'\, d^3x\, d^3k'.\end{aligned} \tag{16.13}$$

Si se utiliza

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')}\, d^3x'\, d^3x, \tag{16.14}$$

la Ec. 16.13 se transforma en

$$(k^2 + a^2)\, \Phi(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \Phi(\mathbf{k}')\, d^3k', \tag{16.15}$$

es decir una ecuación de Fredholm homogénea de segunda clase en que el parámetro a^2 corresponde al valor propio.

Para el caso especial pero importante de la interacción local, la aplicación de la Ec. 16.9 origina

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = f(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{16.16}$$

Esta es nuestra representación del momento equivalente a un potencial de interacción estático ordinario en el espacio ordinario. La función de momento $\Phi(\mathbf{k})$ satisface la ecuación integral (Ec. 16.15). Hay que enfatizar que a través de todo esto se ha supuesto la existencia de las integrales de Fourier requeridas. Para un potencial de oscilador lineal, $V(\mathbf{r}) = r^2$, las integrales requeridas no existen. La Ec. 16.10 daría lugar a las oscilaciones divergentes y no se tendría la Ec. 16.15.

Frecuentemente existe la oportunidad de una selección. El problema físico se puede representar por medio de una ecuación diferencial o una ecuación integral. Supongamos que se tiene la ecuación diferencial y que se desea transformar la misma en una ecuación integral. Comenzando con una ecuación diferencial de segundo orden *lineal*

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = g(x) \tag{16.17}$$

con las condiciones iniciales

$$y(a) = y_0,$$
$$y'(a) = y_0',$$

se integra para obtener

$$y' = -\int_a^x Ay'\,dx - \int_a^x By\,dx + \int_a^x g\,dx + y_0'. \tag{16.18}$$

Integrando la primera integral en la derecha por partes se obtiene

$$y' = -Ay - \int_a^x (B - A')y\,dx + \int_a^x g\,dx + A(a)y_0 + y_0'. \tag{16.19}$$

Observe la forma en que las condiciones iniciales son absorbidas en la nueva versión. Integrando por segunda vez se obtiene

$$y = -\int_a^x Ay\,dx - \int_a^x\int_a^x [B(t) - A'(t)]y(t)\,dt\,dx$$
$$+ \int_a^x\int_a^x g(t)\,dt\,dx + [A(a)y_0 + y_0'](x - a) + y_0. \tag{16.20}$$

Para transformar esta ecuación en una forma más evidente, se utiliza la relación

$$\int_a^x\int_a^x f(t)\,dt\,dx = \int_a^x (x - t)f(t)\,dt. \tag{16.21}$$

Esto puede verificarse mediante la diferenciación de ambos lados. Ya que las derivadas son iguales, la expresión original solamente puede diferir por una constante. Permitiendo que $x \to a$, la constante desaparece y la Ec. 16.21 queda establecida. Aplicando esto a la Ec. 16.20

$$y(x) = -\int_a^x \{A(t) + (x - t)[B(t) - A'(t)]\}\,y(t)\,dt$$
$$+ \int_a^x (x - t)\,g(t)\,dt + [A(a)y_0 + y_0'](x - a) + y_0. \tag{16.22}$$

Si ahora se introducen las abreviaciones

$$K(x, t) = (t - x)[B(t) - A'(t)] - A(t),$$
$$f(x) = \int_a^x (x - t)\,g(t)\,dt + [A(a)y_0 + y_0'](x - a) + y_0, \tag{16.23}$$

la Ec. 16.22 se transforma en

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\, y(t)\, dt, \tag{16.24}$$

lo cual es la ecuación de Volterra de segunda clase.

EJEMPLO 16.1.3

A modo de ilustración simple considere la ecuación del oscilador lineal

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{16.25}$$

con

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1.$$

Esto proporciona

$$A(x) = 0,$$

$$B(x) = \omega^2,$$

$$g(x) = 0,$$

y la ecuación integral se transforma en

$$y(x) = x + \omega^2 \int_0^x (t - x) y(t)\, dt. \tag{16.26}$$

El lector podrá demostrar que esto se satisface por $y(x) = (1/\omega)$ sen ωx.

Se puede volver a considerar la ecuación del oscilador lineal (16.25), pero ahora con las condiciones limitantes

$$y(0) = 0,$$

$$y(b) = 0.$$

Ya que $y'(0)$ no está definida, se debe modificar el procedimiento. La primera integración proporciona

$$y' = -\omega^2 \int_0^x y\, dx + y'(0). \tag{16.27}$$

Integrando por segunda vez y utilizando nuevamente la Ec. 16.21 se tiene

$$y = -\omega^2 \int_0^x (x - t) y(t)\, dt + y'(0) x. \tag{16.28}$$

Ahora se impone la condición $y(b) = 0$. Esto proporciona

$$\omega^2 \int_0^b (b - t)\, y(t)\, dt = b y'(0). \tag{16.29}$$

Sustituyendo nuevamente en la Ec. 16.28 se obtiene

$$y(x) = -\omega^2 \int_0^x (x - t)\, y(t)\, dt + \omega^2 \frac{x}{b} \int_0^b (b - t) y(t)\, dt. \tag{16.30}$$

Ahora se procede a dividir el intervalo $[0, b]$ en dos intervalos $[0, x]$ y $[x, b]$. Ya que

$$\frac{x}{b}(b - t) - (x - t) = \frac{t}{b}(b - x), \tag{16.31}$$

se encuentra que

$$y(x) = \omega^2 \int_0^x \frac{t}{b}(b - x)\, y(t)\, dt + \omega^2 \int_x^b \frac{x}{b}(b - t)\, y(t)\, dt. \tag{16.32}$$

Finalmente, si se define un núcleo

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{b}(b - x), & t < x, \\ \dfrac{x}{b}(b - t), & x < t, \end{cases} \tag{16.33}$$

se tiene

$$y(x) = \omega^2 \int_0^b K(x, t)\, y(t)\, dt, \tag{16.34}$$

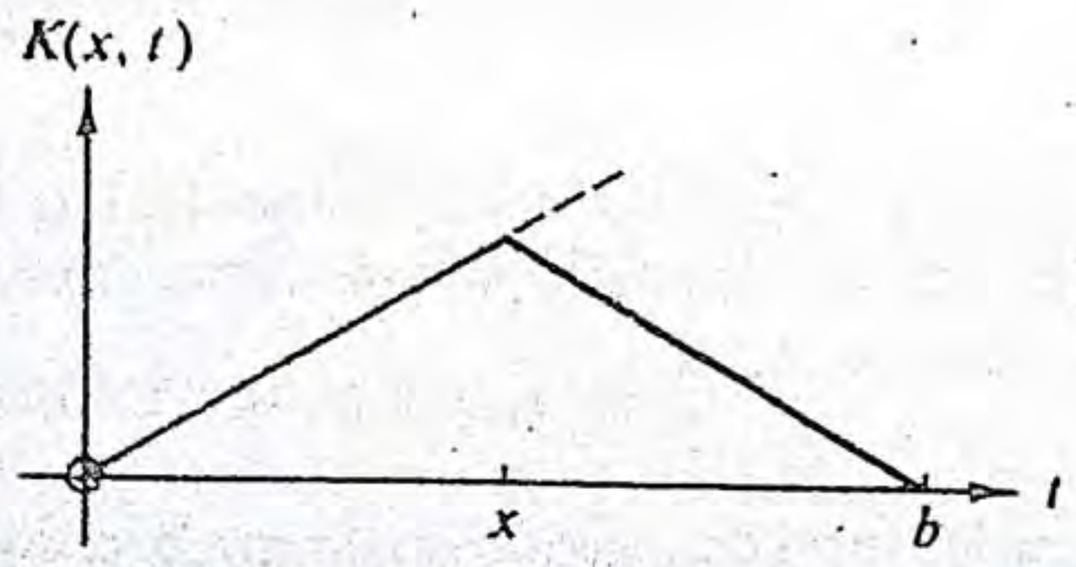


Fig. 16.2

es decir una ecuación de Fredholm homogénea de segunda clase.

El nuevo núcleo, $K(x, t)$, tiene algunas propiedades interesantes.

1. Es simétrico, $K(x, t) = K(t, x)$.
2. Es continuo en el sentido de que

$$\left.\frac{t}{b}(b - x)\right|_{t=x} = \left.\frac{x}{b}(b - t)\right|_{t=x}$$

3. Su derivada con respecto a t es *discontinua*. A medida que t aumenta a través del punto $t = x$, existe la discontinuidad de -1 en $\partial K(x, t)/\partial t$.

Regresaremos a estas propiedades en la Sección 16.5, en que $K(x, t)$ se identifica como una función de Green.

EJERCICIOS

16.1.1 Derive la ecuación integral de Volterra correspondiente a

(a) $y''(x) - y(x) = 0; \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$

Respuesta. $y = \int_0^x (x - t)y(t)dt + x.$

(b) $y''(x) - y(x) = 0; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1.$

Respuesta. $y = \int_0^x (x - t)y(t)dt - x + 1.$

16.1.2 Derive la ecuación integral de Fredholm correspondiente a

$$y''(x) - y(x) = 0; \qquad y(1) = 1, \quad y(-1) = 1,$$

(a) mediante la doble integración,
(b) mediante la formación de la función de Green.

Respuesta. $y(x) = 1 - \int_{-1}^{1} K(x, t)y(t)dt,$

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - x)(t + 1), & x > t, \\ \frac{1}{2}(1 - t)(x + 1), & x < t. \end{cases}$$

16.1.3 (a) Comenzando con las respuestas del Ejercicio 16.1.1, diferencie y recupere las ecuaciones diferenciales originales *y las condiciones limitantes.*
(b) Repita para el Ejercicio 16.1.2.

16.1.4 La ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes es

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0.$$

Disponiendo de las condiciones limitantes

$$y(0) = y(1) = 0,$$

integre dos veces y desarrolle la ecuación integral

$$y(x) = \int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, dt$$

con

$$K(x, t) = \begin{cases} a_2 t(1 - x) + a_1(x - 1), & t < x, \\ a_2 x(1 - t) + a_1 x, & x < t. \end{cases}$$

Observe que $K(x, t)$ es simétrica y continua si $a_1 = 0$. ¿En qué forma está relacionado esto con la propiedad autoadjunta de la ecuación diferencial?

16.2 Transformadas Integrales, Funciones Generadoras

Aun cuando no existe un método general disponible para la inversión de las ecuaciones integrales, ciertos casos especiales pueden tratarse por medio de las *transformadas integrales* (Capítulo 15). Por conveniencia, estas se incluyen aquí. Si

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, \varphi(t)\, dt,$$

entonces

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\, \psi(t)\, dt \qquad \text{(Fourier).} \tag{16.35}$$

Si

$$\psi(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-xt}\, \varphi(t)\, dt,$$

entonces

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{xt}\, \psi(t)\, dt \qquad \text{(Laplace).} \tag{16.36}$$

Si

$$\psi(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1}\, \varphi(t)\, dt,$$

entonces

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} x^{-t}\, \psi(t)\, dt \qquad \text{(Mellin).} \tag{16.37}$$

Si

$$\psi(x) = \int_{0}^{\infty} t\, \varphi(t)\, J_\nu(xt)\, dt,$$

entonces

$$\varphi(x) = \int_{0}^{\infty} t\, \psi(t)\, J_\nu(xt)\, dt \qquad \text{(Hankel).} \tag{16.38}$$

De hecho, la utilidad de la técnica de la transformada integral es algo más amplia que estas cuatro formas más bien especializadas.

EJEMPLO 16.2.1 SOLUCION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Consideremos la ecuación de Fredholm de primera clase con un núcleo del tipo general $k(x - t)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{16.39}$$

en donde $\varphi(t)$ es la función desconocida. *Suponiendo la existencia de la transformada requerida,* se aplica el teorema de la convolución de Fourier

(Sección 15.5) para obtener

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,\Phi(t)e^{-ixt}\,dt. \tag{16.40}$$

Las funciones $K(t)$ y $\Phi(t)$ son las transformadas de Fourier de $k(x)$ y $\varphi(x)$, respectivamente. Invirtiendo por medio de la Ec. 16.35, se tiene

$$K(t)\,\Phi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixt}\,dx = \frac{F(t)}{\sqrt{2\pi}}. \tag{16.41}$$

Siendo así,

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{F(t)}{K(t)}, \tag{16.42}$$

e invirtiendo nuevamente se tiene

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{K(t)}\,e^{-ixt}\,dt. \tag{16.43}$$

Para una justificación rigurosa de este resultado se invita al lector a seguir a Morse y Feshbach a través de los planos complejos. Una extensión de esta solución por transformación aparece en el Ejercicio 16.2.1.

EJEMPLO 16.2.2 ECUACION DE ABEL GENERALIZADA, TEOREMA DE LA CONVOLUCION

En la Scción 15.10 se han utilizado las transformadas de Laplace para resolver la ecuación integral del problema tautócrono. Generalizando en una forma tosca, la ecuación integral se indica a modo de

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt, \qquad 0 < \alpha < 1, \quad \text{con} \begin{cases} f(x) & \text{conocida,} \\ \varphi(t) & \text{desconocida.} \end{cases} \tag{16.44}$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f(x)\} &= \mathscr{L}\left\{\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt\right\} \\ &= \mathscr{L}\{x^{-\alpha}\}\mathscr{L}\{\varphi(x)\}, \end{aligned} \tag{16.45}$$

en donde la última etapa se deriva del teorema de convolución de Laplace (Sección 15.10). Siendo así,

$$\mathscr{L}\{\varphi(x)\} = \frac{s^{1-\alpha}\mathscr{L}\{f(x)\}}{(-\alpha)!}. \tag{16.46}$$

 Dividiendo entre s, se obtiene

$$\frac{1}{s}\mathscr{L}\{\varphi(x)\} = \frac{s^{-\alpha}\mathscr{L}\{f(x)\}}{(-\alpha)!}$$

$$= \frac{\mathscr{L}\{x^{\alpha-1}\}\mathscr{L}\{f(x)\}}{(\alpha-1)!(-\alpha)!}. \tag{16.47}$$

Combinando los factoriales (Ec. 10.32) y aplicando el teorema de convolución de Laplace nuevamente, se descubre que

$$\frac{1}{s}\mathscr{L}\{\varphi(x)\} = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\mathscr{L}\left\{\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt\right\}. \tag{16.48}$$

Invirtiendo con la ayuda del Ejercicio 15.10.1, se obtiene

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt, \tag{16.49}$$

y finalmente por medio de la diferenciación

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt. \tag{16.50}$$

La solución de la ecuación de Abel en la Sección 15.10 constituye un caso especial ($\alpha = \frac{1}{2}$).

Funciones Generadoras. Ocasionalmente, el lector podrá encontrar las ecuaciones integrales que implican a las funciones generadoras. Suponga que se tiene el caso admisiblemente especial

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{(1-2xt+x^2)^{1/2}}\,dt, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{16.51}$$

Se observan dos características especiales:

1. $(1-2xt+x^2)^{-1/2}$ genera los polinomios de Legendre.
2. $[-1, 1]$ es el intervalo ortogonal para los polinomios de Legendre.

Si ahora se procede a desarrollar el denominador (propiedad 1) y se supone que el término desconocido $\varphi(t)$ se puede indicar como una serie de estos mismos polinomios de Legendre,

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t) \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t) x^r\,dt \tag{16.52}$$

mediante la utilización de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre (propiedad 2),

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2a_r}{2r+1} x^r. \tag{16.53}$$

Los términos a_n se pueden identificar al diferenciar n veces y luego estableciendo $x = 0$.

$$f^{(n)}(0) = n! \frac{2}{2n+1} a_n. \tag{16.54}$$

En consecuencia,

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} P_n(t). \tag{16.55}$$

Se pueden obtener resultados similares con las otras funciones generadoras (cf. Ejercicio 16.2.5). De hecho, la técnica de desarrollar en una serie de funciones especiales también se encuentra disponible. Es conveniente su aplicación cuando existe la posibilidad del desarrollo (y en caso conveniente) y cuando el intervalo es apropiado.

EJERCICIOS

16.2.1 El núcleo de una ecuación de Fredholm de segunda clase,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

es de la forma $k(x-t)$.[1] Suponiendo la existencia de las transformadas requeridas, demuestre que

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t) e^{-ixt}\, dt}{1 - \sqrt{2\pi}\, \lambda K(t)}.$$

$F(t)$ y $K(t)$ son las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $k(x)$, respectivamente.

16.2.2 El núcleo de la ecuación de Volterra de primera clase,

$$f(x) = \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

tiene la forma $k(x-t)$. Suponiendo la existencia de las transformadas requeridas, demuestre que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F(s)}{K(s)} e^{xs}\, ds.$$

$F(s)$ y $K(s)$ son las transformadas de Laplace de $f(x)$ y $k(x)$, respectivamente.

16.2.3 El núcleo de una ecuación de Volterra de segunda clase,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

tiene la forma $k(x-t)$. Suponiendo la existencia de las transformadas requeridas, demuestre que

[1] Este núcleo y el intervalo de $0 \leqslant x < \infty$ son las características de las ecuaciones integrales del tipo Wiener-Hopf. Detalles adicionales pueden encontrarse en el Capítulo 8 de la obra de Morse y Feshbach.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F(s)}{1 - \lambda K(s)} e^{xs}\, ds.$$

16.2.4 Utilizando la solución de transformada de Laplace (Ejercicio 16.2.3), resuelva

(a) $\varphi(x) = x + \int_0^x (t - x)\varphi(t)\, dt,$ *Respuesta.* $\varphi(x) = \operatorname{sen} x,$

(b) $\varphi(x) = x - \int_0^x (t - x)\varphi(t)\, dt.$ $\varphi(x) = \operatorname{senh} x.$

Compruebe los resultados mediante la sustitución nuevamente en las ecuaciones integrales originales.

16.2.5 Una ecuación de Fredholm de primera clase tiene el núcleo $e^{-(x-t)^2}$.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2} \varphi(t)\, dt.$$

Demuestre que la solución es

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{2^n n!} H_n(x),$$

en donde $H_n(x)$ es un polinomio de Hermite de enésimo orden.

16.2.6 Resuelva la ecuación de Abel,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x - t)^\alpha}\, dt, \qquad 0 < \alpha < 1;$$

mediante el siguiente método:

(a) Multiplique ambos lados por $(z - x)^{\alpha - 1}$ e integre con respecto a x dentro del intervalo $0 \leqslant x \leqslant z$.

(b) Invierta el orden de la integración y evalúe la integral del lado derecho (con respecto a x) mediante la función beta.

Nota.

$$\begin{aligned}\int_t^z \frac{dx}{(z - x)^{1-\alpha}(x - t)^\alpha} &= B(1 - \alpha, \alpha)\\ &= (-\alpha)!(\alpha - 1)!\\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\alpha}.\end{aligned}$$

16.2.7 Resuelva la ecuación integral

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{(1 - 2xt + x^2)^{1/2}}\, dt, \qquad -1 \leq x \leq 1,$$

para la función desconocida $\varphi(t)$ si (a) $f(x) = x^{2s}$, (b) $f(x) = x^{2s+1}$.

Respuesta. (a) $\varphi(t) = \dfrac{4s + 1}{2} P_{2s}(t),$

(b) $\varphi(t) = \dfrac{4s + 3}{2} P_{2s+1}(t).$

16.2.8 Un análisis de la teoría de la difracción de Kirchhoff mediante laser origina la ecuación integral

$$v(\mathbf{r}_2) = \gamma \iint K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, v(\mathbf{r}_1)\, dA.$$

El término desconocido $v(\mathbf{r}_1)$ proporciona la distribución geométrica del campo de radiación sobre una superficie de espejo; el intervalo de integración es sobre la superficie del espejo. Para espejos esféricos confocales cuadrados, la ecuación integral se transforma en

$$v(x_2, y_2) = \frac{-i\gamma e^{ikb}}{\lambda b} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} e^{-(ik/b)(x_1x_2+y_1y_2)}\, v(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1,$$

en donde b es la distancia a la línea central entre los espejos laser. Esto puede establecerse en una forma algo más simple mediante las sustituciones

$$\frac{kx_i^2}{b} = \xi_i^2, \qquad \frac{ky_i^2}{b} = \eta_i^2 \quad \text{y} \quad \frac{ka^2}{b} = \frac{2\pi a^2}{\lambda b} = \alpha^2.$$

(a) Demuestre que las variables se separan y que se obtienen dos ecuaciones integrales.
(b) Demuestre que los nuevos límites $\pm\alpha$ se pueden aproximar a $\pm\infty$ para una dimensión de espejo $a \gg \lambda$.
(c) Resuelva las ecuaciones integrales resultantes.

16.3 Serie de Neumann, Núcleos Separables (Degenerados)

Una gran cantidad, y posiblemente la mayoría, de las ecuaciones integrales no se pueden resolver por medio de técnicas de transformada integral especializadas de la sección anterior. Aquí desarrollaremos dos técnicas bastante generales para la resolución de las ecuaciones integrales. La primera, debida principalmente a Neumann, Liouville y Volterra, desarrolla la función desconocida $\varphi(x)$ como una serie de potencias en λ, en donde λ es una constante determinada. Este método puede aplicarse cuando la serie es convergente.

El segundo método es un poco más restringido debido a que requiere de que las dos variables que aparecen en el núcleo $K(x, t)$ puedan separarse. Sin embargo, se logran dos ventajas principales: (1) la relación entre una ecuación integral y un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas se muestra explícitamente, y (2) el método origina los valores propios y las funciones propias, bastante similar a la Sección 4.6.

Serie de Neumann. La ecuación integral de segunda clase se resuelve mediante el método de las aproximaciones sucesivas; la ecuación integral es la ecuación de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{16.56}$$

en donde $f(x) \neq 0$. Cuando el límite superior de la integral es una variable (ecuación de Volterra), el siguiente desarrollo aún es consistente, aunque con ligeras modificaciones. Intentemos (aun cuando no existe ninguna

garantía de que sea lo adecuado) aproximar la función desconocida mediante

$$\varphi(x) \approx \varphi_0(x) = f(x). \tag{16.57}$$

Esta selección no es obligatoria. Si usted puede hacer una suposición mejor, adelante y suponga. La selección en este caso es equivalente a decir que la integral o la constante λ es pequeña. Para mejorar esta primera aproximación tosca se incorpora nuevamente $\varphi_0(x)$ en la integral, obteniendo así

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t)\, dt. \tag{16.58}$$

Repitiendo este procedimiento de sustituir la nueva $\varphi_n(x)$ otra vez en la Ec. 16.56, se desarrolla la secuencia

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) = f(x) &+ \lambda \int_a^b K(x, t_1) f(t_1)\, dt_1 \\ &+ \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, t_1)\, K(t_1, t_2) f(t_2)\, dt_2\, dt_1 \end{aligned} \tag{16.59}$$

y

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i(x), \tag{16.60}$$

en donde

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x) \\ u_1(x) &= \int_a^b K(x, t_1) f(t_1)\, dt_1 \\ u_2(x) &= \int_a^b \int_a^b K(x, t_1)\, K(t_1, t_2) f(t_2)\, dt_2\, dt_1 \\ u_n(x) &= \iiint K(x, t_1)\, K(t_1, t_2) \cdots K(t_{n-1}, t_n) \cdot f(t_n)\, dt_n \cdots dt_1. \end{aligned} \tag{16.61}$$

Es de esperarse que la solución $\varphi(x)$ sea

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i(x), \tag{16.62}$$

considerando que la serie infinita sea convergente.

Ahora se puede comprobar convenientemente la convergencia por medio de la prueba de la relación de Cauchy, Sección 5.2, observando que

$$|\lambda^n u_n(x)| \leq |\lambda|^n |f|_{\text{máx}} |K|^n_{\text{máx}} |b - a|^n, \tag{16.63}$$

utilizando $|f|_{\text{máx}}$ para representar el valor máximo de $|f(x)|$ en el intervalo $[a, b]$ y $|K|_{\text{máx}}$ para representar el valor máximo de $|K(x, t)|$ en su dominio del plano x, t. Se tiene la convergencia cuando

$$|\lambda|\,|K|_{\text{máx}}|b-a| < 1. \tag{16.64}$$

Observe que $\lambda\, u_{n\,\text{máx}}$ se utiliza como una serie de *comparación*. Cuando es convergente, la serie verdadera debe ser también convergente. Si esta condición no se satisface, puede o no haber la convergencia. Se requiere de una prueba más sensible. Evidentemente, aun cuando la serie de Neumann sea divergente, existe la posibilidad de una solución que puede lograrse mediante otro método

EJEMPLO 16.3.1

Para ilustrar el método de Neumann, se considera la ecuación integral

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\,\varphi(t)\,dt. \tag{16.65}$$

La serie de Neumann proporciona

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= x \\
\varphi_1(x) &= x + \tfrac{1}{3} \\
\varphi_2(x) &= x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} \\
\varphi_3(x) &= x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3^2},
\end{aligned} \tag{16.66}$$

y por inducción

$$\varphi_{2n}(x) = x + \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}3^{-s} - x\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}3^{-s} \tag{16.67}$$

Permitiendo que $n \to \infty$,

$$\varphi(x) = \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}. \tag{16.68}$$

Es interesante hacer notar la facilidad de la convergencia para esta serie aun cuando la Ec. 16.64 *no* sea satisfecha en este caso particular. De hecho, la Ec. 16.64 constituye un límite superior más bien tosco en λ. Se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la solución en serie es que $|\lambda| < |\lambda_e|$, en donde λ_e es el valor propio de magnitud más pequeña de la ecuación homogénea correspondiente $[f(x) = 0)]$. Para este ejemplo particular, $\lambda_e = \sqrt{3}/2$, lo cual evidentemente es menor que $\frac{1}{2}$.

Un procedimiento para el cálculo de las perturbaciones dependientes del tiempo en la mecánica cuántica se inicia con la ecuación integral para

el operador de evolución

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} V(t_1)\, U(t_1, t_0)\, dt_1. \tag{16.69a}$$

La repetición origina

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} V(t_1)\, dt_1 + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} V(t_1)\, V(t_2)\, dt_2\, dt_1 + \cdots \tag{16.69b}$$

El operador de evolución se obtiene a modo de una serie de integrales múltiples del potencial de perturbación $V(t)$, lo cual es bastante análogo a la serie de Neumann, Ec. 16.60. Una relación secundaria y similar entre la serie de Neumann y la mecánica cuántica aparece cuando la ecuación de onda de Schrödinger para la dispersión se vuelve a formular a modo de ecuación integral. El primer término en la solución de serie de Neumann es la onda incidente (sin perturbar). Los términos secundarios corresponden a la aproximación de Born, Ec. 16.191 de la Sección 16.6 (cf. Ejercicio 16.6.13).

El método de Fredholm para la resolución de las ecuaciones de Fredholm consiste en subdividir el intervalo de integración y prácticamente sustituir la integral por una suma. La ecuación integral simple se sustituye por un gran número (cerca del infinito) de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas. Para mayores detalles, el lector puede acudir a las referencias que se incluyen al final de este capítulo.

Núcleo Separable. La técnica de sustituir la ecuación integral por las ecuaciones algebraicas simultáneas también se puede utilizar cuando el núcleo $K(x, t)$ puede separarse en el sentido de que

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x)\, N_j(t), \tag{16.70}$$

en donde n, el límite superior de la suma, es *finito*. Tales núcleos se denominan ocasionalmente degenerados. Nuestra clase de núcleos separables incluye a todos los polinomios y muchas de las funciones trascedentales elementales, es decir

$$\cos(t - x) = \cos t \cos x + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} x. \tag{16.70a}$$

Si se satisface la Ec. 16.70, la sustitución en la ecuación de Fredholm de segunda clase proporciona

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} M_j(x) \int_a^b N_j(t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{16.71}$$

intercambiando la integración y la suma. Ahora, la integral con respecto a t es una constante,

$$\int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt = c_j. \tag{16.72}$$

En consecuencia, la Ec. 16.71 se transforma en

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j M_j(x). \tag{16.73}$$

Esto origina $\varphi(x)$, nuestra solución, una vez que se hayan determinado las constantes c_i.

Las constantes c_i se pueden establecer al multiplicar la Ec. 16.73 por $N_i(x)$ e integrando para eliminar la dependencia en x. El uso de la Ec. 16.72 proporciona

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j, \tag{16.74}$$

en donde

$$b_i = \int_a^b N_i(x) f(x)\,dx, \tag{16.75}$$

$$a_{ij} = \int_a^b N_i(x)\,M_j(x)\,dx.$$

Probablemente es de utilidad indicar la Ec. 16.74 en la forma de matriz, con $\mathsf{A} = (a_{ij})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} - \lambda \mathsf{A}\mathbf{c} &= \mathbf{b} \\ &= (1 - \lambda \mathsf{A})\mathbf{c}, \end{aligned}$$

o

$$\mathbf{c} = (1 - \lambda \mathsf{A})^{-1}\mathbf{b}. \tag{16.76}$$

Esto es equivalente a un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas

$$\begin{aligned} (1 - \lambda a_{11})c_1 - \lambda a_{12}c_2 - \lambda a_{13}c_3 - \cdots &= b_1, \\ -\lambda a_{21}c_1 + (1 - \lambda a_{22})c_2 - \lambda a_{23}c_3 - \cdots &= b_2, \\ -\lambda a_{31}c_1 - \lambda a_{32}c_2 + (1 - \lambda a_{33})c_3 - \cdots &= b_3, \qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{16.77}$$

Si la ecuación integral es homogénea, $[f(x) = 0]$, entonces $\mathbf{b} = 0$. Para lograr una solución, se establece que el determinante de los coeficientes de c_i sea igual a cero,

$$|1 - \lambda \mathsf{A}| = 0, \tag{16.78}$$

del mismo modo que en la Sección 4.6. Las raíces de la Ec. 16.78 proporcionan los valores propios. Sustituyendo en la Ec. 16.76, se encuentran las constantes c_i y luego la Ec. 16.73 proporciona la solución.

EJEMPLO 16.3.2

Para ilustrar la técnica en que se determinan los valores propios y las funciones propias de la ecuación de Fredholm homogénea, se considera el caso simple

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (t + x)\, \varphi(t)\, dt. \tag{16.79}$$

Aquí

$$M_1 = 1, \qquad M_2(x) = x,$$
$$N_1(t) = t, \qquad N_2 = 1.$$

La Ec. 16.75 proporciona

$$a_{11} = a_{22} = 0,$$
$$a_{12} = \tfrac{2}{3},$$
$$a_{21} = 2.$$

La Ec. 16.78, es decir la ecuación secular, se transforma en

$$\begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{2\lambda}{3} \\ -2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{16.80}$$

Desarrollando, se obtiene

$$1 - \frac{4\lambda^2}{3} = 0,$$
$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{16.81}$$

Sustituyendo los valores propios $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$ en la Ec. 76, se tiene

$$c_1 \mp \frac{c_2}{\sqrt{3}} = 0. \tag{16.82}$$

Finalmente, con la selección $c_1 = 1$, la Ec. 16.73 proporciona

$$\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3}x), \qquad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{16.83}$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \sqrt{3}x), \qquad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{16.84}$$

Ya que la ecuación es homogénea, la normalización de $\varphi(x)$ es arbitraria.

EJERCICIOS

16.3.1 Utilizando la serie de Neumann, resuelva

$$\text{(a)}\ \varphi(x) = 1 - 2\int_0^x t\,\varphi(t)\,dt,$$

Respuesta. (a) $\varphi(x) = e^{-x^2}$.

$$\text{(b)}\ \varphi(x) = x + \int_0^x (t - x)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$\text{(c)}\ \varphi(x) = x - \int_0^x (t - x)\,\varphi(t)\,dt.$$

16.3.2 Resuelva la ecuación

$$\varphi(x) = x + \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t + x)\,\varphi(t)\,dt$$

mediante el método del núcleo separable. Compare con la solución del método de Neumann de la Sección 16.3.

Respuesta. $\varphi(x) = \tfrac{1}{2}(3x + 1)$

16.3.3 Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1} (t - x)\,\varphi(t)\,dt.$$

16.3.4 Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^{2\pi} \cos(x - t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Respuesta. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{\pi}$,

$$\varphi(x) = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x.$$

16.3.5 Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$y(x) = \lambda\int_{-1}^{1} (x - t)^2\,y(t)\,dt.$$

Sugerencia. Este problema se puede tratar mediante el método del núcleo separable o por medio del desarrollo de Legendre.

16.3.6 Si la técnica del núcleo separable de esta sección se aplica a la ecuación de Fredholm de primera clase, demuestre que la Ec. 16.76 se sustituye por

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

En general, la solución para $\varphi(t)$ desconocida no es única.

16.3.7 Resuelva

$$\psi(x) = x + \int_0^1 (1 + xt)\,\psi(t)\,dt$$

mediante cada uno de los siguientes métodos:

(a) La técnica de la serie de Neumann, (b) la técnica del núcleo separable y (c) una suposición juiciosa.

16.3.8 Utilice la técnica del núcleo separable para demostrar que

$$\psi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos x \operatorname{sen} t \, \psi(t) \, dt$$

no tiene solución (aparte de la trivial $\psi = 0$). Explique el resultado en términos de la capacidad de la separación y de la simetría.

16.4 Teoría de Hilbert-Schmidt

Simetrización de Núcleos. Esto corresponde al desarrollo de las propiedades de las ecuaciones integrales lineales (tipo Fredholm) con núcleos simétricos.

$$K(x, t) = K(t, x). \tag{16.85}$$

Antes de ahondar en la teoría, se observa que existen algunos núcleos no simétricos importantes que pueden simetrizarse. Si se tiene la ecuación

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \, \rho(t) \, \varphi(t) \, dt, \tag{16.86}$$

el núcleo total de hecho es $K(x, t) \; \rho(t)$, lo cual evidentemente no es simétrico cuando solamente $K(x, t)$ es simétrica. Sin embargo, si se multiplica la Ec. 16.86 por $\sqrt{\rho(x)}$ y se sustituye

$$\sqrt{\rho(x)} \, \varphi(x) = \psi(x), \tag{16.87}$$

se obtiene

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)} f(x) + \lambda \int_a^b [K(x, t) \sqrt{\rho(x) \, \rho(t)}] \, \psi(t) \, dt \tag{16.88}$$

lo cual constituye un núcleo total simétrico, $K(x, t)\sqrt{\rho(x) \, \rho(t)}$. Posteriormente habremos de encontrar a $\rho(x)$ como factor ponderador en esta teoría de Sturm-Liouville de la ecuación integral.

Funciones Propias Ortogonales. Ahora habremos de enfocar la atención en la ecuación homogénea de Fredholm de segunda clase:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \, \varphi(t) \, dt. \tag{16.89}$$

Se supondrá que el núcleo $K(x, t)$ es simétrico y real. Probablemente una de las primeras preguntas que pudiera hacerse el matemático acerca de esto es: "¿Tiene algún sentido?"; o más preciso: "¿Existe un valor propio λ que satisfaga esta ecuación?" Con la ayuda de las desigualdades de Schwarz y Bessel, se ha demostrado por parte de Courant y Hilbert (Capítulo III, Sección 4) que si $K(x, t)$ es continuo existe al menos un valor, propio de esta clase y posiblemente un número infinito de los mismos.

Ahora se demostrará que los valores propios λ son reales y que las funciones propias correspondientes, $\varphi_i(x)$, son ortogonales. Sea λ_i, λ_j dos valores propios *diferentes* y $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)$, las funciones propias correspondientes. La Ec. 16.89 se transforma consecuentemente en

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, t)\, \varphi_i(t)\, dt, \tag{16.90a}$$

$$\varphi_j(x) = \lambda_j \int_a^b K(x, t)\, \varphi_j(t)\, dt. \tag{16.90b}$$

Si la Ec. 16.90*a* se multiplica por $\lambda_j \varphi_j(x)$, la Ec. 16.90*b* por $\lambda_i \varphi_i(x)$, y luego se integra con respecto a x, las dos ecuaciones se transforman en[1]

$$\lambda_j \int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx = \lambda_i \lambda_j \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(x)\, dt\, dx, \tag{16.91a}$$

$$\lambda_i \int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx = \lambda_i \lambda_j \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, \varphi_j(t)\, \varphi_i(x)\, dt\, dx. \tag{16.91b}$$

Ya que se ha requerido que $K(x, t)$ sea asimétrico, la Ec. 16.91*b* puede indicarse en la forma

$$\lambda_i \int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx = \lambda_i \lambda_j \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(x)\, dt\, dx. \tag{16.92}$$

Restando la Ec. 16.92 de la Ec. 16.91*a*, se obtiene

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx = 0. \tag{16.93}$$

Ya que $\lambda_i \neq \lambda_j$,

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx = 0, \qquad i \neq j, \tag{16.94}$$

proporcionando así la ortogonalidad. Observe que con un núcleo simétrico no quedan implicados los conjugados complejos en la Ec. 16.94. Para el núcleo autoadjunto o hermitiano véase el Ejercicio 16.4.1.

[1] Se supone la existencia de las integrales necesarias. Para un ejemplo de un caso patológico simple, véase el Ejercicio 16.4.3.

Si el valor propio λ_i es degenerado,[1] las funciones propias para el valor propio se pueden ortogonalizar por medio del método de Schmidt (Sección 9.3). Evidentemente nuestras funciones propias ortogonales se pueden normalizar, y se supondrá que esto ha sido hecho. El resultado es

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx = \delta_{ij}. \tag{16.95}$$

Para demostrar que λ_i son reales, es necesario considerar los conjugados complejos. Tomando el conjugado complejo de la Ec. 16.90*a*, se tiene

$$\varphi_i^*(x) = \lambda_i^* \int_a^b K(x, t)\varphi_i^*(t)\, dt, \tag{16.96}$$

siempre que el núcleo $K(x, t)$ sea real. Ahora, utilizando la Ec. 16.96 en lugar de la Ec. 16.90*b*, el análisis origina

$$(\lambda_i^* - \lambda_i)\int_a^b \varphi_i^*(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0. \tag{16.97}$$

En esta ocasión la integral no puede desaparecer (a menos de que se tenga una solución trivial, $\varphi_i(x) = 0$) y

$$\lambda_i^* = \lambda_i \tag{16.98}$$

o sea que λ_i, el valor propio, es real.

En caso de que el lector sienta que de alguna manera este estado del asunto sea vagamente familiar, estará en lo cierto. Esta es la *tercera* ocasión que hemos procedido en la misma forma, primero con las matrices hermitianas, luego con las ecuaciones (autoadjuntas) de Sturm-Liouville y ahora con las ecuaciones integrales de Hilbert-Schmidt. La correspondencia entre las matrices hermitianas y las ecuaciones diferenciales autoadjuntas se pone de manifiesto en la física moderna en la forma de dos formulaciones sobresalientes de la mecánica cuántica, el procedimiento de la matriz de Heisenberg y el procedimiento del operador diferencial de Schrödinger. En la Sección 16.5 se procederá a realizar un análisis más detallado de la correspondencia entre las ecuaciones integrales de núcleo simétrico de Hilbert-Schmidt y las ecuaciones diferenciales autoadjuntas de Sturm-Liouville.

Las funciones propias de la ecuación integral constituyen un conjunto completo[2] en el sentido de que cualquier función $g(x)$ que pueda ser originada por la integral

[1] Cuando más de una función propia distinta corresponde al mismo valor propio (satisfaciendo la Ec. 16.89), se dice que dicho valor propio es degenerado.

[2] Para una demostración de este enunciado, véase Courant y Hilbert, Capítulo III, Sección 5.

$$g(x) = \int K(x, t)\, h(t)\, dt, \tag{16.99}$$

en donde $h(t)$ es cualquier función continua en parte, se puede representar por medio de una serie de funciones propias,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, \varphi_n(x). \tag{16.100}$$

La serie es convergente uniforme y absolutamente.

Procedamos a ampliar esto al núcleo, $K(x, t)$, al afirmar que

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(t), \tag{16.101}$$

y $a_n = a_n(x)$. Sustituyendo en la ecuación integral original (Ec. 16.89) y haciendo uso de la integral de ortogonalidad, se obtiene

$$\varphi_i(x) = \lambda_i\, a_i(x). \tag{16.102}$$

En consecuencia, para la ecuación homogénea de Fredholm de segunda clase, el núcleo se puede expresar en términos de las funciones propias y los valores propios por medio de

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(t)}{\lambda_n}, \quad \text{(cero no es un valor propio).} \tag{16.103}$$

Es posible que el desarrollo establecido por la Ec. 16.101 pudiera no existir. Como ilustración de esta clase de comportamiento patológico que puede presentarse, se invita al lector a que aplique este análisis a

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-xt}\, \varphi(t)\, dt$$

(cf. Ejercicio 16.4.3).

Es de hacerse notar que la teoría de Hilbert-Schmidt está relacionada con el establecimiento de las propiedades correspondientes a los valores propios (reales) y las funciones propias (ortogonalidad, plenitud), propiedades que pueden ser de gran interés y utilidad. La teoría de Hilbert-Schmidt *no* resuelve la ecuación integral homogénea más de lo que puede lograrse con la teoría de Sturm-Liouville del Capítulo 9 para la resolución de las ecuaciones diferenciales. Las soluciones de la ecuación integral se derivan de lo indicado en la Sección 16.2 y en la Sección 16.3 (o del análisis numérico).

Ecuación Integral No Homogénea. Se requiere de una solución de la ecuación no homogénea

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{16.104}$$

Supondremos que las soluciones de la ecuación integral no homogénea son conocidas.

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t)\, dt, \tag{16.105}$$

en que las soluciones $\varphi_n(x)$ corresponden al valor propio λ_n. Procederemos a desarrollar $\varphi(x)$ y $f(x)$ en términos de este conjunto de funciones propias,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(x), \tag{16.106}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \varphi_n(x). \tag{16.107}$$

Sustituyendo en la Ec. 16.104, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \varphi_n(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(t)\, dt. \tag{16.108}$$

Mediante el intercambio del orden de integración y la suma, la integral puede evaluarse por medio de la Ec. 16.105, y se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \varphi_n(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\, \varphi_n(x)}{\lambda_n}. \tag{16.109}$$

Si se multiplica por $\varphi_i(x)$ y se integra desde $x = a$ hasta $x = b$, la ortogonalidad de las funciones propias origina

$$a_i = b_i + \lambda \frac{a_i}{\lambda_i}. \tag{16.110}$$

Esto puede indicarse nuevamente en la forma

$$a_i = b_i + \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda}\, b_i \tag{16.111}$$

lo cual da lugar a la solución

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(t)\, \varphi_i(t)\, dt}{\lambda_i - \lambda}\, \varphi_i(x). \tag{16.112}$$

En este caso se ha supuesto que las funciones propias, $\varphi_i(x)$, se han normalizado a la unidad. *Observe que si $f(x) = 0$, no se tiene solución a menos de que $\lambda = \lambda_i$.* Esto significa que la ecuación homogénea no tiene solución (excepto la trivial $\varphi(x) = 0$) a menos de que λ sea un valor propio, λ_i.

En caso de que λ para la ecuación no homogénea (16.104) sea igual a uno de los valores propios, λ_p, de la ecuación homogénea, la solución (Ec. 16.112) deja de ser consistente. Para reparar este daño regresamos a la Ec. 16.110 y establecemos el valor

$$a_p = b_p + \lambda_p \frac{a_p}{\lambda_p} = b_p + a_p \tag{16.113}$$

de especial atención. Evidentemente a_p desaparece y ya no está determinado por b_p, mientras que $b_p = 0$. Esto implica que $\int f(x)\, \varphi_p(x)\, dx = 0$, es decir $f(x)$ es ortogonal con respecto a la función propia $\varphi_p(x)$. Si este *no* fuera el caso, no se tendrá una solución.

La Ec. 16.111 aun es consistente para $i \neq p$, de modo que se multiplica por $\varphi_i(x)$ y se suma sobre i $(i \neq p)$ para obtener

$$\varphi(x) = f(x) + a_p\varphi_p + \lambda_p \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{\infty}{}' \frac{\int_a^b f(t)\, \varphi_i(t)\, dt}{\lambda_i - \lambda_p}\, \varphi_i(x); \tag{16.114}$$

en donde la prima pone de relieve que el valor $i = p$ se omite. En la solución a_p permanece como la constante indeterminda.[1]

EJERCICIOS

16.4.1 En la ecuación de Fredholm

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

el núcleo $K(x, t)$ es autoadjunto o hermitiano.

$$K(x, t) = K^*(t, x).$$

Demuestre que

(a) las funciones propias son ortogonales en el sentido de que

$$\int_a^b \varphi_m^*(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n\ (\lambda_m \neq \lambda_n),$$

(b) los valores propios son reales.

16.4.2 Resuelva la ecuación integral

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t + x)\, \varphi(t)\, dt$$

(cf. Ejercicio 16.3.2) mediante el método Hilbert-Schmidt.

La aplicación de la técnica de Hilbert-Schmidt en este caso puede considerarse como algo similar al uso de una escopeta para matar a un mosquito, especialmente cuando

[1] Esto es similar a la ecuación diferencial no homogénea. A esta solución podríamos agregar cualquier constante multiplicada por una solución de la ecuación diferencial homogénea correspondiente.

la ecuación puede resolverse en aproximadamente quince segundos mediante el desarrollo en polinomios de Legendre.

16.4.3 Resuelva la ecuación integral de Fredholm

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-xt}\, \varphi(t)\, dt.$$

Nota. El desarrollo en serie del núcleo e^{-xt} puede permitir la obtención de una solución tipo núcleo (Sección 16.3), excepto que la serie es infinita. Esto sugiere un número infinito de valores propios y funciones propias. Si se interrumpe en

$$\varphi(x) = x^{-1/2},$$
$$\lambda = \pi^{-1/2},$$

¡se habrán perdido la mayoría de las soluciones! Demuestre que las integrales de normalización de las funciones propias *no* existen. Un razonamiento básico para este comportamiento anormal se refiere a que el intervalo de la integración es infinito, lo cual origina una ecuación integral "singular".

16.4.4 Teniendo

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\, y(t)\, dt.$$

(a) Determine $y(x)$ como una función de Neumann.

(b) Encuentre el intervalo de λ para el cual la solución de serie de Neumann es convergente. Compare con el valor obtenido a partir de

$$|\lambda|\, |K|_{\text{máx}} < 1.$$

(c) Encuentre el valor propio de la función propia de la ecuación integral homogénea correspondiente.

(d) Mediante el método del núcleo separable, demuestre que la solución es

$$y(x) = \frac{3x}{3 - \lambda}.$$

(e) Encuentre $y(x)$ mediante el método de Hilbert-Schmidt.

16.4.5 En el Ejercicio 16.3.4

$$K(x, t) = \cos(x - t).$$

Las funciones propias (sin normalizar) son $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

(a) Demuestre que existe una función $h(t)$ tal que $K(x, s)$, considerada como una función de s solamente, se puede indicar en la forma

$$K(x, s) = \int_0^{2\pi} K(s, t)\, h(t)\, dt.$$

(b) Demuestre que $K(x, t)$ puede desarrollarse en la forma

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{2} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(t)}{\lambda_n}.$$

16.5 Funciones de Green. Una Dimensión

Como parte de la investigación de los operadores diferenciales en la Sección 8.6, se observa que la ecuación de Poisson para la electrostática

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \tag{16.115}$$

tiene la solución

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\, d\tau_2 . \tag{16.116}$$

Aquí se tiene el caso infinito en donde el intervalo de integración abarca todo el espacio. Si se desea, el potencial $\varphi(\mathbf{r}_1)$ puede desarrollarse para un caso finito mediante el uso de la carga adecuada y las distribuciones de capa dipolar en los límites.[1] La Ec. 16.116 puede tener dos interpretaciones:

1. Si la función de potencial $\varphi(\mathbf{r}_1)$ se conoce y se pretende conocer la distribución de carga $\rho(\mathbf{r}_2)$, que produce el potencial dado, la Ec. 16.116 representa una ecuación integral para $\rho(\mathbf{r}_2)$.
2. Si la distribución de carga $\rho(\mathbf{r}_2)$ es conocida, la Ec. 16.116 proporciona el potencial electrostático $\varphi(\mathbf{r}_1)$ como una integral definida.

Aceptando esta segunda solución (y de ocurrencia más frecuente), se puede hacer uso del ya conocido vocabulario del físico concerniente a la causa y efecto. Se puede definir a $\rho(\mathbf{r}_2)$ como la "causa" que origina el "efecto" $\varphi(\mathbf{r}_1)$; es decir, la distribución de carga produce un campo de potencial. Sin embargo, la *efectividad* de la carga en cuanto a producir este potencial depende de la distancia entre el elemento de carga $\rho(\mathbf{r}_2)\, d\tau_2$ y el punto de interés definido por $\mathbf{r}_1$. Esta efectividad o, digamos, la influencia del elemento de carga está determinada por la función $(4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)^{-1}$.

Debido a esto, $(4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)^{-1}$ frecuentemente se denomina función de influencia. Aun cuando posteriormente habremos de volver a denominarla función de Green, la base física para el término función de influencia continúa siendo importante y bien pudiera ser de utilidad para determinar la forma de otras funciones de Green.

Asimismo, en la Sección 8.6, la función de Green (para el operador ∇^2) se consideró que satisfacía la ecuación de la fuente de punto

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{8.91}$$

Se incluye una descripción detallada de la función delta de Dirac en términos de las secuencias. Utilizando la Ec. 8.91 y el teorema de Green, Sección 1.11 la función de Green puede demostrarse que es simétrica:

[1] Cf. Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*. Nueva York: McGraw-Hill (1941).

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \tag{8.105}$$

En la Sección 9.4 se desarrollan en series de las funciones propias a las funciones delta de Dirac y de Green. Estos desarrollos hacen explícitas las propiedades de simetría.

Otros ejemplos de las funciones de Green aparecen en relación a la función de Neumann (Ejercicio 11.5.12) y la función de Bessel modificada $K_0(z)$. El Ejercicio 11.5.13 establece las relaciones entre las fuentes puntal, lineal y planar.

Considerando ahora este capítulo, en la Sección 16.1 se tiene que la ecuación integral correspondiente a la ecuación diferencial *y ciertas condiciones limitantes* pueden dar lugar a un núcleo peculiar. Este núcleo es la función de Green.

El desarrollo de las funciones de Green a partir de la Ec. 8.91 para los sistemas bidimensionales y tridimensionales constituye el tema de la Sección 16.6. Aquí, con propósitos de simplificación, habremos de limitarnos a los casos unidimensionales y a seguir un procedimiento algo distinto.[1]

Propiedades de Definición. En nuestro análisis unidimensional, primeramente habremos de considerar la ecuación no homogénea de Sturm-Liouville (Capítulo 9)

$$\mathscr{L}\, y(x) + f(x) = 0, \tag{16.117}$$

en donde $\mathscr{L}$ es el operador diferencial autoadjunto

$$\mathscr{L} = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x). \tag{16.118}$$

Del mismo modo que en la Sección 9.1, se requiere que $y(x)$ satisfaga ciertas condiciones limitantes en los puntos extremos a y b del intervalo $[a, b]$. De hecho, el intervalo bien pudiera escogerse de modo que existe la posibilidad de satisfacer las condiciones limitantes apropiadas. Ahora procederemos a definir una función más bien extraña y arbitraria G dentro del intervalo $[a, b]$. Hasta este momento, lo más que puede decirse en defensa de G es que las propiedades de definición son legítimas o aceptables matemáticamente.[2] Posteriormente, y esperando así, G puede resultar razonable si no es que obvia.

[1] La Ec. 8.91 se puede utilizar para los sistemas unidimensionales. La relación entre estos dos procedimientos diferentes para las funciones de Green se describe al final de esta sección.

[2] Sin embargo, debe observarse que estas propiedades son justamente las correspondientes al núcleo de la ecuación de Fredholm que han sido derivadas para la ecuación diferencial autoadjunta, Ejemplo 16.1.3.

1. El intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ se divide por medio de un parámetro t. Rotularemos $G(x) = G_1(x)$ para $a \leqslant x < t$ y $G(x) = G_2(x)$ para $t < x \leqslant b$.

2. Las funciones $G_1(x)$ y $G_2(x)$ satisfacen individualmente a la ecuación homogénea[1] de Sturm-Liouville; es decir

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\, G_1(x) &= 0, \qquad a \leqslant x < t, \\ \mathscr{L}\, G_2(x) &= 0, \qquad t < x \leqslant b. \end{aligned} \tag{16.119}$$

3. $x = a$, $G_1(x)$ satisface las condiciones limitantes impuestas en $y(x)$. $x = b$, $G_2(x)$ satisface las condiciones limitantes impuestas en $y(x)$ en este punto extremo del intervalo. Con propósitos de conveniencia en la renormalización, se considera que las condiciones limitantes son homogéneas; es decir a $x = a$

$$y(a) = 0,$$

$$y'(a) = 0,$$

o

$$\alpha\, y(a) + \beta\, y'(a) = 0$$

y de modo similar para $x = b$.

4. Se requiere que $G(x)$ sea *continua,*[2]

$$G_1(t) = G_2(t). \tag{16.120}$$

5. Se requiere que $G'(x)$ sea *discontinua,* específicamente que[2]

$$\frac{d}{dx} G_2(x)\bigg|_t - \frac{d}{dx} G_1(x)\bigg|_t = -\frac{1}{p(t)}. \tag{16.121}$$

en donde $p(t)$ procede del operador autoadjunto, Ec. 16.118. Observe que siendo discontinua la primera derivada, la segunda derivada no existe.

Estos requerimientos, de hecho, hacen que G sea una función de dos variables, $G(x, t)$. Asimismo, se observa que $G(x, t)$ depende tanto de la forma del operador diferencial $\mathscr{L}$ como *también* de las condiciones limitantes que debe satisfacer $y(x)$.

Ahora, suponiendo que se puede encontrar una función $G(x, t)$ que tenga estas propiedades, la habremos de rotular función de Green y proceder a demostrar que una solución de la Ec. 16.117 es

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)\, f(t)\, dt. \tag{16.122}$$

[1] Homogénea con respecto a la función desconocida. La función $f(x)$ en la Ec. 16.117 se ha establecido igual a cero.

[2] Desde un punto de vista estricto, este es el límite a medida que $x \to t$.

Para lograr esto, primeramente se construye la función de Green, $G(x, t)$. Sea $u(x)$ una solución de la ecuación homogénea de Sturm-Liouville que satisface las condiciones limitantes en $x = a$ y $v(x)$ una solución que satisface las condiciones limitantes en $x = b$. Siendo así, se puede considerar[1]

$$G(x, t) = \begin{cases} c_1\, u(x), & a \leqslant x < t, \\ c_2\, v(x), & t < x \leqslant b. \end{cases} \tag{16.123}$$

La continuidad en $x = t$ (Ec. 16.120) requiere que

$$c_2\, v(t) - c_1\, u(t) = 0. \tag{16.124}$$

Finalmente, la discontinuidad en la primera derivada (Ec. 16.121) se convierte en

$$c_2\, v'(t) - c_1\, u'(t) = -\frac{1}{p(t)}. \tag{16.125}$$

Existirá una solución única para los coeficientes desconocidos c_1 y c_2 cuando el determinante wronskiano

$$\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} = u(t)\, v'(t) - v(t)\, u'(t)$$

no desaparezca. En la Sección 8.5 se ha establecido que la no desaparición de este determinante es una condición necesaria para la independencia lineal. Consideremos que $u(x)$ y $v(x)$ son independientes. Lo contrario, que sucede cuando $u(x)$ satisface las condiciones limitantes en ambos puntos extremos, requiere de una función de Green generalizada. Desde un punto de vista estricto, no existe una función de Green cuando $u(x)$ y $v(x)$ son dependientes linealmente. Esto también es cierto cuando $\lambda = 0$ es un valor propio de la ecuación homogénea. Sin embargo, se puede definir una "función de Green generalizada". Esta situación, que ocurre con la ecuación de Legendre, se describe en la obra de Courant y Hilbert, así como en otras referencias. Para $u(x)$ y $v(x)$ independientes, se tiene el wronskiano (nuevamente de la Sección 8.5)

$$u(t)\, v'(t) - v(t)\, u'(t) = \frac{A}{p(t)}, \tag{16.126}$$

en donde A es una constante. La Ec. 16.126 se denomina ocasionalmente fórmula de Abel. Con relación a las funciones de Bessel y Legendre, han aparecido numerosos ejemplos. Ahora, de la Ec. 16.125, se identifica

$$c_1 = -\frac{v(t)}{A},$$

[1] Las "constantes" c_1 y c_2 son independientes de x, pero pueden (y deben) depender de otra variable, t.

$$c_2 = -\frac{u(t)}{A}. \tag{16.127}$$

La Ec. 16.124 evidentemente queda satisfecha. La sustitución en la Ec. 16.123 proporciona la función de Green.

$$G(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{A}\, u(x)\, v(t), & a \leqslant x < t, \\ -\dfrac{1}{A}\, u(t)\, v(x), & t < x \leqslant b. \end{cases} \tag{16.128}$$

Observe cuidadosamente que $G(x, t) = G(t, x)$. Esta es la propiedad de simetría que previamente ha sido demostrada en la Sección 8.6. Su interpretación física está definida por el principio de reciprocidad (a través de la función de influencia): una causa t origina el mismo efecto en x que la causa en x produce en t. En términos de la analogía electrostática esto es evidente, dependiendo la función de influencia solamente de la magnitud de la distancia entre los dos puntos

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|.$$

Se ha construido $G(x, t)$ pero aún se tiene la tarea de demostrar que la integral (Ec. 16.122) con la nueva función de Green de hecho es una solución de la ecuación diferencial original (16.117). Esto se logra mediante la sustitución directa. Con $G(x, t)$ definida por la Ec. 16.128,[1] la Ec. 16.122 se transforma en

$$y(x) = -\frac{1}{A}\int_a^x v(x)\, u(t)\, f(t)\, dt - \frac{1}{A}\int_x^b u(x)\, v(t)\, f(t)\, dt. \tag{16.129}$$

Diferenciando se obtiene

$$y'(x) = -\frac{1}{A}\int_a^x v'(x)\, u(t)\, f(t)\, dt - \frac{1}{A}\int_x^b u'(x)\, v(t)\, f(t)\, dt, \tag{16.130}$$

en que las derivadas de los límites se cancelan. Una segunda diferenciación proporciona

$$y''(x) = -\frac{1}{A}\int_a^x v''(x)\, u(t)\, f(t)\, dt - \frac{1}{A}\int_x^b u''(x)\, v(t)\, f(t)\, dt$$
$$- \frac{1}{A}[u(x)\, v'(x) - v(x)\, u'(x)]\, f(x). \tag{16.131}$$

Mediante las Ecs. 16.125 y 16.127, esto puede volver a establecerse en la forma

[1] En la primera integral, $a \leqslant t \leqslant x$. Así, $G(x, t) = G_2(x, t) = -(1/A)u(t)\, v(x)$. De modo similar, la segunda integral requiere que $G = G_1$.

$$y''(x) = -\frac{v''(x)}{A}\int_a^x u(t)\,f(t)\,dt - \frac{u''(x)}{A}\int_x^b v(t)\,f(t)\,dt - \frac{f(x)}{p(x)}. \qquad (16.132)$$

Ahora, mediante la sustitución en la Ec. 16.118, se tiene

$$\mathscr{L}\,y(x) = -\frac{[\mathscr{L}\,v(x)]}{A}\int_a^x u(t)\,f(t)\,dt - \frac{[\mathscr{L}\,u(x)]}{A}\int_x^b v(t)\,f(t)\,dt - f(x). \qquad (16.133)$$

Ya que $u(x)$ y $v(x)$ se seleccionan para satisfacer la ecuación homogénea de Sturm-Liouville, los factores dentro del paréntesis son cero y los términos de integral desaparecen. Transponiendo $f(x)$, se observa que la Ec. 16.117 queda satisfecha.

También se debe comprobar que $y(x)$ satisface las condiciones limitantes requeridas. En el punto $x = a$

$$y(a) = -\frac{u(a)}{A}\int_a^b v(t)\,f(t)\,dt = c\,u(a), \qquad (16.134)$$

$$y'(a) = -\frac{u'(a)}{A}\int_a^b v(t)\,f(t)\,dt = c\,u'(a), \qquad (16.135)$$

ya que la integral definida es una constante. Se selecciona $u(x)$ para satisfacer

$$\alpha\,u(a) + \beta\,u'(a) = 0. \qquad (16.136)$$

Multiplicando por la constante c, se verifica que $y(x)$ también satisface la Ec. 16.136. Esto ilustra la utilidad de las condiciones limitantes *homogéneas:* la normalización no es de interés. En los problemas de la mecánica cuántica, la condición limitante en la función de onda frecuentemente se expresa en términos de la relación

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{d}{dx}\ln\psi(x),$$

equivalente a la Ec. 16.136. La ventaja de esto es que la función de onda no necesariamente tiene que ser normalizada.

Resumiendo, se tiene la Ec. 16.122

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)\,f(t)\,dt$$

que satisface la ecuación diferencial (Ec. 16.117)

$$\mathscr{L}\,y(x) + f(x) = 0$$

y las condiciones limitantes; estas últimas han sido incorporadas en la función de Green $G(x, t)$.

Básicamente, lo que se ha hecho consiste en utilizar las soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville para construir una solución de la ecuación no homogénea. Nuevamente, la ecuación de Poisson es una ilustración. La

solución (Ec. 16.116) representa una combinación ponderada $[\rho(\mathbf{r}_2)]$ de soluciones de la ecuación homogénea de Laplace correspondiente.

En el análisis anterior no se han establecido restricciones especiales a $f(x)$. Ahora se supondrá que $f(x) = \lambda\, \rho(x)\, y(x)$. Siendo así, se tiene

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, t)\, \rho(t)\, y(t)\, dt \tag{16.137}$$

como una solución de

$$\mathscr{L}\, y(x) + \lambda\, \rho(x)\, y(x) = 0 \tag{16.138}$$

y sus condiciones limitantes. La Ec. 16.137 es una ecuación homogénea de Fredholm de segunda clase y la Ec. 16.138 es la ecuación de valor propio de Sturm-Liouville del Capítulo 9.

Observe el cambio de la Ec. 16.117 y 16.122 a la 16.137 y 16.138. Se tiene un cambio correspondiente en la interpretación de la función de Green. Se inició como una función de influencia o importancia, una función ponderada que define la importancia de la carga $\rho(\mathbf{r}_2)$ en la producción de un potencial $\varphi(\mathbf{r}_1)$. La carga ρ constituyó el término no homogéneo en la ecuación diferencial no homogénea 16.117. Ahora, la ecuación diferencial y la ecuación integral son ambas *homogéneas*. $G(x, t)$ se ha convertido en un enlace que relaciona las dos ecuaciones, la diferencial y la integral.

Para completar la descripción de esta equivalencia entre las ecuaciones diferencial-integral, procedemos ahora a demostrar que la Ec. 16.138 implica a la Ec. 16.137; es decir, una solución de la ecuación diferencial (Ec. 16.138) con sus condiciones limitantes satisface la ecuación integral (16.137). La Ec. 16.138 se multiplica por $G(x, t)$, la función de Green adecuada, y se integra desde $x = a$ hasta $x = b$ para obtener

$$\int_a^b G(x, t)\mathscr{L}\, y(x)\, dx + \lambda \int_a^b G(x, t)\, \rho(x)\, y(x)\, dx = 0. \tag{16.139}$$

La primera integral se divide en dos ($x < t$, $x > t$), de acuerdo con la construcción de la función de Green proporcionando

$$-\int_a^t G_1(x, t)\mathscr{L}\, y(x)\, dx - \int_t^b G_2(x, t)\mathscr{L}\, y(x)\, dx = \lambda \int_a^b G(x, t)\, \rho(x)\, y(x)\, dx. \tag{16.140}$$

Aplicando el teorema de Green al lado izquierdo o, equivalentemente, integrando por partes, se obtiene

$$-\int_a^t G_1(x, t)\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right) + q(x)\, y(x)\right]dx$$

$$= -\Big|G_1(x, t)\, p(x)\, y'(x)\Big|_a^t + \int_a^t G_1'(x, t)\, p(x)\, y'(x)\, dx - \int_a^t G_1(x, t)\, q(x)\, y(x)\, dx, \tag{16.141}$$

con una expresión equivalente de la segunda integral. La segunda integración por partes proporciona

$$-\int_a^t G_1(x, t)\mathscr{L}\, y(x)\, dx = -\int_a^t y(x)\, \mathscr{L}\, G_1(x, t)\, dx$$

$$-\Big|G_1(x, t)\, p(x)\, y'(x)\Big|_a^t + \Big|G_1'(x, t)\, p(x)\, y(x)\Big|_a^t. \qquad (16.142)$$

La integral de la derecha desaparece debido a que $\mathscr{L}G_1 = 0$. Mediante la combinación de los términos integrados con los correspondientes a la integración de G_2 se tiene

$$\begin{aligned} -p(t)[G_1(t, t)\, y'(t) - G_1'(t, t)\, y(t) - G_2(t, t)\, y'(t) + G_2'(t, t)\, y(t)] \\ + p(a)[G_1(a, t)\, y'(a) - G_1'(a, t)\, y(a)] \\ - p(b)[G_2(b, t)\, y'(b) - G_2'(b, t)\, y(b)]. \end{aligned} \qquad (16.143)$$

Las dos últimas expresiones desaparecen ya que $G(x, t)$ e $y(x)$ satisfacen las mismas condiciones limitantes. La primera expresión, con la ayuda de las Ecs. 16.120 y 16.121, se reduce a $y(t)$. Sustituyendo en la Ec. 16.140, se tiene la Ec. 16.137, lo cual completa la demostración de la equivalencia entre la ecuación integral y la ecuación diferencial más las condiciones limitantes.

EJEMPLO 16.5.1 OSCILADOR LINEAL

A modo de ejemplo simple, considere la ecuación del oscilador lineal (para una cuerda vibrante)

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0. \qquad (16.144)$$

Se imponen las condiciones $y(0) = y(1) = 0$, lo cual corresponde a una cuerda sujetada en ambos extremos. Ahora, para construir la función de Green, se requiere de soluciones de la ecuación homogénea de Sturm-Liouville, $\mathscr{L}y(x) = 0$, lo cual es $y''(x) = 0$. Para satisfacer las condiciones limitantes debe desaparecer una solución en $x = 0$, la otra en $x = 1$. Tales soluciones (sin normalizar) son

$$\begin{aligned} u(x) &= x, \\ v(x) &= 1 - x. \end{aligned} \qquad (16.145)$$

Se encuentra que

$$uv' - vu' = -1 \qquad (16.146)$$

o, mediante la Ec. 16.126 con $p(x) = 1$, $A = -1$. La función de Green se convierte en

$$G(x, t) = \begin{cases} x(1 - t), & 0 \leqslant x < t, \\ t(1 - x), & t < x \leqslant 1. \end{cases} \qquad (16.147)$$

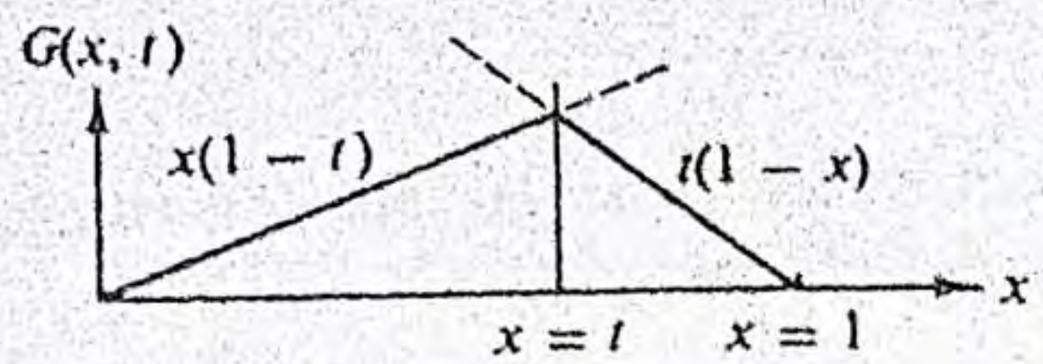


Fig. 16.3 Una función de Green de oscilador lineal

En consecuencia, mediante la Ec. 16.137 la cuerda vibrante sujetada satisface

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, t)\, y(t)\, dt. \tag{16.148}$$

El lector puede demostrar que las soluciones conocidas de la Ec. 16.144

$$y = \operatorname{sen} n\pi x \qquad (\lambda = n^2\pi^2),$$

satisfacen de hecho la Ec. 16.148. Observe que el valor propio λ *no* es la longitud de onda.

Otra forma de definir la función de Green puede arrojar más luz en cuanto a la formulación y particularmente en su relación con los problemas físicos. Consideremos nuevamente la ecuación de Poisson, pero esta vez desde el punto de vista de la carga

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{\text{puntal}}}{\varepsilon_0}. \tag{16.149}$$

La solución de la función de Green para esta ecuación ha sido establecida en la Sección 8.6. En esta ocasión habremos de considerar el análogo unidimensional

$$\mathscr{L}\, y(x) + f(x)_{\text{puntal}} = 0. \tag{16.150}$$

Aquí, $f(x)_{\text{puntal}}$ se refiere a la "carga" puntal unitaria o a una fuerza puntal. Se puede representar en una diversidad de formas, pero probablemente la más conveniente es

$$f(x)_{\text{puntal}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & t - \varepsilon < x < t + \varepsilon, \\ 0, & \text{en cualquier lugar}, \end{cases} \tag{16.151}$$

lo cual es esencialmente lo mismo que la Ec. 8.83*a*. Siendo así, al integrar la Ec. 16.150, se tiene

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathscr{L}\, y(x)\, dx = -\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(x)_{\text{puntal}}\, dx \tag{16.152}$$

$$= -1$$

de acuerdo con la definición de $f(x)$. Examinemos más de cerca $\mathscr{L}\, y(x)$. Se tiene

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{d}{dx}[p(x)\, y'(x)]\, dx + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} q(x)\, y(x)\, dx$$

$$= \Big|p(x)\, y'(x)\Big|_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} q(x)\, y(x)\, dx = -1. \tag{16.153}$$

En el límite $\varepsilon \to 0$ esta relación se puede satisfacer al *permitir* que $y'(x)$ tenga una discontinuidad de $-1/p(x)$ en $x = t$, permaneciendo la propia $y(x)$ continua.[1] Sin embargo, estas son justamente las propiedades utilizadas para definir la función de Green, $G(x, t)$. Asimismo, se observa que en el límite $\varepsilon \to 0$

$$f(x)_{\text{puntal}} = \delta(x - t), \tag{16.154}$$

en donde $\delta(x - t)$ es la función delta de Dirac, definida así en la Sección 8.6. En consecuencia, la Ec. 16.150 se ha convertido en

$$\mathscr{L}\, G(x, t) = -\delta(x - t). \tag{16.155}$$

Esta es la Ec. 8.91, la cual se ha utilizado en el desarrollo de las funciones de Green en dos y tres dimensiones: Sección 16.6. Como se recordará, esta relación ha sido utilizada en las Secciones 8.6 y 11.5 para determinar las funciones de Green.

EJERCICIOS

16.5.1 Demuestre que $G(x, t) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < t, \\ t, & t < x \leqslant 1. \end{cases}$

es la función de Green para el operador $\mathscr{L} \quad d^2/dx^2$ y las condiciones limitantes

$$y(0) = 0,$$
$$y'(1) = 0.$$

16.5.2 Encuentre la función de Green para

[1] Las funciones $p(x)$ y $q(x)$ que aparecen en el operador $\mathscr{L}$ son funciones continuas. Con $y(x)$ permaneciendo continua, $\int q(x)\, y(x)\, dx$ es ciertamente continua. En consecuencia, esta integral sobre el intervalo 2ε (Ec. 16.153) desaparece a medida que ε desaparece.

(a) $\mathscr{L}\, y(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x), \qquad \begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(1) = 0, \end{cases}$

(b) $\mathscr{L}\, y(x) = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - y(x), \qquad y(x)$ finita para $-\infty < x < \infty$.

16.5.3 Encuentre la función de Green para los operadores de Bessel

(a) $\mathscr{L}\, y(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy(x)}{dx}\right)$, *Respuesta.* (a) $G(x, t) = \begin{cases} -\ln t, & 0 \leqslant x < t, \\ -\ln x, & t < x \leqslant 1, \end{cases}$

(b) $\mathscr{L}\, y(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy(x)}{dx}\right) - \dfrac{n^2}{x}\, y(x),$

$$\text{(b)}\ G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{x}{t}\right)^n - (xt)^n\right], & 0 \leqslant x < t, \\ \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{t}{x}\right)^n - (xt)^n\right], & t < x \leqslant 1. \end{cases}$$

con $y(0)$ finita y $y(1) = 0$.

16.5.4 Construya la función de Green para

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (k^2x^2 - 1)y = 0,$$

sujeta a las condiciones limitantes

$$y(0) = 0,$$
$$y(1) = 0.$$

16.5.5 Teniendo

(1) $$\mathscr{L} = (1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$$

y

(2) $G(\pm 1, t)$ permaneciendo finita.

Demuestre que no se puede construir ninguna función de Green mediante las técnicas de esta sección. ($u(x)$ y $v(x)$ son dependientes linealmente.)

16.5.6 Construya la función de Green unidimensional infinita para la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(x) = g(x).$$

Las condiciones limitantes son las correspondientes a una onda que avanza en la dirección x positiva, suponiendo la dependencia respecto al tiempo de $e^{-i\omega t}$.

Respuesta. $G(x_1, x_2) = \dfrac{i}{2k}\exp(ik|x_1 - x_2|)$.

16.5.7 Construya la función de Green unidimensional infinita para la ecuación de Helmholtz modificada

$$(\nabla^2 - k^2)\psi(x) = f(x).$$

Las condiciones limitantes son que la función de Green debe desaparecer para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$.

Respuesta. $G(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2k} \exp(-k|x_1 - x_2|)$.

16.5.8 De acuerdo con el desarrollo de la función propia de la función de Green, demuestre que

$$\text{(a)}\quad \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} n\pi t}{n^2} = \begin{cases} x(1-t), & 0 \leqslant x < t, \\ t(1-x), & t < x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\pi x \operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\pi t}{(n+\frac{1}{2})^2} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < t, \\ t, & t < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Nota. En la Sección 9.4 la función de Green para $\mathscr{L} + \lambda$ se desarrolla en la forma de funciones propias. El término λ es un parámetro ajustable y no un valor propio.

16.5.9 En la ecuación de Fredholm,

$$f(x) = \lambda^2 \int_a^b G(x, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

$G(x, t)$ es una función de Green definida por

$$G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(t)}{\lambda_n^2 - \lambda^2}.$$

Demuestre que la solución es

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 - \lambda^2}{\lambda^2} \varphi_n(x) \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt.$$

16.6 Funciones de Green. Dos y Tres Dimensiones

De manera similar a la sección anterior (y en la Sección 8.6), se considera una ecuación diferencial no homogénea

$$\mathscr{L} y(\mathbf{r}_1) = -f(\mathbf{r}_1). \tag{16.156}$$

Se pretende establecer una solución que pudiera representarse mediante

$$y(\mathbf{r}_1) = -\mathscr{L}^{-1} f(\mathbf{r}_1). \tag{16.156a}$$

Es de esperarse que con $\mathscr{L}$ siendo un operador diferencial, el operador inverso $\mathscr{L}^{-1}$ involucrará la integración. Prosiguiendo, se define la función de Green correspondiente al operador diferencial $\mathscr{L}$ como una solución de la

ecuación no homogénea de la *fuente puntal*[1]

$$\mathscr{L}_1\, G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{16.156b}$$

lo cual satisface las condiciones limitantes requeridas. Aquí, el subíndice 1 en $\mathscr{L}$ pone de relieve que $\mathscr{L}$ opera en $\mathbf{r}_1$.

Supongamos que $\mathscr{L}_1$ es un operador diferencial autoadjunto de la forma general[2]

$$\mathscr{L}_1 = \nabla_1 \cdot [p(\mathbf{r}_1)\, \nabla_1] + q(\mathbf{r}_1). \tag{16.156c}$$

Siendo así, a modo de una generalización simple del teorema de Green, Ec. 1.97, se tiene

$$\int (v\mathscr{L}_2 u - u\mathscr{L}_2 v)\, d\tau_2 = \int p(v\nabla_2 u - u\nabla_2 v) \cdot d\sigma_2, \tag{16.156d}$$

en donde todas las cantidades tienen a $\mathbf{r}_2$ como su argumento. Se permite que $u(\mathbf{r}_2) = y(\mathbf{r}_2)$ de modo que la Ec. 16.156 puede aplicarse y $v(\mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ con lo cual puede aplicarse la Ec. 16.156*b*. [Recuerde que $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$, Sección 8.6.] Sustituyendo en el teorema de Green

$$\begin{aligned}\int \Big\{-G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2) + y(\mathbf{r}_2)\, \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\Big\}\, d\tau_2 \\ = \int p(\mathbf{r}_2)\Big\{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, \nabla_2\, y(\mathbf{r}_2) - y(\mathbf{r}_2)\, \nabla_2\, G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\Big\} \cdot d\sigma_2 .\end{aligned} \tag{16.156e}$$

Integrando sobre la función delta de Dirac

$$\begin{aligned} y(\mathbf{r}_1) = \int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2)\, d\tau_2 + \int p(\mathbf{r}_2)\{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\nabla_2\, y(\mathbf{r}_2) \\ - y(\mathbf{r}_2)\nabla_2\, G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\} \cdot d\sigma_2 .\end{aligned} \tag{16.156f}$$

Una solución de la Ec. 16.156 aparece como integral de volumen más una integral de superficie. Si tanto y como G satisfacen las condiciones limitantes de Dirichlet o cuando ambas satisfacen las condiciones limitantes de Neumann, la integral de superficie desaparece y se vuelve a ganar la Ec. 16.122. La integral de volumen es una integral ponderada sobre el término de la fuente $f(\mathbf{r}_2)$ con la función de Green $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ como función ponderatriz.

Forma de las Funciones de Green. Para el caso especial de $p(\mathbf{r}_1) = 1$ y $q(\mathbf{r}_1) = 0$, $\mathscr{L}$ es ∇^2, el laplaciano. Integrando

$$\nabla_1^2\, G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{16.157}$$

sobre un volumen pequeño que incluye la fuente puntal. Siendo así,

[1] Tal como se indicó en la Sección 8.6, la función delta será parte de un *integrando*.

[2] $\mathscr{L}_1$ puede estar en 1, 2 o 3 dimensiones (con la interpretación adecuada de ∇_1).

$$\int \nabla_1 \cdot \nabla_1 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, d\tau_1 = -\int \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, d\tau_1$$
$$= -1. \tag{16.157a}$$

La integral de volumen en la izquierda se puede transformar mediante el teorema de Gauss del mismo modo que en el desarrollo de la ley de Gauss: Sección 1.14. Se encuentra que

$$\int \nabla_1 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \cdot d\boldsymbol{\sigma}_1 = -1. \tag{16.158}$$

Incidentalmente, esto demuestra la imposibilidad de imponer una condición limitante de Neumann, es decir que la derivada normal de la función de Green, $\partial G/\partial n$, desaparece sobre toda la superficie.

Si nos encontramos en el espacio tridimensional,

$$\frac{\partial}{\partial r_{12}} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \qquad r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|. \tag{16.158a}$$

La integración es sobre la superficie de una esfera centrada en $\mathbf{r}_2$. La integral de la Ec. 16.158*a* es

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \tag{16.159}$$

lo cual concuerda con la Sección 1.14.

En caso de estar en el espacio bidimensional

$$\frac{\partial}{\partial \rho_{12}} G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|}, \tag{16.160}$$

en que $\mathbf{r}$ se ha sustituido por $\boldsymbol{\rho}$, $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ y la integración es con respecto a la circunferencia de un círculo centrado en $\boldsymbol{\rho}_2 \cdot \rho_{12} = |\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|$. Integrando la Ec. 16.160

$$G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|. \tag{16.161}$$

A $G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ (y a $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$) se puede agregar cualquier múltiplo de la solución regular de la ecuación homogénea según se requiera para satisfacer las condiciones limitantes.

El comportamiento de la función de Green con operador laplaciano en las cercanías de la fuente puntal $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ mostrado por las Ecs. 16.159 y 16.161, facilita la identificación de las funciones de Green para los otros casos, tal como en las ecuaciones de Helmholtz y Helmholtz modificada.

1. Para $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$, $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ debe satisfacer la ecuación diferencial *homogénea*

$$\mathscr{L}_1 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0, \qquad \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2. \tag{16.162}$$

2. Conforme $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2$ (o $\boldsymbol{\rho}_1 \to \boldsymbol{\rho}_2$),

$$G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \approx -\frac{1}{2\pi} \ln|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|, \qquad \text{espacio bidimencional}, \tag{16.163}$$

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \qquad \text{espacio tridimensional}. \tag{16.163a}$$

El segundo punto se explica y se justifica en la Sección 11.5. El término $\pm k^2$ en el operador no afecta el comportamiento de G cerca del punto singular $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. Por conveniencia, las funciones de Green para los operadores de Laplace, Helmholtz y Helmholtz modificado se incluyen en la Tabla 16.1.

TABLA 16.1

Fúnciones de Green[a]

	Laplace ∇^2	Helmholtz $\nabla^2 + k^2$	Helmholtz modificado $\nabla^2 - k^2$
Espacio unidimensional	sin solución para $(-\infty, \infty)$	$\frac{i}{2k} \exp(ik\lvert x_1 - x_2\rvert)$	$\frac{1}{2k} \exp(-k\lvert x_1 - x_2\rvert)$
Espacio bidimensional	$-\frac{1}{2\pi} \ln\lvert\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2\rvert$	$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\lvert\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2\rvert)$	$\frac{1}{2\pi} K_0(k\lvert\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2\rvert)$
Espacio tridimensional	$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert}$	$\frac{\exp(ik\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert)}{4\pi\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert}$	$\frac{\exp(-k\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert)}{4\pi\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert}$

[a]Estas son las funciones de Green que satisfacen la condición limitante $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$ conforme $\mathbf{r}_1 \to \infty$ para los operadores de Laplace y Helmholtz modificado. Para el operador de Helmholtz, $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ corresponde a una onda saliente.

Desarrollo en Coordenadas Polares Esféricas. A modo de una determinación alternativa de la función de Green del operador de Laplace, supongamos un desarrollo armónico esférico de la forma

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} g_l(r_1, r_2) Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2). \tag{16.164}$$

De acuerdo con los Ejercicios 8.6.7 y 12.6.6

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2)\, \delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\, \delta(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &= \frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2). \end{aligned} \tag{16.165}$$

Sustituyendo las Ecs. 16.164 y 16.165 en la Ec. 16.157 y haciendo uso de la ortogonalidad de los armónicos esféricos, se obtiene una ecuación radial

$$r_1 \frac{d^2}{dr_1^2}[r_1 g_l(r_1, r_2)] - l(l+1)g_l(r_1, r_2) = -\delta(r_1 - r_2). \tag{16.166}$$

Esto corresponde ahora a un problema unidimensional. La solución de la ecuación homogénea correspondiente son r_1^l y r_1^{-l-1}. Si se requiere que g_l permanezca finita conforme $r_1 \to 0$ y que desaparezca a medida que $r_1 \to \infty$, la técnica de la Sección 16.5 origina

$$g_l(r_1, r_2) = \frac{1}{2l+1} \begin{cases} \dfrac{r_1^l}{r_2^{l+1}}, & r_1 < r_2, \\ \dfrac{r_2^l}{r_1^{l+1}}, & r_1 > r_2, \end{cases} \tag{16.167}$$

o

$$g_l(r_1, r_2) = \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}. \tag{16.168}$$

En consecuencia, la función de Green es

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2). \end{aligned} \tag{16.169}$$

Teorema de la Adición Polinomial de Legendre. De acuerdo con la expresión generadora, Ec. 12.4*a*

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma), \tag{16.170}$$

en donde γ es el ángulo incluido entre los vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, Fig. 16.4. Igualando las Ecs. 16.169 y 16.170, se tiene el teorema de adición polinomial de Legendre

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2). \tag{16.171}$$

Compare la simplicidad (una vez que se han comprendido las funciones de Green) de esta derivación con la derivación relativamente dificultosa de la Sección 12.8.

Desarrollo en Coordenadas Cilíndricas Circulares. En analogía con el desarrollo en coordenadas polares esféricas, se indica

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\rho_1} \delta(\rho_1 - \rho_2)\, \delta(\varphi_1 - \varphi_2)\, \delta(z_1 - z_2)$$

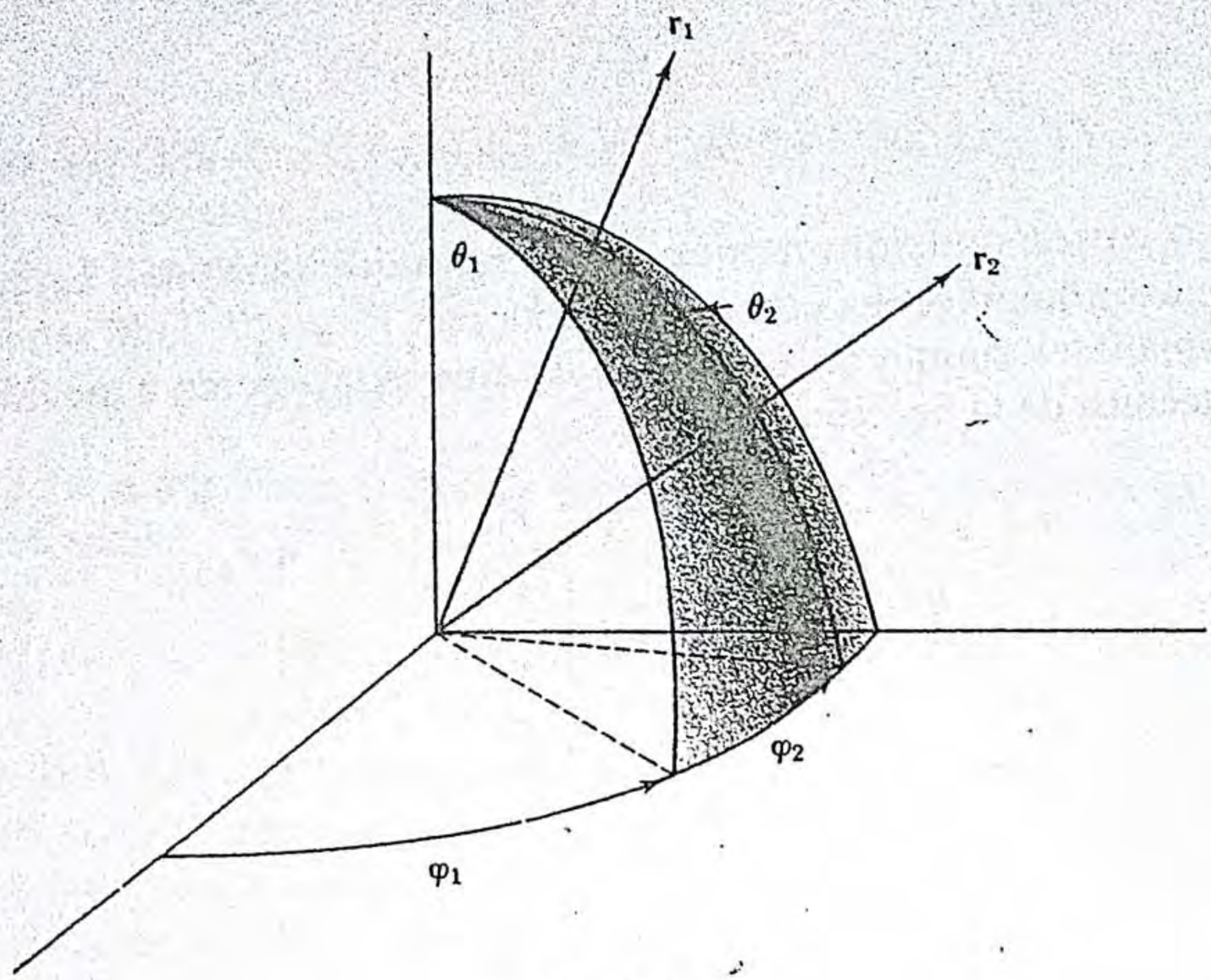


Fig. 16.4

$$= \frac{1}{\rho_1}\delta(\rho_1 - \rho_2)\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z_1-z_2)}\,dk, \quad (16.172)$$

utilizando el Ejercicio 12.6.5 y la Ec. 15.21*d*. Sin embargo, ¿a qué se debe esta selección? ¿Cuál es la causa de la suma para la dependencia en φ y de la integración para la dependencia en z? El requisito de que la dependencia acimutal sea de valor simple cuantifica m y consecuentemente la suma. No es de esperarse tal restricción en k.

Para evitar los problemas posteriores con los valores negativos de k, se vuelve a establecer la Ec. 16.172 en la forma

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\rho_1}\delta(\rho_1 - \rho_2)\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos k(z_1 - z_2)\,dk, \quad (16.172a)$$

utilizando el valor principal de Cauchy. Se supone un desarrollo similar de la función de Green

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g_m(\rho_1, \rho_2)e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\cos k(z_1 - z_2)\,dk, \quad (16.173)$$

en que los coeficientes dependientes de ρ, $g_m(\rho_1, \rho_2)$ deben determinarse. Sustituyendo en la Ec. 16.157, ahora en coordenadas cilíndricas circulares, se encuentra que si $g_m(\rho_1, \rho_2)$ satisface

$$\frac{d}{d\rho_1}\left[\rho_1 \frac{dg_m}{d\rho_1}\right] - \left[k^2\rho_1 + \frac{m^2}{\rho_1}\right] g_m = -\delta(\rho_1 - \rho_2), \tag{16.174}$$

entonces la Ec. 16.157 queda satisfecha.

El operador en la Ec. 16.174 se identifica como el operador de Bessel modificado (en la forma autoadjunta). En consecuencia, las soluciones de la ecuación homogénea correspondiente son $u_1 = I_m(k\rho)$, $u_2 = K_m(k\rho)$. Del mismo modo que en el caso de la coordenada polar esférica, se requiere que G sea finita en $\rho_1 = 0$ y que desaparezca conforme $\rho_1 \to \infty$. Siendo así, la técnica de la Sección 16.5 proporciona

$$g_m(\rho_1, \rho_2) = -\frac{1}{A} I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>). \tag{16.175}$$

Esto corresponde a la Ec. 16.128. La constante A se obtiene del wronskiano

$$I_m(k\rho)K_m'(k\rho) - I_m'(k\rho)K_m(k\rho) = \frac{A}{p(k\rho)}. \tag{16.175a}$$

De acuerdo con el Ejercicio 11.5.10, $A = -1$ y

$$g_m(\rho_1, \rho_2) = I_m(k\rho_<)\, K_m(k\rho_>). \tag{16.176}$$

En consecuencia, la función de Green cilíndrica es

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)} \cos k(z_1 - z_2)\, dk. \end{aligned} \tag{16.177}$$

El Ejercicio 16.6.10 constituye un caso especial de este resultado.

EJEMPLO 16.6.1 DISPERSION EN LA MECANICA CUANTICA

Como ejemplo concluyente de la función de Green, consideremos un problema de dispersión en la mecánica cuántica. Un haz de partículas, representado por $e^{ik_0 z}$, se dispersa parcialmente. La onda dispersada (onda saliente) tiene la forma asintótica

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} f(r, \theta) e^{ik_0 r}. \tag{16.178}$$

Habremos de considerar que la función de onda total $\psi(\mathbf{r})$ es

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} + \Phi(\mathbf{r}). \tag{16.179}$$

Siendo así, al suponer que la probabilidad de dispersión es mucho menor de uno, la ecuación de onda de Schrödinger puede *aproximarse* mediante[1]

$$(\nabla^2 + k_0^2)\,\Phi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})e^{ik_0 z}. \tag{16.180}$$

Aquí,

$$\frac{\hbar^2}{2m}\,U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}), \quad \text{potencial de dispersión (perturbación)} \tag{16.181}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\,k_0^2 = E, \quad \text{energía total.} \tag{16.182}$$

Ahora procedemos a resolver la Ec. 16.180, una ecuación diferencial no homogénea. El operador diferencial ∇^2 genera un conjunto contínuo de funciones propias.

$$\nabla^2\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = -k^2\,\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \tag{16.183}$$

en donde

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{16.184}$$

Estas funciones propias forman un conjunto continuo pero ortonormal en el sentido de que

$$\int \psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r})\,d^3r = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tag{16.185}$$

(cf. Ec. 15.21*d*).[2] Habremos de utilizar estas funciones propias para derivar la función de Green.

Se desarrolla $\Phi(\mathbf{r}_1)$ en estas funciones propias

$$\Phi(\mathbf{r}_1) = \int A_{\mathbf{k}_1}\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1)\,d^3k_1 \tag{16.186}$$

es decir una integral de Fourier. Sustituyendo la Ec. 16.186 en la Ec. 16.180 y utilizando la Ec. 16.183, se obtiene

$$\int A_{\mathbf{k}}(k_0^2 - k^2)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\,d^3k = U(\mathbf{r})e^{ik_0 z}. \tag{16.187}$$

Utilizando la ahora ya conocida técnica de multiplicar por $\psi^*_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r})$ e integrando sobre las coordenadas de espacio, se tiene

$$\int A_{\mathbf{k}_1}(k_0^2 - k_1^2)\,d^3k_1 \int \psi^*_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r})\,d^3r = A_{\mathbf{k}_2}(k_0^2 - k_2^2)$$
$$= \int \psi^*_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r})U(\mathbf{r})e^{ik_0 z}\,d^3r. \tag{16.188}$$

[1] El término $U(r)\Phi(r)$ se desprecia.

[2] $d^3r = dx\,dy\,dz$, un elemento de volumen (tridimensional) en el espacio $\mathbf{r}$.

Resolviendo para $A_{\mathbf{k}_2}$ y sustituyendo en la Ec. 16.186

$$\Phi(\mathbf{r}_2) = \int [(k_0^2 - k_2^2)^{-1} \int \psi_{\mathbf{k}_2}^*(\mathbf{r}_1) U(\mathbf{r}_1) e^{ik_0 z_1} \, d^3 r_1] \psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_2) \, d^3 k_2 . \tag{16.189}$$

En consecuencia,

$$\Phi(\mathbf{r}_1) = \int \psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1)(k_0^2 - k_1^2)^{-1} \, d^3 k_1 \int \psi_{\mathbf{k}_1}^*(\mathbf{r}_2) U(\mathbf{r}_2) e^{ik_0 z_2} \, d^3 r_2 . \tag{16.190}$$

sustituyendo $\mathbf{k}_2$ por $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{r}_1$ por $\mathbf{r}_2$ para concordar con la Ec. 16.186. Invirtiendo el orden de la integración, se tiene

$$\Phi(\mathbf{r}_1) = - \int G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) U(\mathbf{r}_2) e^{ik_0 z_2} \, d^3 r_2 , \tag{16.191}$$

en donde $G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, la función de Green está definida por

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \frac{\psi_{\mathbf{k}_1}^*(\mathbf{r}_2) \psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1)}{k_1^2 - k_0^2} \, d^3 k_1 \tag{16.192}$$

lo cual es análogo a la Ec. 9.91 de la Sección 9.4 para las funciones propias *discretas*. La Ec. 16.191 debe compararse con la solución de la función de Green para la ecuación de Poisson (16.116).

Probablemente sea adecuada la evaluación de esta integral para enfatizar una vez más la importancia vital de las condiciones limitantes. Utilizando las funciones propias de la Ec. 16.183 y

$$d^3 k = k^2 \, dk \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{16.193}$$

se obtiene

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\rho \cos\theta}}{k^2 - k_0^2} \, d\varphi \operatorname{sen} \theta \, d\theta k^2 \, dk. \tag{16.194}$$

Aquí, $k\rho \cos \theta$ ha sustituido a $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ con $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ indicando el eje polar en el espacio k. La integración sobre φ mediante inspección permite recuperar el término 2π. Siendo así, la integración en θ origina

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2\pi^2 \rho i} \int_0^\infty \frac{\operatorname{senh} ik\rho}{k^2 - k_0^2} \, k \, dk, \tag{16.195}$$

y ya que el *integrando* es una función *par* de k, se puede establecer

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi^2 \rho i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\kappa \sinh i\kappa}{\kappa^2 - \sigma^2} \, d\kappa; \tag{16.196}$$

en donde el último paso se considera en forma anticipada a la evaluación de $G_{k_0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ como integral de contorno. Los símbolos κ y σ ($\sigma > 0$) representan $k\rho$ y $k_0\rho$, respectivamente.

Separando la integral en dos partes de modo que cada una de las mismas pueda indicarse a modo de una integral de contorno adecuada, se ob-

tiene

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{8\pi^2\rho i}\oint_{C_1} \frac{\kappa e^{i\kappa}\, d\kappa}{\kappa^2 - \sigma^2} + \frac{1}{8\pi^2\rho i}\oint_{C_2} \frac{\kappa e^{-i\kappa}\, d\kappa}{\kappa^2 - \sigma^2}. \tag{16.197}$$

El contorno C_1 está cerrado por un semicírculo en el plano medio superior, C_2 por un semicírculo en el plano medio inferior. Estas integrales han sido evaluadas en el Cap. 7 mediante la sección apropiada de semicírculos infinitesimales que se encuentran alrededor de los puntos singulares $\kappa = \pm\sigma$. Como procedimiento alternativo, primeramente podemos desplazar los puntos singulares del eje real al sustituir σ por $\sigma + i\gamma$ y luego, después de la evaluación, considerando el límite como $\gamma \to 0$.

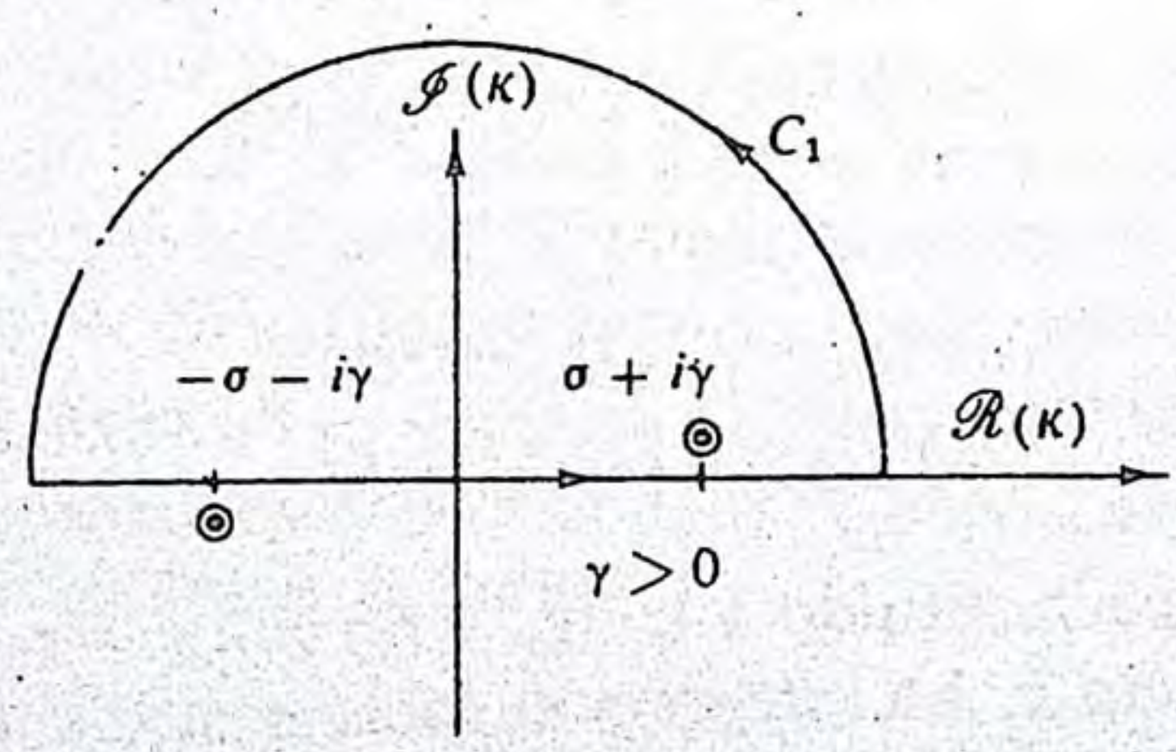
Para γ *positiva,* el contorno C_1 encierra el punto singular $\kappa = \sigma + i\gamma$ y la primera integral contribuye con

$$2\pi i \cdot \tfrac{1}{2}e^{i(\sigma + i\gamma)}.$$

De la segunda integral también se obtiene

$$2\pi i \cdot \tfrac{1}{2}e^{i(\sigma + i\gamma)},$$

en que la singularidad encerrada es $\kappa = -(\sigma + i\gamma)$. Regresando a la Ec. 16.197 y permitiendo que $\gamma \to 0$, se tiene



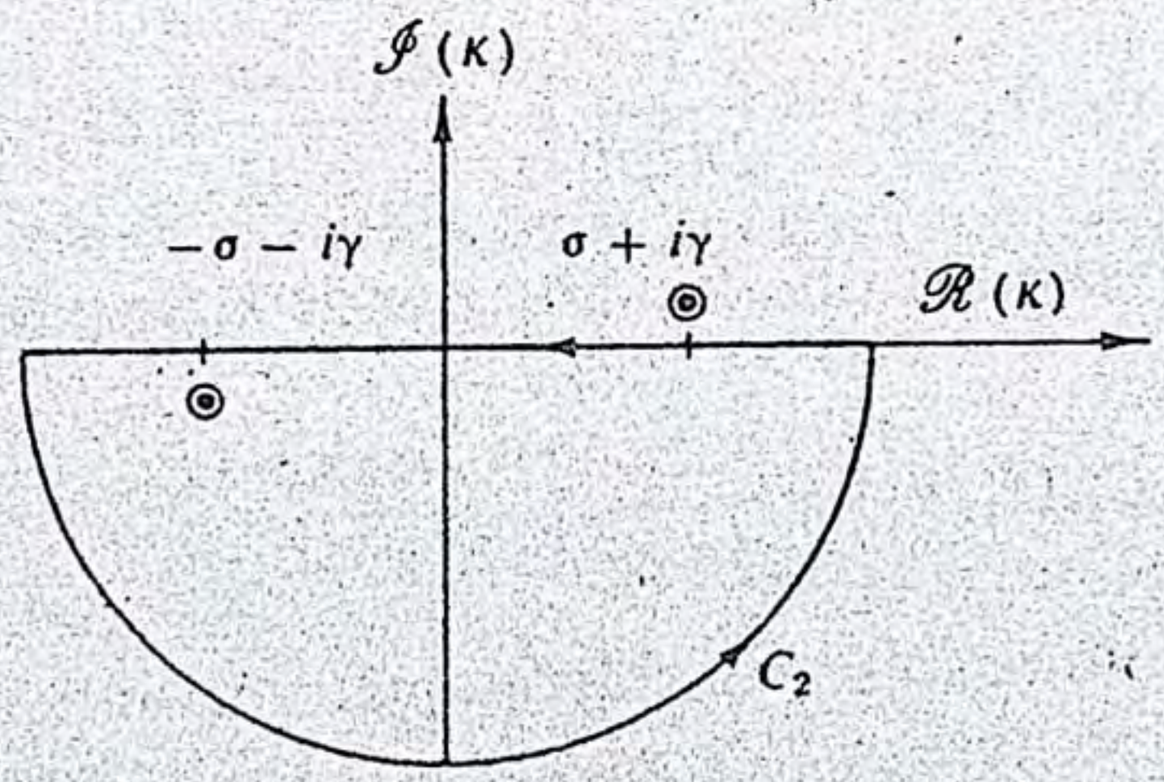


Fig. 16.5 Contornos posibles de integración de la función de Green

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\rho} e^{i\sigma}$$

$$= \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}, \tag{16.198}$$

lo cual concuerda totalmente con el Ejercicio 8.6.9. Este resultado depende del hecho de comenzar con γ positiva. En caso de haber escogido γ negativa, la función de Green habría incluido $e^{-i\sigma}$, lo cual corresponde a una onda *entrante*. La selección de γ positiva está determinada por las condiciones limitantes que se requiera satisfacer.

Es de hacerse notar que las Ecs. 16.191 y 16.198 constituyen una solución exacta de la Ec. 16.180. Sin embargo, la Ec. 16.180, que frecuentemente se denomina aproximación de *Born*, representa tan solo una primera aproximación del sistema físico verdadero. Para mayores detalles acerca de la aproximación de Born véase el Ejercicio 16.6.13.

EJERCICIOS

16.6.1 (a) Ecuentre la función de Green para la ecuación de Helmholz tridimensional, Ejercicio 8.6.9, cuando la onda es una onda estacionaria.

(b) ¿En qué forma está relacionada la función de Green con las funciones de Bessel esféricas?

16.6.2 La ecuación de Helmholtz homogénea

$$\nabla^2\varphi + \lambda^2\varphi = 0$$

tiene los valores propios λ_i^2 y las funciones propias φ_i. Demuestre que la función de Green correspondiente que satisface

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \lambda^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

puede indicarse en la forma

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\mathbf{r}_1)\,\varphi_i(\mathbf{r}_2)}{\lambda_i^2 - \lambda^2}.$$

Un desarrollo de esta forma se denomina desarrollo bilineal. Si la función de Green se encuentra disponible en la *forma cerrada*, esto proporciona un procedimiento para la generación de las funciones generadoras.

16.6.3 Un potencial electrostático (unidades mks) está definido por

$$\varphi(r) = \frac{Z}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^{-ar}}{r}.$$

Reconstruya la distribución de carga eléctrica que produce este potencial. Observe que $\varphi(r)$ desaparece exponencialmente para r grande, demostrando así que la carga neta es cero.

Respuesta. $\rho(r) = Z\,\delta(r) - \dfrac{Za^2}{4\pi}\dfrac{e^{-ar}}{r}$.

16.6.4 Transforme la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(r)}{dr^2} - k^2\,y(r) + V_0\frac{e^{-r}}{r}\,y(r) = 0,$$

y las condiciones limitantes $y(0) = y(\infty) = 0$ en una ecuación integral de Fredholm de la forma

$$y(r) = \lambda\int_0^\infty G(r,t)\,\frac{e^{-t}}{t}\,y(t)\,dt.$$

Las cantidades V_0 y k^2 son constantes. La ecuación diferencial se deriva de la ecuación de onda de Schrödinger con un potencial de mesón

$$\lambda = V_0$$

$$G(r,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}e^{-kt}\operatorname{senh} kr, & 0 \leqslant r < t, \\[2ex] \dfrac{1}{k}e^{-kr}\operatorname{senh} kt, & t < r < \infty. \end{cases}$$

16.6.5 Un anillo conductor cargado de radio a (Ejemplo 12.3.3) se puede describir por medio de

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi a^2}\,\delta(r-a)\,\delta(\cos\theta).$$

Utilizando la función de Green conocida para este sistema, encuentre el potencial electrostático.
Sugerencia. El Ejercicio 12.6.3 es de utilidad.

16.6.6 Cambiando una constante de separación de k^2 a $-k^2$ y estableciendo la discontinuidad de la primera derivada en la dependencia en z, demuestre que

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{4\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\,J_m(k\rho_1)\,J_m(k\rho_2)\,e^{-k|z_1-z_2|}\,dk.$$

Sugerencia. El término requerido $\delta(\rho_1 - \rho_2)$ se puede obtener del Ejercicio 15.1.2.

16.6.7 Derive el desarrollo

$$\frac{\exp[ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|]}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = ik\sum_{l=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} j_l(kr_1)h_l^{(1)}(kr_2) \\ j_l(kr_2)h_l^{(1)}(kr_1) \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta_1,\varphi_1)\,Y_l^{m*}(\theta_2,\varphi_2), \quad \begin{matrix} r_1 < r_2 \\ r_1 > r_2. \end{matrix}$$

Sugerencia. El lado izquierdo se conoce como función de Green. Suponga un de-

sarrollo armónico esférico y trabaje con la dependencia radial restante. La relación de cierre armónica esférica, Ejercicio 12.6.6, abarca la dependencia angular.

16.6.8 De acuerdo con la función de Green esférica del Ejercicio 16.6.7, derive el desarrollo de onda planal

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\gamma),$$

en donde γ es el ángulo incluido entre $\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}$. Esta es la ecuación de Rayleigh del Ejercicio 12.4.7.

Sugerencia. Considere $r_2 \gg r_1$ de modo que

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to r_2 - \mathbf{r}_{20}\circ\mathbf{r}_1 = r_2 - \frac{\mathbf{k}\circ\mathbf{r}_1}{k}.$$

Permita que $r_2 \to \infty$ y cancele el factor de e^{ikr_2}/r_2.

16.6.9 De acuerdo con los resultados de los Ejercicios 16.6.7 y 16.6.8, demuestre que

$$e^{ix} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(x).$$

16.6.10 A partir del desarrollo coordenado cilíndrico circular de la función de Green de Laplace (Ec. 16.177), demuestre que

$$\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K_0(k\rho)\cos kz\, dk.$$

El mismo resultado se obtiene directamente en el Ejercicio 15.3.6(c).

16.6.11 Considerando que

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

es una función propia de

$$(\nabla^2 + k^2)\,\psi_k(\mathbf{r}) = 0$$

(Ecs. 16.183 y 16.184), demuestre que la función de Green infinita de $\mathscr{L} = \nabla^2$ puede desarrollarse en la forma

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\frac{d^3k}{k^2}.$$

16.6.12 Utilizando las transformadas de Fourier, demuestre que la función de Green que satisface la ecuación de Helmholtz no homogénea

$$(\nabla^2 + k_0^2)\, G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

es

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}}{k^2 - k_0^2}\, d^3k,$$

lo cual concuerda con la Ec. 16.192.

16.6.13 La ecuación de Schrödinger exacta para un problema de dispersión puede indicarse en la forma

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + k^2\psi(\mathbf{r}) = -\left[-\frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\right].$$

(a) Demuestre que esta ecuación diferencial puede volver a establecerse en la forma

$$\psi(\mathbf{r}_1) = e^{ik_0z_1} - \int \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}_2) \frac{e^{ik|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\psi(\mathbf{r}_2)\, d^3r_2 .$$

¿De dónde procede el término $e^{ik_0z_1}$?

(b) Desarrolle la solución de la ecuación integral anterior en la forma de una serie de Neumann. Demuestre que el primer término que implica el potencial de dispersión es la aproximación de Born, Ecs. 16.191 y 16.198.

16.6.14 La ecuación básica de la teoría de difracción escalar de Kirchhoff es

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_2}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\nabla\psi(\mathbf{r}_2) - \psi(\mathbf{r}_2)\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right].d\sigma_2$$

en donde ψ satisface la ecuación de Helmholtz homogénea y $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Derive esta ecuación. Suponga que $\mathbf{r}_1$ es interior a la superficie cerrada S_2.

Sugerencia. Utilice el teorema de Green

REFERENCIAS

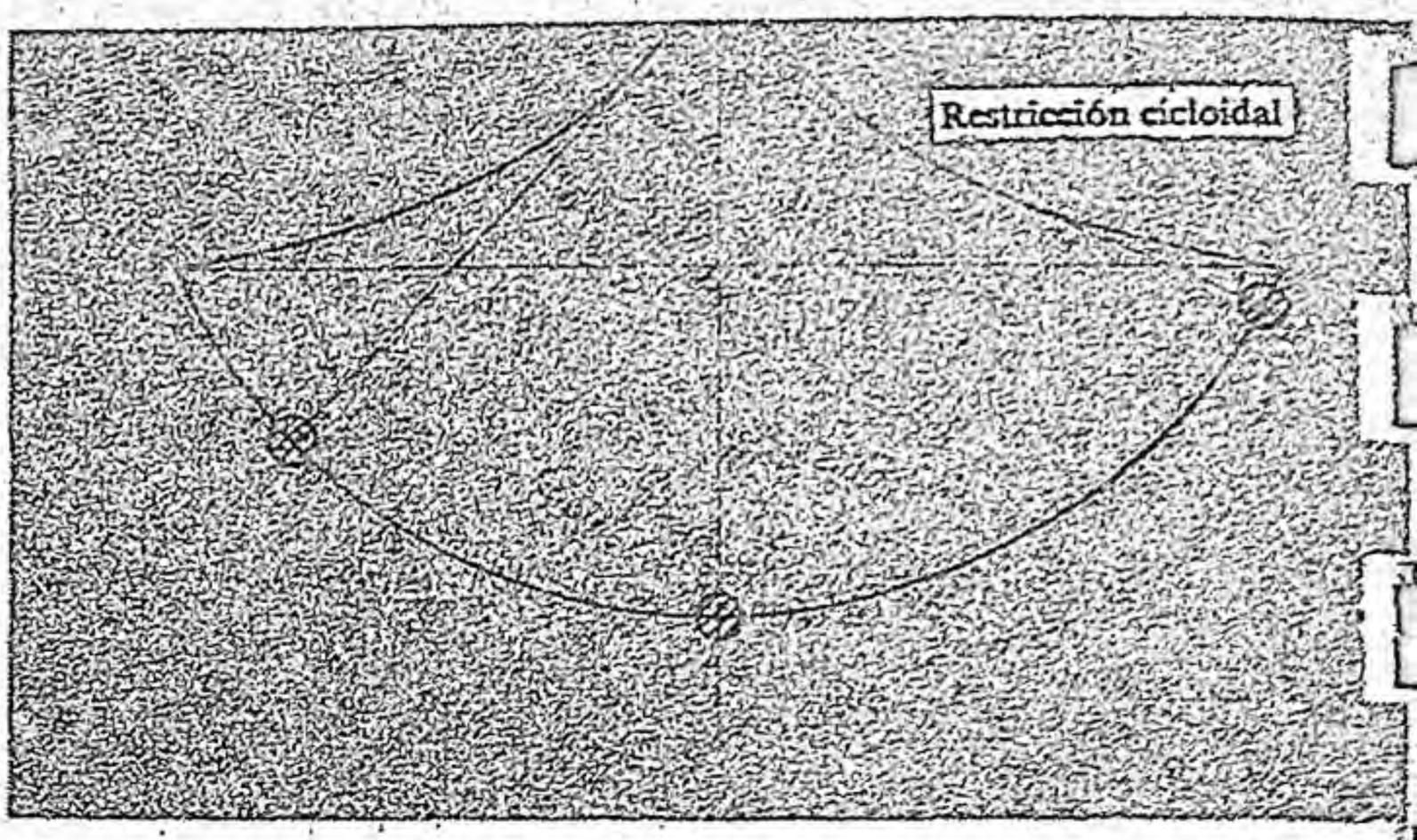
BOCHER, M., *An Introduction to the Study of Integral Equations.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 10. Nueva York: Hafner (1960). Una introducción de bastante utilidad a las ecuaciones integrales.

COURANT, R. y D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics,* Vol. I (edición en inglés). Nueva York: Interscience (1953). Esta obra constituye uno de los trabajos clásicos de la física matemática. Publicado originalmente en alemán en 1924, la edición revisada en inglés constituye una excelente referencia para un tratamiento riguroso de las ecuaciones integrales, las funciones de Green y para una amplia variedad de otros temas de la física matemática.

HILDEBRAND, F. B., *Methods of Applied Mathematics.* Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall (1952). El Capítulo 4 es un resumen detallado y de lectura sencilla de las ecuaciones integrales.

LOVITT, W. V., *Linear Integral Equations.* Nueva York: Dover (1950).

MORSE, P. M. y H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics.* Nueva York: McGraw-Hill (1953). El Capítulo 7 se refiere a una descripción detallada y completa de las funciones de Green desde el punto de vista de la física matemática. Sin embargo, es de hacerse notar que Morse y Feshbach seleccionan frecuentemente una fuente de $4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ en lugar de la nuestra $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Se dedica mucha atención a las regiones limitadas.



CAPITULO 17

CÁLCULO DE VARIACIONES

17.1 Una Variable Dependiente y una Independiente

Concepto de Variación. El cálculo de las variaciones implica los problemas en que la cantidad por reducirse al mínimo (o aumentarse al máximo) aparece en la forma de una integral. Como caso más simple, sea

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x)\, dx. \tag{17.1}$$

En este caso, J es la cantidad que adquiere un valor extremo. Bajo el signo de integral, f se *conoce* como función de las variables indicadas y, $y_x \equiv dy/dx$, y x, pero la dependencia de y en x no es fija, es decir $y(x)$ es *desconocida.* Esto significa que aun cuando la integral es de x_1 a x_2 la trayectoria de integración exacta no se conoce (Fig. 17.1).

Se pretende escoger la trayectoria de integración a través de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) para reducir J al mínimo. Desde un punto de vista estricto, determinaremos los valores extremos de J: los puntos mínimo, máximo o de silleta. En la mayoría de los casos de interés físico, el extremo será un mínimo.

Este problema es considerablemente más dificultoso que el problema correspondiente en el cálculo diferencial. De hecho, pudiera no existir una solución. En el cálculo diferencial, el mínimo se determina mediante la comparación de $y(x_0)$ con $y(x)$, en donde x varía sobre puntos vecinos. Aquí supondremos la existencia de una trayectoria óptima, es decir una trayectoria accesible para la cual J es un extremo, y luego procedemos a comparar J para nuestra trayectoria óptima (desconocida) con la obtenida

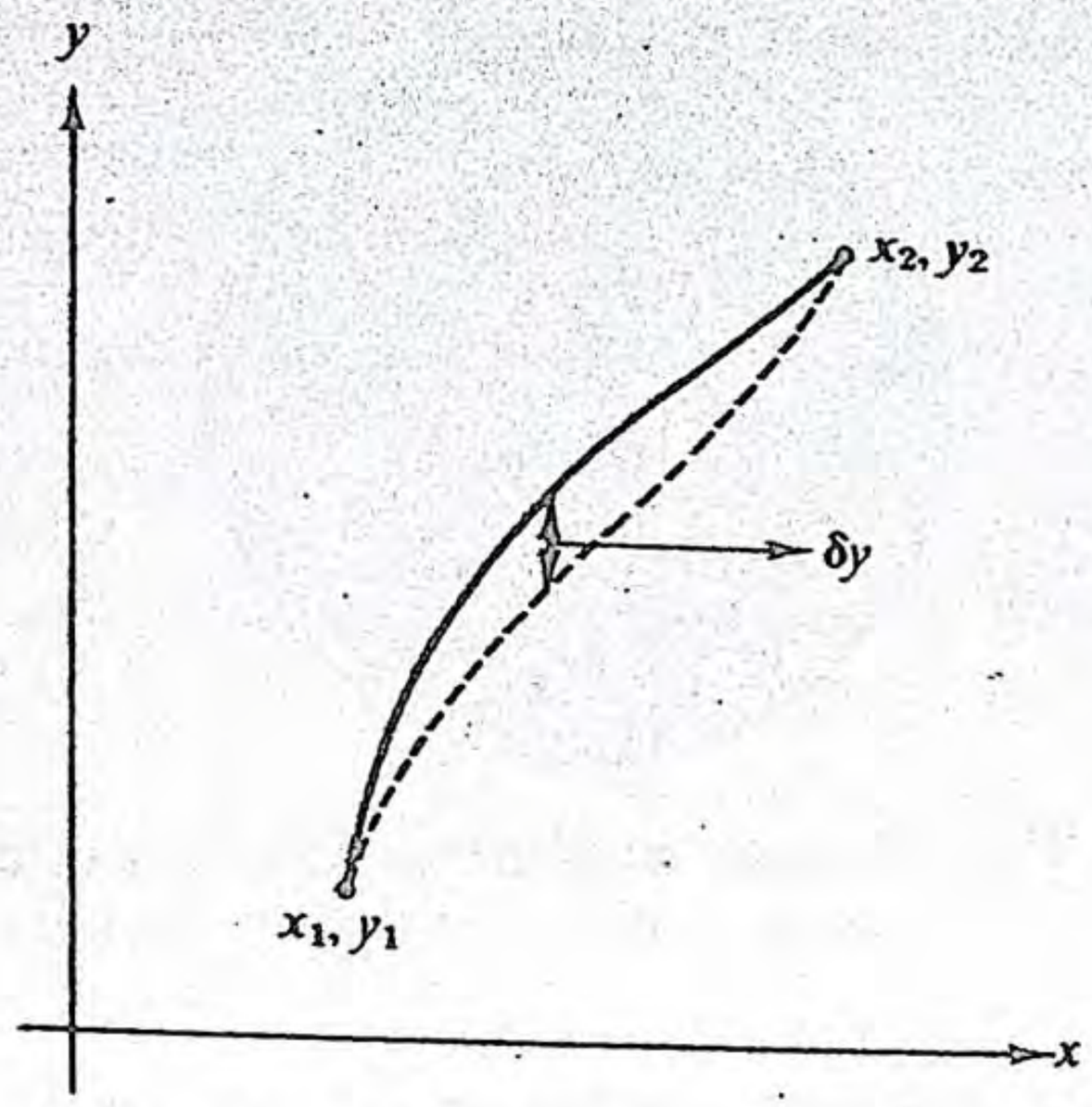


Fig. 17.1 Una trayectoria variable

de las trayectorias vecinas. En la Fig. 17.1 se muestran dos trayectorias posibles. (Evidentemente, existe un número infinito de posibilidades.) La diferencia entre estas dos para cierta x se denomina la variación de y, δy, y se describe convenientemente mediante la introducción de una nueva función $\eta(x)$ para definir la deformación arbitraria de la trayectoria y un factor de escala α para proporcionar la magnitud de la variación. La función $\eta(x)$ es arbitraria, excepto por dos limitaciones. Primeramente

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \tag{17.2}$$

lo cual significa que todas las trayectorias variadas deben pasar a través de los puntos terminales fijos. En segundo lugar, tal como se describirá brevemente, $\eta(x)$ debe tener la capacidad de diferenciación; es decir, no es posible el uso de

$$\begin{aligned} \eta(x) &= 1, \qquad x = x_0, \\ &= 0, \qquad x \neq x_0, \end{aligned} \tag{17.3}$$

pero podemos seleccionar $\eta(x)$ de modo que tenga una forma similar a las funciones utilizadas para representar la función delta de Dirac (Capítulos 8 y 16), de modo que $\eta(x)$ difiera de cero solamente en una región infinitesimal.[1] Siendo así, con la trayectoria definida con α y $\eta(x)$,

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x), \tag{17.4}$$

y

$$\delta y = y(x, \alpha) - y(x, 0) = \alpha\,\eta(x). \tag{17.5}$$

[1] Cf. Jeffreys, H. y B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3a. ed., Cambridge: Cambridge University Press (1966), Capítulo 10, para una descripción más completa de este tema.

Seleccionemos $y(x, \alpha = 0)$ como la trayectoria desconocida que reduce J al mínimo. De este modo, $y(x, \alpha)$ describe una trayectoria vecina. En la Ec. 17.1, J se conoce como una función de nuestro nuevo parámetro α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y_x(x, \alpha), x]\, dx, \tag{17.6}$$

y nuestra condición para un valor extremo es que

$$\left[\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} = 0, \tag{17.7}$$

lo cual es análogo a la desaparición de la derivada dy/dx en el cálculo diferencial.

Ahora la dependencia de α de la integral se encuentra contenida en $y(x, \alpha)$ e $y_x(x, \alpha) = (\partial/\partial x)y(x, \alpha)$. En consecuencia [1]

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{\partial y_x}{\partial \alpha}\right] dx. \tag{17.8}$$

De acuerdo con la Ec. 17.4

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x) \tag{17.9}$$

$$\frac{\partial y_x(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{d\,\eta(x)}{dx}. \tag{17.10}$$

La Ec. 17.8 se transforma en

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{d\,\eta(x)}{dx}\right) dx. \tag{17.11}$$

Integrando el segundo término por partes, se obtiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\,\eta(x)}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\, dx = \eta(x)\frac{\partial f}{\partial y_x}\bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\, dx. \tag{17.12}$$

La parte integrada desaparece mediante la Ec. 17.2 y la Ec. 17.11 se transforma en

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\right]\eta(x)\, dx = 0. \tag{17.13}$$

De este modo, α ha sido igualado a cero y, de hecho, ya no constituye una parte del problema.

[1] Observe que y e y_x se tratan como variables *independientes*.

Ocasionalmente podrá observarse la Ec. 17.13 multiplicada por α, lo cual proporciona

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)\delta y\,dx=\alpha\left[\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}$$
$$=\delta J=0. \tag{17.14}$$

Ya que $\eta(x)$ es arbitraria (como se ha descrito anteriormente), podemos seleccionar que la misma tenga el mismo signo que la expresión entre paréntesis, siempre que esta última difiera de cero. En consecuencia, el *integrando* nunca es negativo. La Ec. 17.13, nuestra condición para la existencia de un extremo, se puede satisfacer solamente cuando el término entre paréntesis por sí mismo es precisamente cero. La condición para nuestro extremo consecuentemente es una ecuación diferencial parcial,[1]

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}=0, \tag{17.15}$$

lo cual se conoce como ecuación de Euler, que puede expresarse en otras formas diversas.

Formas Alternadas de las Ecuaciones de Euler. Otra forma (Ejercicio 17.1) que frecuentemente es de utilidad es

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dx}\left(f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)=0. \tag{17.16}$$

En los problemas donde $f=f(y, y_x)$ y x no aparecen explícitamente, la Ec. 17.16 se reduce a

$$\frac{d}{dx}\left(f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)=0 \tag{17.17}$$

o

$$f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}=\text{constante} \tag{17.18}$$

Es evidente que las Ecs. 17.15 o 17.16 deben satisfacerse para que J tenga un valor extremo, es decir para que la Ec. 17.14 sea satisfecha. La Ec. 17.15 es necesaria pero de ninguna manera suficiente. Courant y Robbins ilus-

[1] Es importante conocer con precisión el significado de $\partial/\partial x$ y d/dx. Por ejemplo, si $f=f[y(x), x]$,

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

El primer término a la derecha proporciona la dependencia de x *explícita*. El segundo término proporciona la dependencia de x *implícita*.

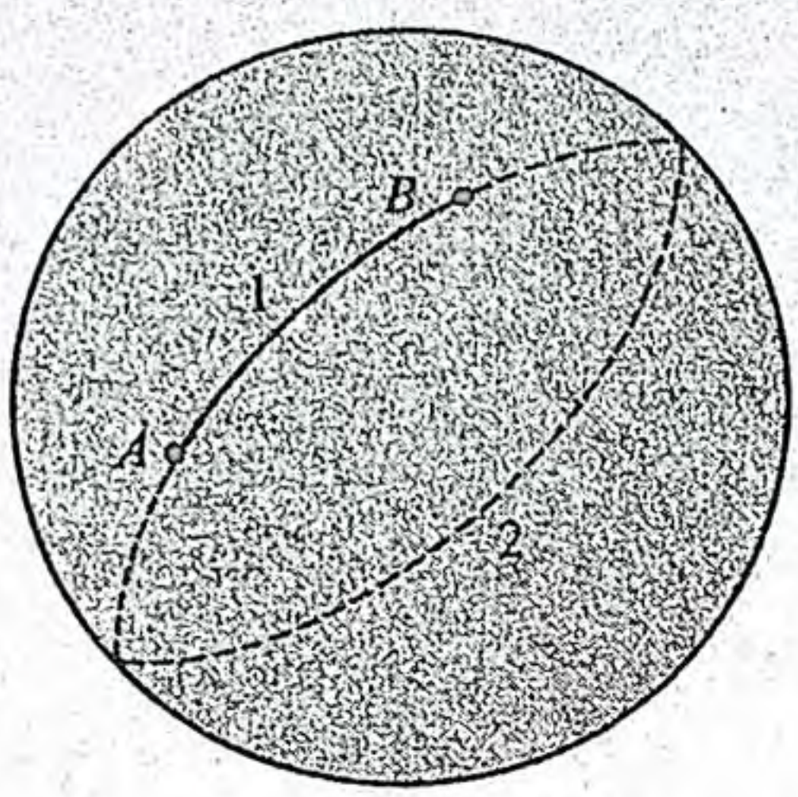


Fig. 17.2 Trayectorias extremas sobre una esfera

tran esto de manera bastante apropiada al considerar la distancia sobre una esfera entre puntos de la misma, A y B. La trayectoria (1), una ruta circular grande, se encuentra a partir de la Ec. 17.15. Sin embargo, la trayectoria (2), el resto del gran círculo a través de los puntos A y B, también satisface la ecuación de Euler. La trayectoria (2) es un máximo, pero solamente si se requiere que sea un círculo grande y luego solo cuando se forma menos de un circuito; es decir, la trayectoria (2) + n revoluciones completas también constituye una solución. En caso de requerirse que la trayectoria no sea un círculo grande, cualquier desviación de (2) aumentará la longitud. Esto difícilmente corresponde a la propiedad de un máximo local y a esto se debe la importancia de comprobar las propiedades de las soluciones de la Ec. 17.15 para determinar si satisfacen las condiciones físicas del problema específico.

EJERCICIOS

17.1.1 Demuestre la equivalencia de las dos formas de la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0.$$

17.1.2 Derive la ecuación de Euler mediante el desarrollo del *integrando* de

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y_x(x, \alpha), x]\, dx$$

en potencias de α, utilizando un desarrollo de Taylor para las dos variables (Sección 5.6).

Nota. Se debe establecer $\alpha = 0$ (después de diferenciar con respecto a α). De otro modo, se tendrán términos $2\alpha\eta\eta_x\,(\partial^2 f/\partial y\,\partial y_x)$, etc.

17.1.3 Encuentre la ecuación de Euler correspondiente a la Ec. 17.15 si $f = f(y_{xx}, y_x, y, x)$.

Respuesta. $$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_{xx}}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

con $$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$
$$\eta_x(x_1) = \eta_x(x_2) = 0.$$

17.1.4 El *integrando* $f(y,y_x,x)$ de la Ec. 17.1 tiene la forma

$$f(y,y_x,x) = f_1(x,y) + f_2(x,y)y_x.$$

(a) Demuestre que la ecuación de Euler origina

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0.$$

(b) ¿Qué implica esto en cuanto a la dependencia en la integral J sobre la selección de la trayectoria?

17.1.5 Demuestre que la condición de que

$$J = \int f(x,y)\,dx$$

tenga un valor estacionario

(a) origina que $f(x, y)$ sea independiente de y, y

(b) no proporciona información acerca de la dependencia en cualquier x.

No se obtiene una solución (continua, diferenciable). Para constituir un problema variacional significativo, es esencial la dependencia en y_x o en derivadas superiores.

17.2 Aplicaciones de la Ecuación de Euler

EJEMPLO 17.2.1 LINEA RECTA

Probablemente la aplicación más simple de la ecuación de Euler se encuentra en la determinación de la distancia más corta entre dos puntos en el plano xy. Ya que el elemento de distancia es

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = [1 + y_x^2]^{1/2}\,dx, \tag{17.19}$$

la distancia J puede indicarse en la forma

$$J = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} [1 + y_x^2]^{1/2}\, dx. \tag{17.20}$$

La comparación con la Ec. 17.1 muestra que

$$f(y, y_x, x) = (1 + y_x^2)^{1/2}. \tag{17.21}$$

Sustituyendo en la Ec. 17.16, se obtiene

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(1 + y_x^2)^{1/2}}\right] = 0 \tag{17.22}$$

o

$$\frac{1}{(1 + y_x^2)^{1/2}} = C, \qquad \text{una constante.} \tag{17.23}$$

Esto queda satisfecho con

$$y_x = a, \qquad \text{una segunda constante} \tag{17.24}$$

y

$$y = ax + b, \tag{17.25}$$

lo cual es la ecuación familiar para la línea recta. Las constantes a y b, evidentemente, se seleccionan de modo que la línea pase a través de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). En consecuencia, la ecuación de Euler predice la distancia más corta[1] entre dos puntos fijos en una línea recta.

La generalización de esto en el espacio-tiempo curvado de cuatro dimensiones da lugar al importante concepto de la relatividad denominado geodésico.

EJEMPLO 17.2.2 PELICULA DE JABON

Como segunda ilustración (Fig. 17.3), considere una superficie de revolución generada por el giro de una curva $y(x)$ alrededor del eje x. Se requiere que la curva pase a través de puntos extremos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). El problema variacional consiste en seleccionar la curva $y(x)$ de modo que el área de la superficie resultante sea mínima.

Para el elemento de área mostrado en la Fig. 17.3

$$dA = 2\pi y\, ds = 2\pi y(1 + y_x^2)^{1/2}\, dx. \tag{17.26}$$

Con lo cual la ecuación variacional es

$$J = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(1 + y_x^2)^{1/2}\, dx. \tag{17.27}$$

Despreciando el término 2π,

[1] Técnicamente se tiene un valor extremo. Mediante análisis se identifica que es un mínimo.

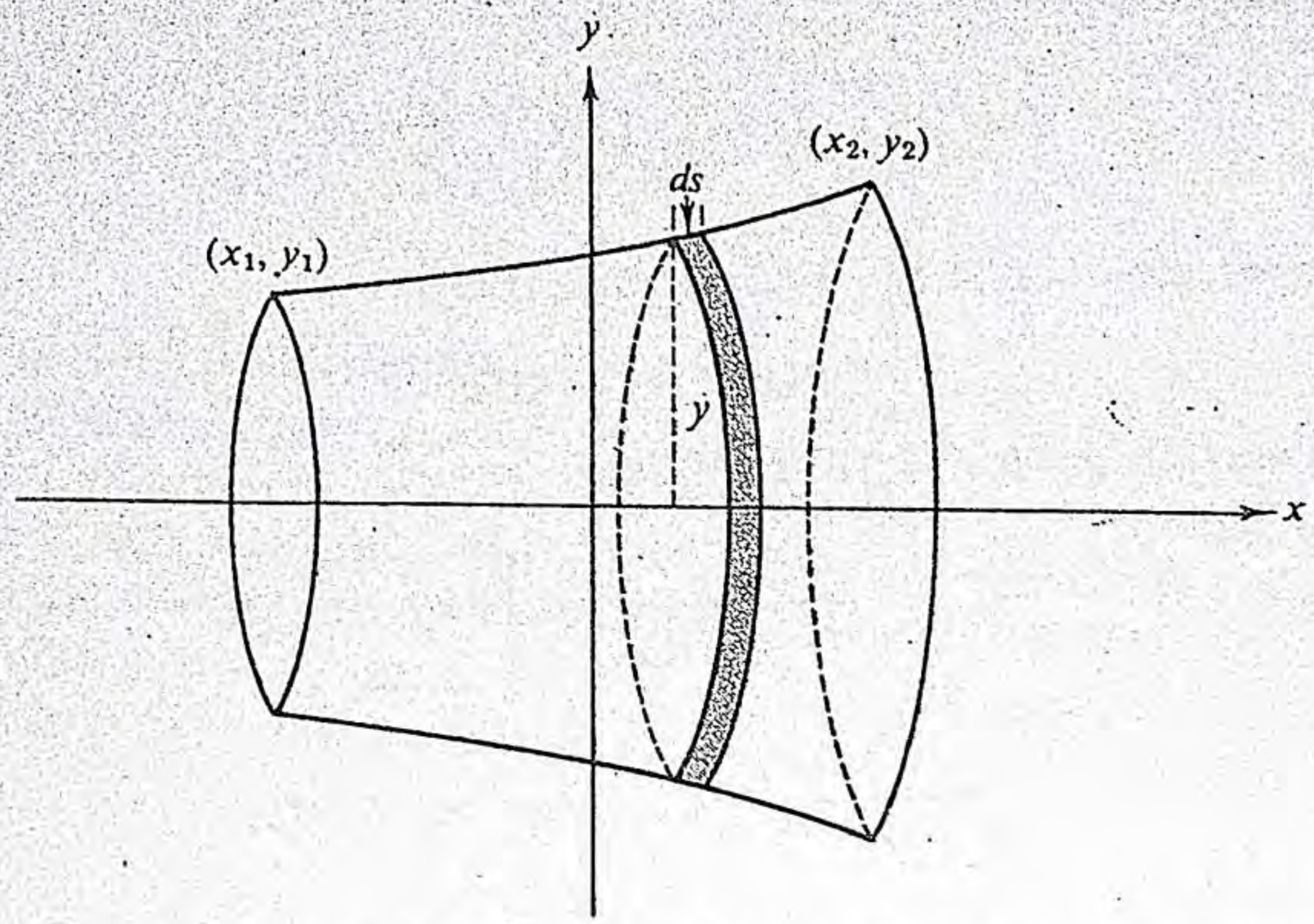


Fig. 17.3 Superficie de rotación. Problema de la película de jabón

$$f(y, y_x, x) = y(1 + y_x^2)^{1/2}. \tag{17.28}$$

Ya que $\partial f/\partial x = 0$, se puede aplicar la Ec. 17.16 directamente para obtener

$$y(1 + y_x^2)^{1/2} - yy_x^2 \frac{1}{(1 + y_x^2)^{1/2}} = c_1, \tag{17.29}$$

o

$$\frac{y}{(1 + y_x^2)^{1/2}} = c_1. \tag{17.30}$$

Elevando al cuadrado se obtiene

$$\frac{y^2}{1 + y_x^2} = c_1^2 \qquad \text{con } c_1^2 \leqslant y_{\min}^2, \tag{17.31}$$

y

$$(y_x)^{-1} = \frac{dx}{dy} = \frac{c_1}{\sqrt{y^2 - c_1^2}}. \tag{17.32}$$

Esto puede integrarse para obtener

$$x = c_1 \cosh^{-1} \frac{y}{c_1} + c_2. \tag{17.33}$$

Resolviendo para y se tiene

$$y = c_1 \cosh \left(\frac{x - c_2}{c_1}\right) \tag{17.34}$$

y nuevamente c_1 y c_2 se determinan al requerir que el coseno hiperbólico pase a través de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). El área superficial "mínima" es una catenaria de revolución o una catenoide.

Película de Jabón. Area Mínima. Este cálculo de variaciones contiene muchas trampas para quien se encuentre desprevenido. Probablemente pueda desarrollarse cierto respeto por estos peligros al considerar un problema físico específico. Considere el problema del área mínima con $(x_1, y_1) = (-x_0, 1)$, $(x_2, y_2) = (+x_0, 1)$. La superficie mínima es una película de jabón extendida sobre dos anillos de radio unitario a $x = \pm x_0$. El problema consiste en predecir la curva $y(x)$ adquirida por la película de jabón.

Tomando como referencia la Ec. 17.34, se encuentra que $c_2 = 0$ de acuerdo con la simetría del problema. Si se toma $x_0 = \frac{1}{2}$, se obtiene la ecuación trascendental para c_1,

$$1 = c_1 \cosh\left(\frac{1}{2c_1}\right). \tag{17.35}$$

Se encuentra que esta ecuación tiene dos soluciones; $c_1 = 0.2350$, originando una curva "profunda", y $c_1 = 0.8483$, originando una curva "aplanada". ¿Cuál es nuestro mínimo? ¿Cuál es la curva adquirida por la película de jabón? Antes de contestar estas preguntas, considere la situación física con los anillos separados de modo que $x_0 = 1$. Siendo así, la Ec. 17.34 se transforma en

$$1 = c_1 \cosh\left(\frac{1}{c_1}\right), \tag{17.36}$$

¡la cual *no tiene soluciones reales!* El significado físico es que los anillos de radio unitario se mueven fuera del origen y han alcanzado un punto en que la película de jabón ya no puede conservar la misma fuerza horizontal sobre cada sección vertical. El equilibrio estable ya no es posible. La película de jabón se ha roto (proceso irreversible) y ha formado una película circular sobre cada anillo (con una área total de $2\pi = 6.2832\cdots$). Esto corresponde a la solución discontinua de Goldschmidt.

La siguiente pregunta es ¿qué tan grande será x_0 para que aun pueda proporcionar una solución real a la Ec. 17.34? Permitiendo que $c_1^{-1} = p$, la Ec. 17.34 se transforma en

$$p = \cosh px_0. \tag{17.37}$$

Para encontrar $x_{0\,\text{máx}}$ se puede resolver para x_0 (igual que en la Ec. 17.33) y luego diferenciar con respecto a p, permitiendo que dx_0/dp sea igual a cero. Alternativamente, la diferenciación directa de la Ec. 17.37 con respecto a p proporciona

$$1 = \operatorname{senh} px_0[x_0 + p\, dx_0/dp].$$

El requisito de que dx_0/dp desaparezca origina

$$1 = x_0 \operatorname{senh} px_0 \tag{17.38}$$

Estas dos ecuaciones pueden combinarse para formar

$$px_0 = \coth px_0 \tag{17.39}$$

con la raíz

$$px_0 = 1.200. \tag{17.40}$$

Sustituyendo en las Ecs. 17.37 o 17.38, se obtiene

$$p = 1.811 \quad (c_1 = 0.5523) \tag{17.41}$$

y

$$x_{0\,\text{máx}} = 0.663. \tag{17.42}$$

Regresando a la pregunta de la solución para la Ec. 17.35, que describe la película de jabón, procederemos a calcular el área correspondiente a cada solución. Se tiene

$$\begin{aligned} A &= 4\pi \int_0^{x_0} y(1 + y_x^2)^{1/2}\, dx = \frac{4\pi}{c_1} \int_0^{x_0} y^2\, dx \qquad \text{(Por la Ec. 17.30)} \\ &= 4\pi c_1 \int_0^{x_0} \left(\cosh \frac{x}{c_1}\right)^2 dx \\ &= \pi c_1^2 \left[\operatorname{senh}\left(\frac{2x_0}{c_1}\right) + \frac{2x_0}{c_1}\right]. \end{aligned} \tag{17.43}$$

Para $x_0 = \frac{1}{2}$, la Ec. 17.35 origina

$$c_1 = 0.2350 \rightarrow A = 6.8456,$$

$$c_1 = 0.8483 \rightarrow A = 5.9917,$$

demostrando que la primera puede ser a lo sumo tan solo un mínimo local. Una investigación más detallada (cf. Bliss, *Calculus of Variations*,

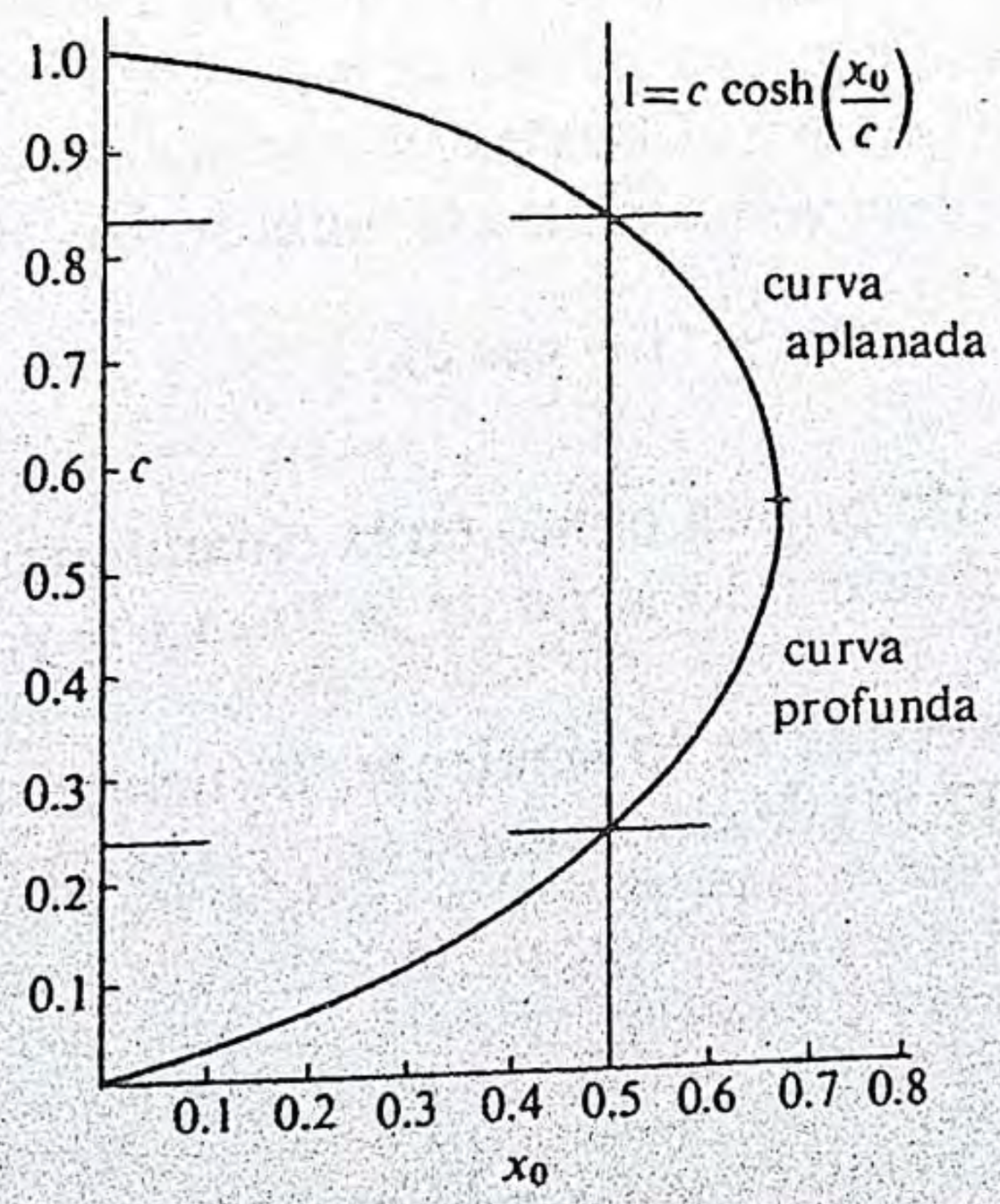


Fig. 17.4 Soluciones de la Ec. 17.34 para anillos de radio unitario a $x = \pm x_0$

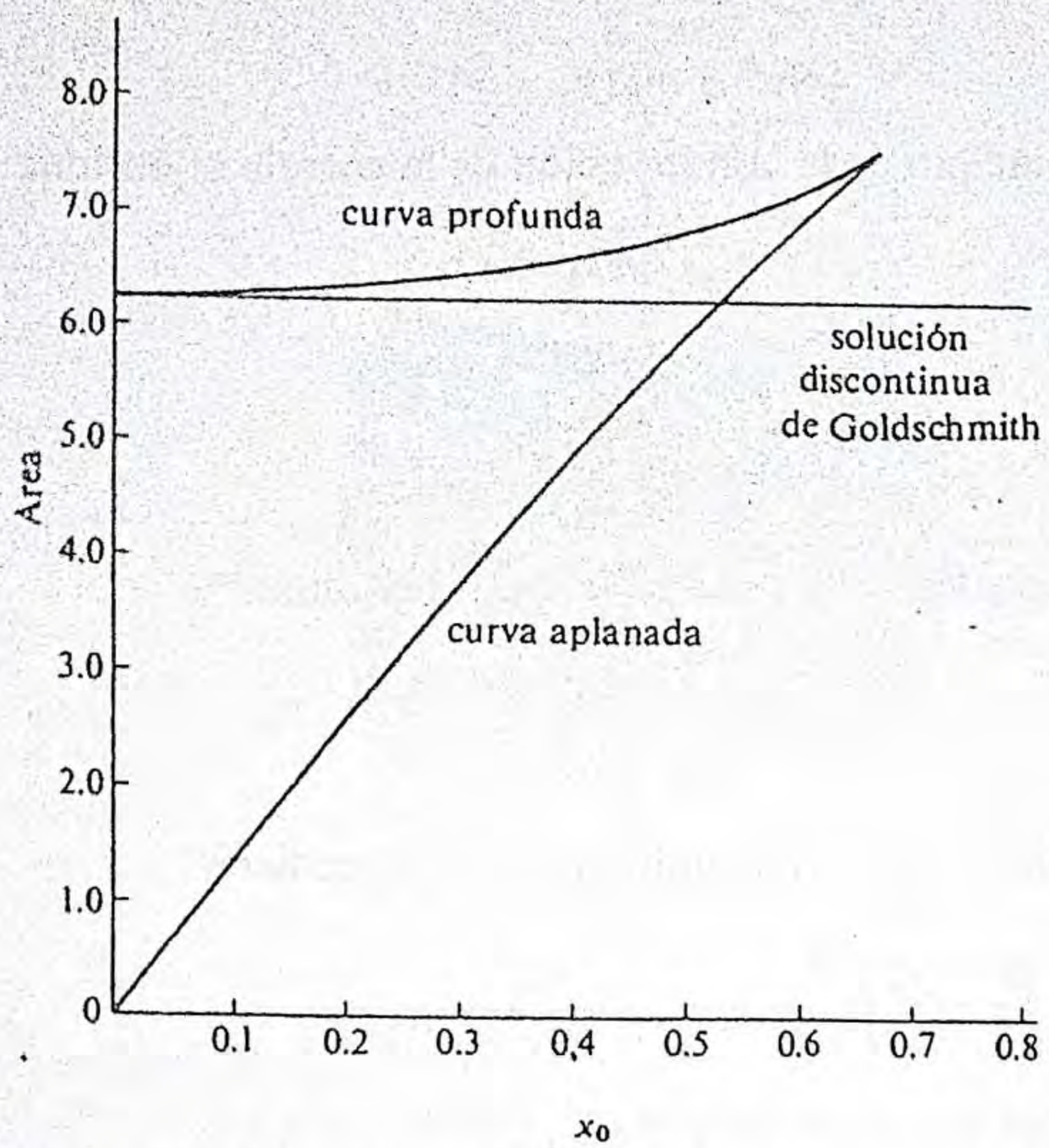


Fig. 17.5 Area catenoide (radio unitario a $x = \pm x_0$)

Capítulo IV) demuestra que esta superficie no es ni siquiera un mínimo local. Para $x_0 = \frac{1}{2}$, la película de jabón puede describirse por medio de una curva "aplanada"

$$y = 0.8483 \cosh\left(\frac{x}{0.8483}\right). \tag{17.44}$$

Esta catenoide poco profunda o "aplanada" (catenaria de revolución) será un mínimo absoluto para $0 \leqslant x_0 < 0.528$. Sin embargo, para $0.528 < x < 0.663$ su área es mayor que la correspondiente a la solución discontinua de Goldschmidt (6.2832) y tan solo es un mínimo relativo.

Para una excelente descripción de los problemas matemáticos y los experimentos con película de jabón, el lector puede consultar el texto de Courant y Robbins.

Braquistócrono. El problema físico original que dio lugar al desarrollo del cálculo de las variaciones fue el problema del braquistócrono o del tiempo más breve. Una partícula se desliza libremente a lo largo de una curva desde (x_1, y_1) hasta el origen, bajo el efecto de la gravedad. La curva se selecciona para reducir al mínimo el tiempo de descenso. En este caso, el tiempo de descenso, J, está definido por

$$J = \int_0^{x_1, y_1} \frac{ds}{v}. \tag{17.45}$$

Ya que

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg(y_1 - y) \tag{17.46}$$

mediante el principio de la conservación de la energía se obtiene

$$v = \sqrt{2g(y_1 - y)} \tag{17.47}$$

y

$$J = \int_0^{x_1} \left[\frac{1 + y_x^2}{2g(y_1 - y)}\right]^{1/2} dx. \tag{17.48}$$

Ignorando la constante $2g$, nuestra función f es ahora

$$f = \left(\frac{1 + y_x^2}{y_1 - y}\right)^{1/2}. \tag{17.49}$$

Nuevamente $\partial f/\partial x = 0$ y utilizando la Ec. 17.16 se tiene

$$\left(\frac{1 + y_x^2}{y_1 - y}\right)^{1/2} - \frac{y_x^2}{[(y_1 - y)(1 + y_x^2)]^{1/2}} = c \tag{17.50}$$

o

$$\frac{1}{[(y_1 - y)(1 + y_x^2)]^{1/2}} = c. \tag{17.51}$$

Resolviendo para y_x, se obtiene

$$y_x = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{b + y}{a - y}\right)^{1/2}, \tag{17.52}$$

en donde

$$a = y_1, \qquad b = \frac{1}{c^2} - y_1. \tag{17.53}$$

Esta ecuación diferencial probablemente pueda resolverse mejor al introducir un nuevo parámetro θ al permitir que

$$y = \frac{a - b}{2} - \frac{a + b}{2}\cos\theta. \tag{17.54}$$

Siendo así

$$dx = \frac{a + b}{2}\left(\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a + b}{2}(1 + \cos\theta)\, d\theta,^{1} \tag{17.55}$$

[1] Las identidades trigonométricas a[illegible]res de ángulo medio son de utilidad para establecer este resultado.

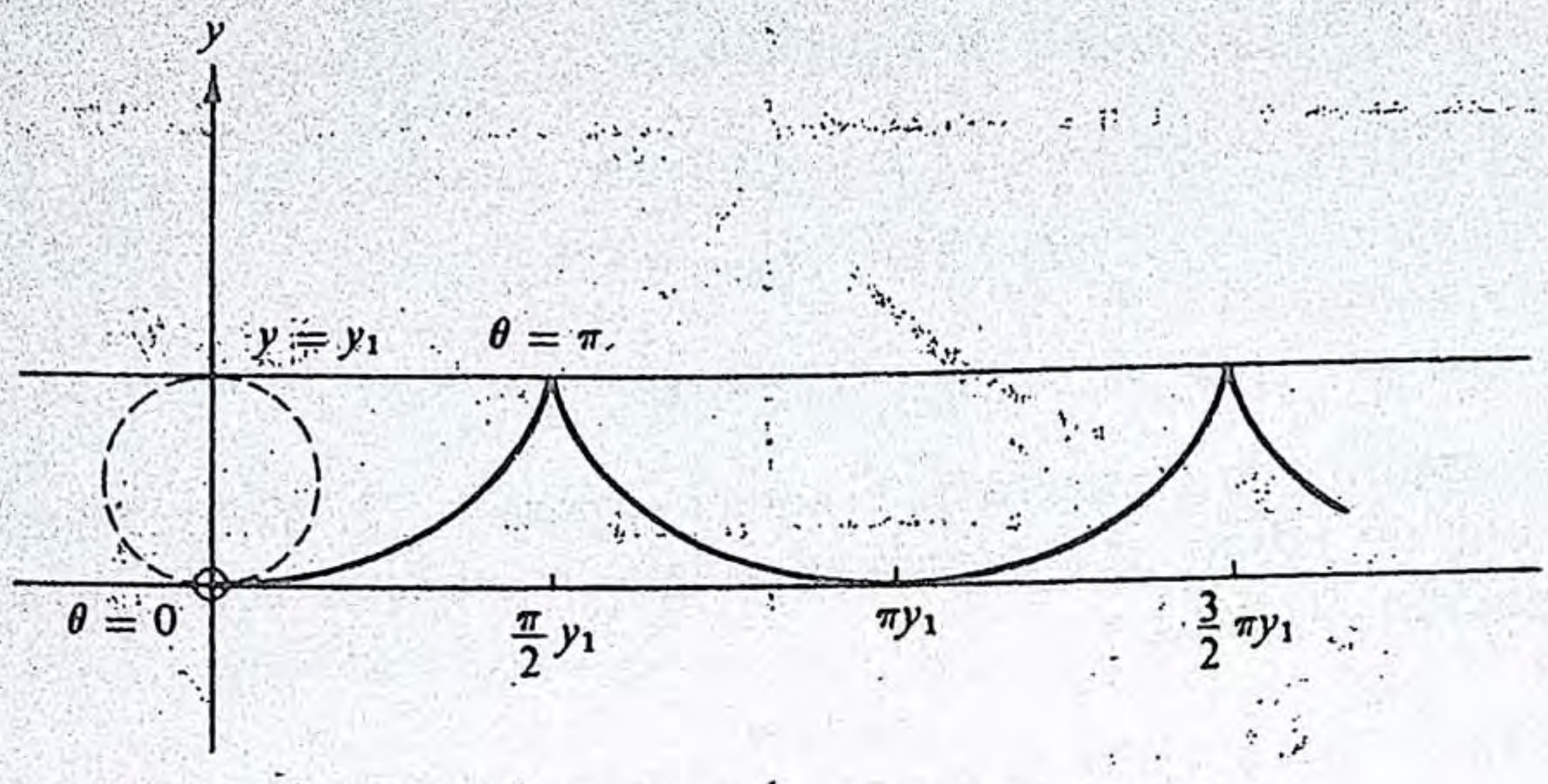


Fig. 17.6 Braquistócrono. Trayectoria cicloidal

de la Ec. 17.52, y se obtiene

$$x + d = \frac{a+b}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta)$$
$$y + b = \frac{a+b}{2}(1 - \cos\theta). \tag{17.56}$$

Estas son las ecuaciones ya conocidas de un cicloide. Los parámetros b y d, siendo ambos constantes de integración, se determinan al requerir que el cicloide pase a través de un punto (x_1, y_1) y el origen, mientras que el parámetro a se fija mediante la selección de y_1, es decir una condición inicial del problema. Para el caso bastante especial de $x_1 = (\pi/2)y_1$, los parámetros b y d desaparecen y se tiene

$$x = \frac{y_1}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta),$$
$$y = \frac{y_1}{2}(1 - \cos\theta), \tag{17.57}$$

o sea un cicloide descrito por un punto en la circunferencia de un círculo cuyo radio es $y_1/2$ rodando a lo largo de la línea $y = y_1$, de arriba hacia abajo.

Una extensión interesante es lo siguiente. El tiempo de descenso a lo largo del cicloide (Ec. 17.57) desde el punto (x_2, y_2) hasta el origen es

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_2}\left(\frac{1+y_x^2}{y_2 - y}\right)^{1/2} dx = \pi\left(\frac{y_1}{2g}\right)^{1/2}, \tag{17.58}$$

independientemente del punto de partida.[1] Compare esto con una partícula

[1] Esto se relaciona con el problema del tautócrono del Capítulo 15 (teorema de convolución de la transformada de Laplace).

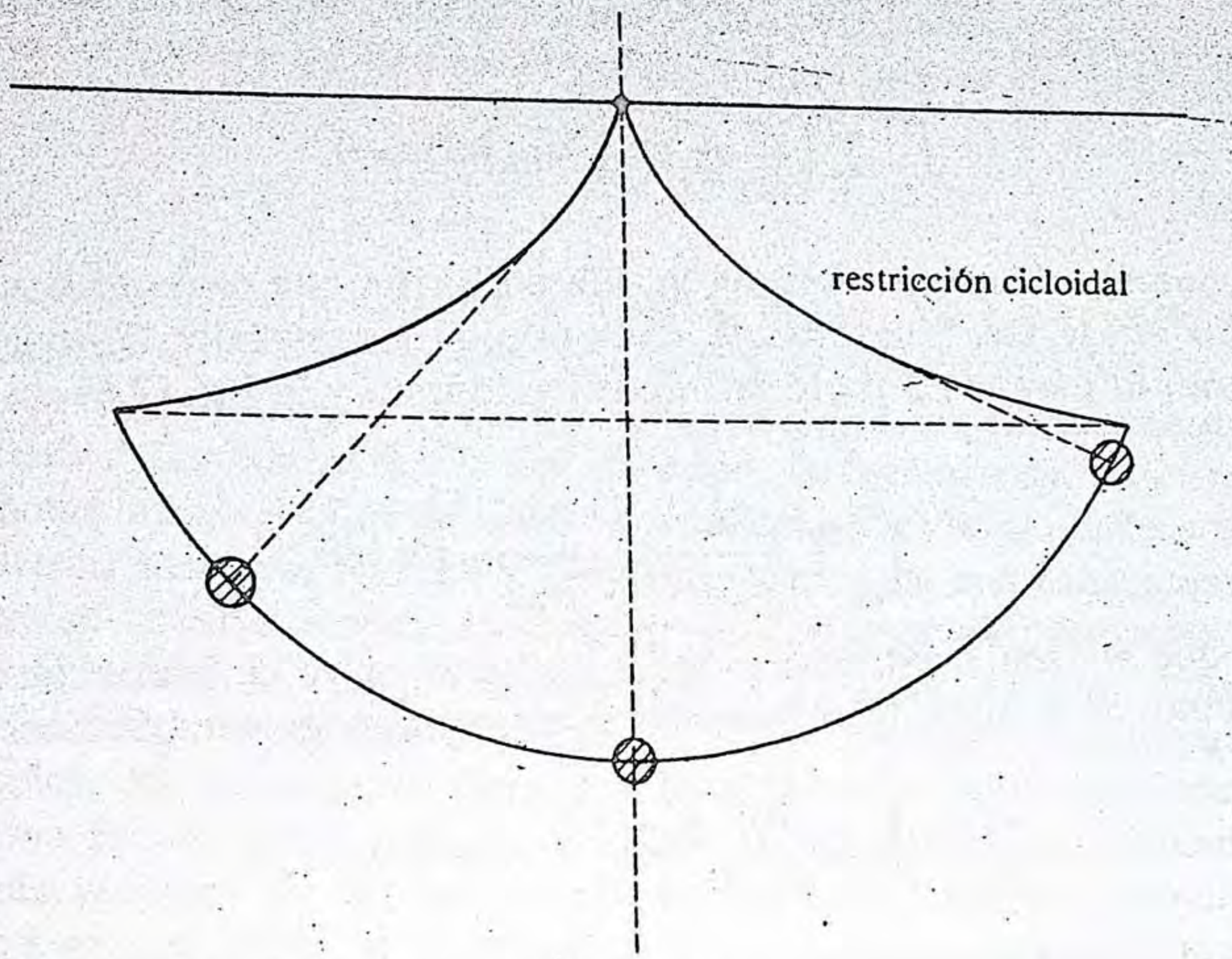


Fig. 17.7 Péndulo cicloidal

que se desliza en una trayectoria circular (o péndulo ordinario). Esta propiedad del cicloide puede utilizarse para construir un péndulo cuyo período es independiente de la amplitud. Debe recordarse que la envolvente de un cicloide es un cicloide y, en caso de que el péndulo quede limitado a una barrera cicloide, tal como se muestra en la Fig. 17.7, el disco de péndulo seguirá una trayectoria cicloide y se comportará como una partícula libre de fricción que se desliza en un cicloide. Tales restricciones cicloidales fueron aplicadas de hecho en los primeros relojes de péndulo, en que la amplitud del péndulo era suficiente y variable.

EJERCICIOS

17.2.1 Una película de jabón se alarga a través del espacio entre dos anillos de radio unitario centrados en $\pm x_0$ en el eje x, y perpendicular al eje x. Utilizando la solución desarrollada en la Sección 17.2, establezca las funciones trascendentales para la condición en que x_0 es tal que el área de la superficie curvada de la rotación equivale al área de los dos anillos (solución discontinua de Goldschmidt). Resuelva para x_0 (Fig. 17.8).

17.2.2 (a) Demuestre que la integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x)\, dx, \qquad \text{con} \quad f = y(x),$$

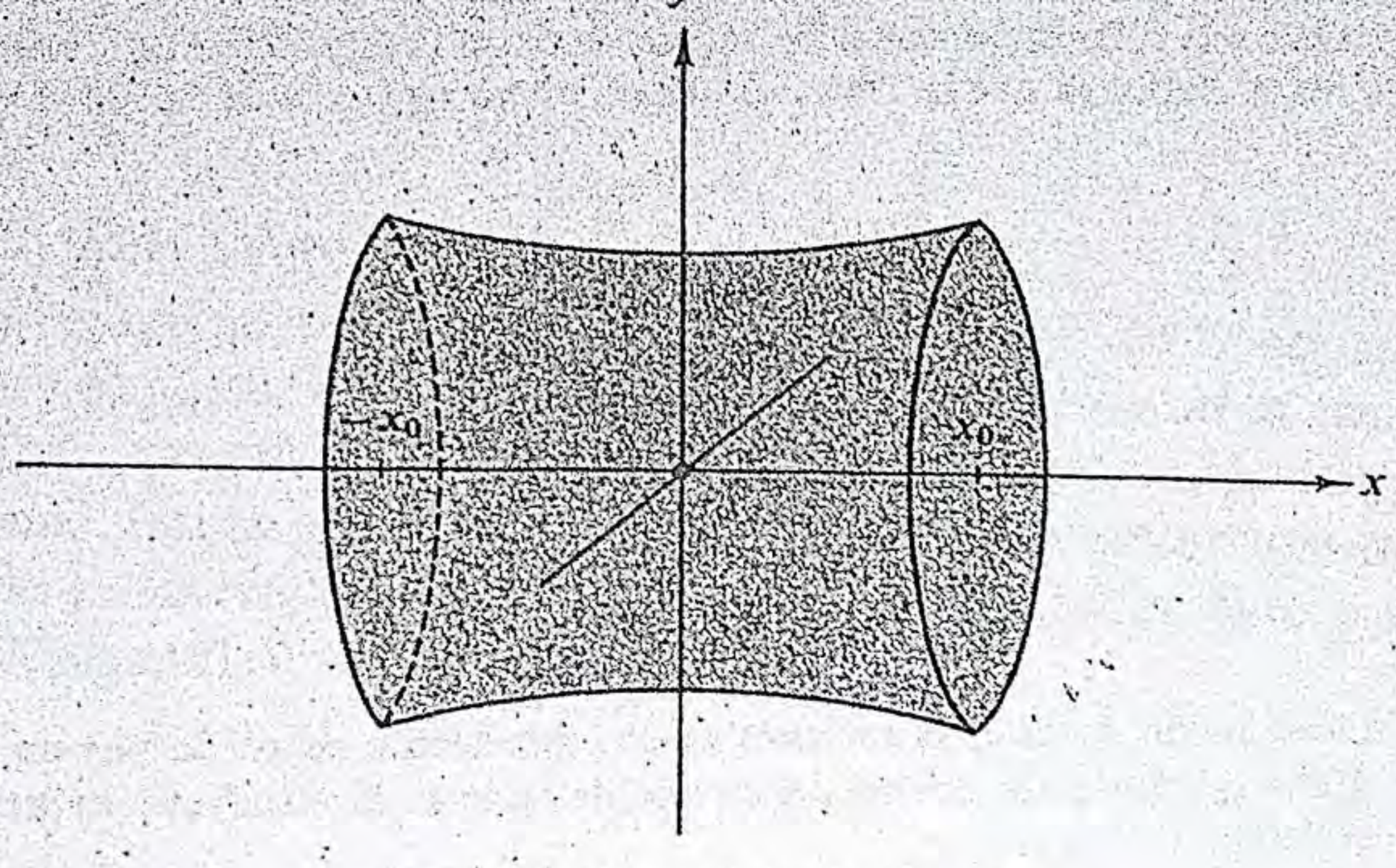


Fig. 17.8 Superficie de rotación

no tiene valores extremos.

(b) Si $f(y, y_x, x) = y^2(x)$ encuentre una solución discontinua similar a la solución de Goldschmidt para el problema de la película de jabón.

17.2.3 (a) Bajo el efecto de la gravedad, una partícula se desliza en forma descendente en una trayectoria cicloidal libre de fricción descrita por

$$x = c(\theta + \operatorname{sen}\theta),$$
$$y = c(1 - \cos\theta).$$

Demuestre que el tiempo requerido para el deslizamiento descendente hasta el origen es

$$t = \pi\sqrt{\frac{c}{g}},$$

independiente del punto de partida en la curva $(0 < \theta \leqslant \pi)$.

(b) Para $c = 1$, $\theta = \pi$, compare t con el tiempo de caída libre más el tiempo de trayectoria horizontal hasta el origen (en la terminal se considera velocidad de caída libre).

Respuesta. $t_{\text{cicloide}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{g}} = 3.1416/\sqrt{g},$

$$t_{\text{rebote}} = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)/\sqrt{g} = 3.5708/\sqrt{g}.$$

17.2.4 El principio de Fermat relacionado con la óptica establece que un haz de luz sigue la trayectoria $y(x)$, para la cual

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} n(y, x)\, ds$$

es un mínimo cuando n es el índice de refracción. Para $y_2 = y_1 = 1$, $-x_1 = x_2 = 1$ encuentre la trayectoria del haz si

(a) $n = e^y$, (b) $n = a(y - y_0)$, $y > y_0$.

17.2.5 Una partícula libre de fricción se mueve desde el punto A en la superficie de la Tierra hasta el punto B, por medio del deslizamiento a través de un túnel. Encuentre la ecuación diferencial que debe satisfacerse si el tiempo de tránsito debe ser mínimo. *Nota.* Suponga que la Tierra es una esfera no rotatoria de densidad uniforme.

(*Respuesta.* Ec. 17.15) $r_{\varphi\varphi}(r^3 - ra^2) + r_\varphi^2(2a^2 - r^2) + a^2r^2 = 0,$

$$r(\varphi = 0) = r_0,$$
$$r_\varphi(\varphi = 0) = 0,$$
$$r(\varphi = \varphi_A) = a,$$
$$r(\varphi = \varphi_B) = a.$$

$$\text{(Ec. 17.18)}\quad r_\varphi^2 = \frac{a^2r^2}{r_0^2} \cdot \frac{r^2 - r_0^2}{a^2 - r^2}.$$

La solución de estas ecuaciones es un hipocicloide generado por un círculo de radio $\frac{1}{2}(a - r_0)$ rodando dentro del círculo de radio a. El estudiante deberá demostrar que el tiempo de tránsito es

$$t = \pi \frac{(a^2 - r_0^2)^{1/2}}{(ag)^{1/2}}$$

Para detalles, véase P. W. Cooper, *Am. J. Phys.*, 34, 68 (1966); G. Venezian y otros, *Am. J. Phys.* 34, 701-704 (1966).

17.3 Generalizaciones, Diversas Variables Dependientes

La Ec. 17.1 se puede generalizar en diversos aspectos. En esta sección, se considera que el *integrando*, f, es una función de diversas variables dependientes, $y_1(x), y_2(x), y_3(x) \cdots$, todas las cuales dependen de x, es decir la variable independiente. En la Sección 17.4, f nuevamente contiene tan solo una función desconocida y, aunque y es una función de diversas variables independientes (sobre las cuales se integra). En la Sección 17.5 se combinan estas dos generalizaciones. Finalmente, en la Sección 17.7, el valor extremo se limita debido a una o más restricciones.

Para más de una variable dependiente, la Ec. 17.1 se transforma en

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_{1x}(x), y_{2x}(x), \ldots, y_{nx}(x), x]\, dx. \qquad (17.59)$$

Del mismo modo que en la Sección 17.1, se determina el valor extremo de J mediante la comparación de las trayectorias vecinas. Sea

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha\eta_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots n, \qquad (17.60)$$

en donde η_i son independientes entre sí, pero sujetas a la restricción des-
 crita en la Sección 17.1. Mediante la diferenciación de la Ec. 17.59 con

respecto a α y permitiendo que $\alpha = 0$, ya que la Ec. 17.7 aún puede aplicarse, se obtiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \eta_{ix} \right) dx = 0, \tag{17.61}$$

en que el subíndice x designa la diferenciación con respecto a x, es decir $y_{ix} = dy_i/dx$, etc. Nuevamente, cada uno de los términos $(\partial f/\partial y_{ix})\eta_{ix}$ se integra por partes. La parte integrada desaparece y la Ec. 17.61 se transforma en

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \right) \eta_i \, dx = 0. \tag{17.62}$$

Ya que η_i son arbitrarias e *independientes* entre sí,[1] cada uno de los términos en la suma debe desaparecer *independientemente*. Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial (dy_i/dx)} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{17.63}$$

a modo de un conjunto completo de ecuaciones de Euler, cada una de las cuales debe ser satisfecha para un valor extremo.

La aplicación de mayor importancia de la Ec. 17.59 se presenta cuando el *integrando* f se considera un lagrangiano L. El lagrangiano se define como la *diferencia* de las energías cinética y potencial de un sistema,

$$L \equiv T - V. \tag{17.64}$$

Principio de Hamilton. Utilizando el tiempo como variable independiente en lugar de x y $x_i(t)$ como las variables dependientes,

$$x \to t,$$

$$y_i \to x_i(t),$$

$$y_{ix} \to \dot{x}_i(t);$$

en que $x_i(t)$ es la ubicación y $\dot{x}_i = dx_i/dt$ es la velocidad de la partícula i como función del tiempo. Siendo así, la ecuación $\delta J = 0$ es un establecimiento matemático del principio de Hamilton relacionado con la mecánica clásica,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n; t) \, dt = 0. \tag{17.65}$$

Dicho en palabras, el principio de Hamilton afirma que el movimiento del sistema desde el tiempo t_1 hasta t_2 es tal que la integral de tiempo de la

[1] Por ejemplo, se podría establecer $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 \cdots = 0$, eliminando todos excepto un término de la suma, y luego tratar η_1 exactamente como en la Sección 17.1.

lagrangiana L tiene un valor estacionario. Las ecuaciones de Euler resultantes generalmente se llaman ecuaciones lagrangianas de movimiento.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \tag{17.66}$$

Estas ecuaciones Lagrangianas se pueden derivar de las ecuaciones de Newton para el movimiento y las ecuaciones de Newton se pueden derivar de las correspondientes a Lagrange. Los dos conjuntos de ecuaciones son igualmente "fundamentales". Sin embargo, la formulación Lagrangiana ciertamente tiene ventajas de valor con respecto a las leyes convencionales de Newton. Mientras que las ecuaciones de Newton son ecuaciones vectoriales, se observa que las ecuaciones de Lagrange implican solamente cantidades escalares. Las coordenadas $x_1, x_2, \ldots$, no necesitan constituir un conjunto de coordenadas estándar y lo mismo puede decirse para las longitudes. Se seleccionan para ser equivalentes a las condiciones del problema físico. Finalmente, las ecuaciones de Lagrange, aun cuando están más alejadas de lo que podría denominarse "sentido común", se adaptan mucho mejor al tratamiento de los sistemas complejos y por extensión a otras ramas de la física (tal como la mecánica cuántica).

EJEMPLO 17.3.1 PARTICULA EN MOVIMIENTO. COORDENADAS CARTESIANAS

Considere la Ec. 17.64 que describe una partícula con energía cinética

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{17.67}$$

y la energía potencial $V(x)$ en que, como es usual, la fuerza está definida por el gradiente negativo del potencial,

$$F(x) = -\frac{d\,V(x)}{dx}. \tag{17.68}$$

De la Ec. 17.66

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - \frac{\partial(-V)}{\partial x} = m\ddot{x} - F(x) = 0, \tag{17.69}$$

lo cual es simplemente la segunda ley de movimiento de Newton.

EJEMPLO 17.3.2 PARTICULAS EN MOVIMIENTO. COORDENADAS CILINDRICAS CIRCULARES

Ahora procedamos a describir una partícula móvil en coordenadas cilíndricas en el plano ($z = 0$). La energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \tfrac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2), \tag{17.70}$$

y consideramos $V = 0$. Las ecuaciones lagrangianas proporcionan

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\varphi}^2 = 0,$$
$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{17.71}$$

La segunda ecuación constituye un enunciado simple de la conservación del momento angular. La primera puede interpretarse como la aceleración radial igualada con la fuerza centrífuga.[1] En este sentido, la fuerza centrífuga es una fuerza real. Es de cierto interés hacer notar que tal interpretación de la fuerza centrífuga como una fuerza real ha sido soportada por la teoría general de la relatividad.

EJERCICIOS

17.3.1 Establezca las ecuaciones lagrangianas para el movimiento de una partícula en coordenadas esféricas en que el potencial V equivale a una constante. Identifique los términos correspondientes tanto (*a*) a la fuerza centrífuga como (b) la fuerza Coriolis.

17.3.2 El péndulo esférico consiste de una masa en un alambre de longitud l, libre para moverse en el ángulo polar θ y el ángulo acimutal φ (Fig. 17.9).
(a) Establezca la lagrangiana para este sistema físico.
(b) Desarrolle las ecuaciones de Lagrange para el movimiento.

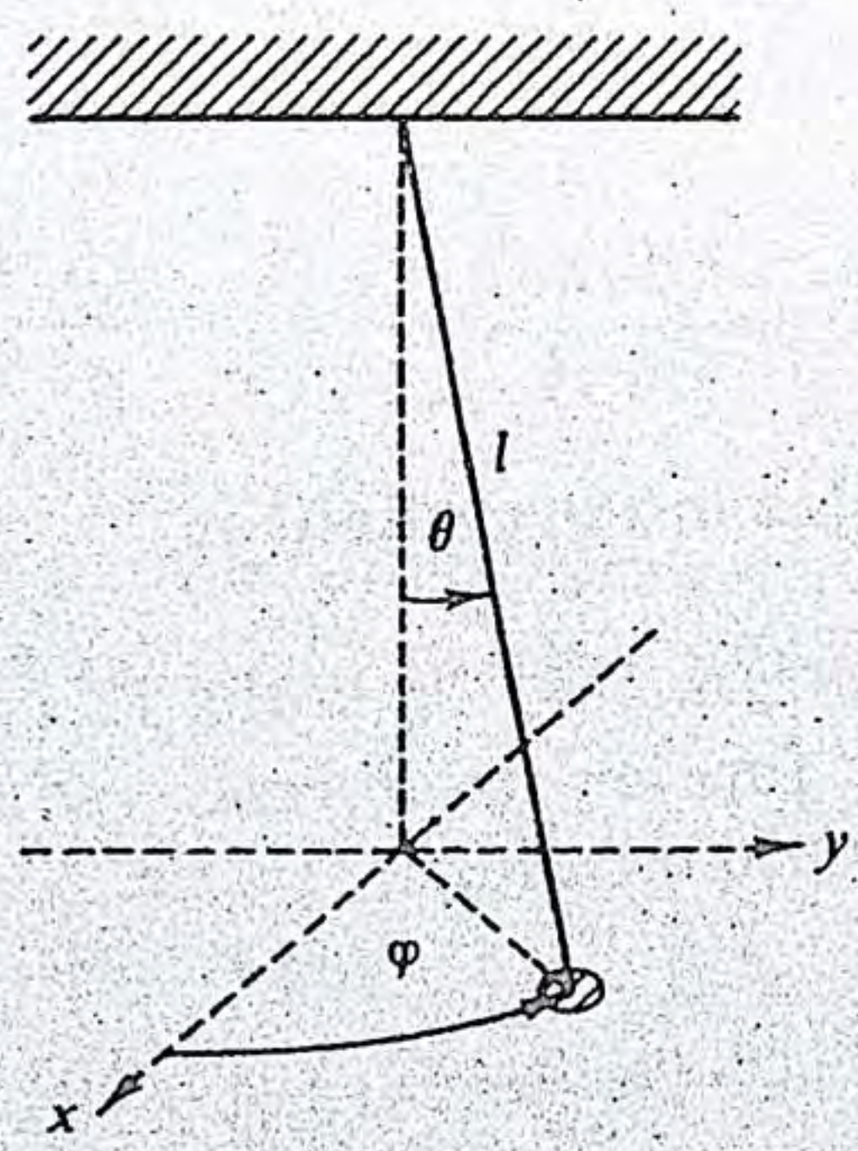


Fig. 17.9 Péndulo esférico

[1] Esto constituye un segundo método para el ataque del Ejercicio 2.6.3.

17.3.3 Demuestre que la lagrangiana

$$L = m_0c^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) - V(\mathbf{r})$$

origina una forma relativística de la segunda ley del movimiento de Newton,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = F_i,$$

en donde $F_i = -\partial V/\partial x_i$.

17.3.4 La lagrangiana para una partícula con carga q en un campo electromagnético definida por el potencial escalar φ y un potencial de vector A es

$$L = \tfrac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}.$$

Encuentre la ecuación para el movimiento de la partícula cargada.

Respuesta. $m\ddot{x}_i = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_i$.

Sugerencia. $\dfrac{d}{dt}A_j = \dfrac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_i \dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_i$.

17.3.5 Como generalización relativística del Ejercicio 17.3.4 (espacio de Minkowski, cf. Sección 3.7), las ecuaciones de Lagrange pueden indicarse en la forma covariante de Lorentz

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u_\nu} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = 0,$$

en donde x_ν y u_ν son los 4 vectores de posición y velocidad; τ es el tiempo propio, un escalar de Lorentz; $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Si L está definida por

$$L = \tfrac{1}{2}m_0 u_\lambda u_\lambda + q u_\lambda A_\lambda,$$

demuestre que las tres ecuaciones para $\nu = 1, 2$, y 3 representan la segunda ley del movimiento de Newton, en que la fuerza está determinada por la fuerza de Lorentz. Determine la cuarta ecuación ($\nu = 4$) y explique su significado.

17.4 Diversas Variables Independientes

Algunas veces, el *integrando* f de la Ec. 17.1 contiene una función desconocida u que es una función de diversas variables independientes, $u = u(x, y, z)$, para el caso tridimensional. La Ec. 17.1 se transforma en

$$J = \iiint f[u, u_x, u_y, u_z, x, y, z]\,dx\,dy\,dz, \tag{17.72}$$

en donde u_x indica $\partial u/\partial x$, etc. El problema variacional consiste en encon-

trar la función $u(x, y, z)$ para la cual J es estacionaria,

$$\delta J = \alpha \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0. \tag{17.73}$$

Generalizando la Sección 17.1, se tiene

$$u(x, y, z, \alpha) = u(x, y, z, 0) + \alpha\, \eta(x, y, z). \tag{17.74}$$

en que $u(x, y, z; \alpha = 0)$ representa la función (desconocida) para la cual la Ec. 17.73 se satisface, mientras que nuevamente $\eta(x, y, z)$ es la desviación arbitraria que describe la función variada $u(x, y, z, \alpha)$. Esta desviación $\eta(x, y, z)$ debe poderse poderse diferenciar y desaparecer en los puntos extremos. Siendo así, de la Ec. 17.74

$$u_x(x, y, z, \alpha) = u_x(x, y, z, 0) + \alpha\eta_x, \tag{17.75}$$

y similarmente para u_y y u_z.

La diferenciación de la integral (Ec. 17.72) con respecto al parámetro α y luego permitiendo que $\alpha = 0$, se obtiene

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \iiint \left(\frac{\partial f}{\partial u}\eta + \frac{\partial f}{\partial u_x}\eta_x + \frac{\partial f}{\partial u_y}\eta_y + \frac{\partial f}{\partial u_z}\eta_z\right) dx\, dy\, dz = 0. \tag{17.76}$$

Nuevamente se procede a la integración de cada uno de los términos $(\partial f/\partial u_i)\eta_i$ por partes. La parte integral desaparece en los puntos extremos (debido a que se requiere que la desviación η pase a cero en los puntos extremos) y

$$\iiint \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u_z}\right) \eta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0.^{1} \tag{17.77}$$

Ya que la variación $\eta(x, y, z)$ es arbitraria, el término en el paréntesis grande puede establecerse equivalente a cero. Esto proporciona la ecuación de Euler para las (tres) variables independientes.

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u_z} = 0. \tag{17.78}$$

[1] Nuevamente, es imperativo comprender completamente el significado de las derivadas parciales. Específicamente, en la Ec. 17.77 $\partial/\partial x$ es una derivada parcial en que y y z son constantes. Pero $\partial/\partial x$ también es una derivada total en cuanto a que actúa en la dependencia de x *implícita* así como en la dependencia de x *explícita*. En este sentido

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial u_x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial u_x} u_x + \frac{\partial^2 f}{\partial u_x^2} u_{xx}$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial u_y\, \partial u_x} u_{xy} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_z\, \partial u_x} u_{xz}.$$

EJEMPLO 17.4.1 ECUACION DE LAPLACE

Un ejemplo de este tipo de problema variacional lo proporciona la electrostática. La energía de un campo electrostático está determinada por

$$\text{densidad de energía} = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2, \tag{17.79}$$

en donde E es el campo de fuerza electrostático úsual. En términos del potencial estático φ,

$$\text{densidad de energía} = \tfrac{1}{2}\varepsilon(\nabla\varphi)^2. \tag{17.80}$$

Ahora impondremos el requisito de que la energía electrostática (asociada con el campo) en cierto volumen sea mínima. (Las condiciones limitantes para E y φ aún deben satisfacerse.) Se tiene la integral de volumen

$$\begin{aligned} J &= \iiint (\nabla\varphi)^2\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)\, dx\, dy\, dz.^{1} \end{aligned} \tag{17.81}$$

Con

$$f(\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, x, y, z) = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2, \tag{17.82}$$

en que la función φ sustituye a u de la Ec. 17.78, de modo que la ecuación de Euler (Ec. 17.78) proporciona

$$-2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0 \tag{17.83}$$

o

$$\nabla^2\varphi(x, y, z) = 0, \tag{17.84}$$

lo cual es justamente la ecuación de Laplace para la electrostática.

Un análisis más detallado muestra que este extremo de hecho representa un mínimo. Siendo así, el requisito de que la energía de campo sea un mínimo origina la ecuación de Laplace.

EJERCICIOS

17.4.1 La lagrangiana para una cuerda vibrante (vibraciones de pequeña amplitud) es

$$L = \int (\tfrac{1}{2}\rho u_t^2 - \tfrac{1}{2}\tau u_x^2)\, dx,$$

[1] Recuerde que el subíndice x indica la derivada parcial con respecto a x y *no* un componente x.

en donde ρ es la densidad de masa lineal (constante) y τ es la tensión (constante). La integración en x es con respecto a la longitud de la cuerda. Demuestre que la aplicación del principio de Hamilton a la densidad lagrangiana (*el integrando*), ahora con *dos* variables independientes, origina la ecuación de onda clásica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

17.5 Más de una Variable Dependiente, Más de una Variable Independiente

En algunos casos, nuestro *integrando* f contiene más de una variable dependiente y más de una variable independiente. Considere

$$f = f[p(x, y, z), p_x, p_y, p_z, q(x, y, z), q_x, q_y, q_z, r(x, y, z), r_x, r_y, r_z, x, y, z]. \tag{17.85}$$

Se procede como antes con

$$\begin{aligned} p(x, y, z, \alpha) &= p(x, y, z, 0) + \alpha\,\xi(x, y, z), \\ q(x, y, z, \alpha) &= q(x, y, z, 0) + \alpha\,\eta(x, y, z), \\ r(x, y, z, \alpha) &= r(x, y, z, 0) + \alpha\,\zeta(x, y, z), \text{ etc.} \end{aligned} \tag{17.86}$$

Recordando que ξ, η, y ζ son independientes entre sí, del mismo modo que lo fueron las η_i en la Sección 17.3, la misma diferenciación e integración por partes originá

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_z} = 0, \tag{17.87}$$

con ecuaciones similares para las funciones q y r. Sustituyendo p, q, r... con y_i y $x, y, z, \ldots x_j$, la Ec. 17.87 puede establecerse en una forma más compacta:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial y_{ij}}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{17.87a}$$

en que

$$y_{ij} \equiv \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

En la Sección 17.7 aparece una aplicación de la Ec. 17.7.

EJERCICIOS

17.5.1 La lagrangiana (por unidad de volumen) de un campo electromagnético con una densidad de carga ρ está determinada por

$$L = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}\right) - \rho\varphi + \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}.$$

Demuestre que las ecuaciones de Lagrange originan las ecuaciones electromagnéticas de Maxwell.

17.6 Multiplicadores Lagrangianos

En esta sección se introduce el concepto de lo que denominaremos restricción. Para simplificar el tratamiento, la restricción aparece como una función simple y no como una integral. En esta sección no estamos interesados en el cálculo de las variaciones, pero en la Sección 17.7 se incorporan, en el cálculo de las variaciones, las restricciones, conjuntamente con nuestros multiplicadores lagrangianos recientemente desarrollados.

Considere una función de tres variables independientes, $f(x, y, z)$. Para que la función f sea máxima (o extrema)[1]

$$df = 0. \tag{17.88}$$

La condición necesaria y suficiente para esto es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{17.89}$$

en donde

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz. \tag{17.90}$$

Frecuentemente, en los problemas de física las variables x, y, z están sujetas a restricciones de modo que ya no son independientes entre sí. Existe la posibilidad, al menos en principio, de utilizar cada restricción para eliminar una de las variables y para proceder con un conjunto nuevo y más pequeño de variables independientes.

El uso de los multiplicadores lagrangianos constituye una técnica alternativa que puede aplicarse cuando la eliminación de las variables es inconveniente o indeseable. Consideremos que la ecuación de restricción es

[1] Incluyendo un punto de apoyo de cuatro dimensiones.

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{17.91}$$

para la cual

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0. \tag{17.92}$$

Regresando a la Ec. 17.88, se observa que la Ec. 17.89 ya no es consistente debido a que ahora se tienen solamente dos variables independientes. Si se considera x e y como estas variables independientes, dz ya no es arbitraria. Sin embargo, se puede sumar la Ec. 17.90 y un múltiplo de la Ec. 17.92 para obtener

$$df + \lambda\, d\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dz = 0. \tag{17.93}$$

Nuestro multiplicador lagrangiano λ se selecciona de tal modo que

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \tag{17.94}$$

suponiendo que $\partial\varphi/\partial z \neq 0$. Ahora la Ec. 17.93 se transforma en

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy = 0. \tag{17.95}$$

Sin embargo, dx y dy son arbitrarias y las cantidades entre paréntesis deben desaparecer,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{17.96}$$

Cuando las Ecs. 17.94 y 17.96 se satisfacen, $df = 0$ y f constituye un extremo. Observe que ahora se tienen cuatro desconocidas: x, y, z y λ. La cuarta ecuación, evidentemente, es la restricción (17.91). De hecho, solamente deseamos x, y y z; λ no tiene que determinarse. Debido a esto, λ algunas veces se denomina multiplicador indeterminado de Lagrange. Este método falla cuando todos los coeficientes de λ desaparecen en un extremo, $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z = 0$. En estas condiciones resulta imposible resolver para λ.

EJEMPLO 17.6.1 PARTICULA EN UNA CAJA

Como ejemplo del uso de los multiplicadores lagrangianos considere el problema mecánico cuántico correspondiente a una partícula (masa m) en una caja. La caja es un paralelepípedo rectangular con lados a, b y c. El estado básico de energía de la partícula está determinado por

$$E = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right). \tag{17.97}$$

Se busca la forma de caja que reduzca al mínimo la energía E con la condición de que el volumen sea constante

$$V(a, b, c) = abc = k. \tag{17.98}$$

Con $f(a, b, c) = E(a, b, c)$ y $\varphi(a, b, c) = abc - k = 0$, se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial a} + \lambda \frac{\partial V}{\partial a} = -\frac{h^2}{4ma^3} + \lambda bc = 0. \tag{17.99}$$

Asimismo,

$$-\frac{h^2}{4mb^3} + \lambda ac = 0,$$

$$-\frac{h^2}{4mc^3} + \lambda ab = 0.$$

Multiplicando la primera de estas expresiones por a, la segunda por b y la tercera por c, se tiene

$$\lambda abc = \frac{h^2}{4ma^2} = \frac{h^2}{4mb^2} = \frac{h^2}{4mc^2}. \tag{17.100}$$

En consecuencia, nuestra solución es

$$a = b = c \text{ es decir un cubo} \tag{17.101}$$

Observe que λ no ha sido determinada. Continúa siendo un multiplicador sin determinar.

EJEMPLO 17.6.2 REACTOR NUCLEAR CILINDRICO

Otro ejemplo lo proporciona la teoría del reactor nuclear. Suponga un reactor nuclear (térmico) que debe tener la forma de un cilindro circular recto con radio R, altura H. La teoría de difusión neutrónica establece una restricción:

$$\varphi(R, H) = \left(\frac{2.4048}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = \text{constante.}^1 \tag{17.102}$$

Se desea reducir al mínimo el volumen del reactor

$$f(R, H) = \pi R^2 H. \tag{17.103}$$

La aplicación de la Ec. 17.96 origina

[1] 2.4048. . . es la raíz más baja de la función de Bessel $J_0(R)$ (cf. Sección 11.1).

$$\frac{\partial f}{\partial R} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial R} = 2\pi RH - 2\lambda \frac{(2.4048)^2}{R^3} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial H} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial H} = \pi R^2 - 2\lambda \frac{\pi^2}{H^3} = 0. \tag{17.104}$$

Mediante la multiplicación de la primera de estas ecuaciones por $R/2$ y la segunda por H se obtiene

$$\pi R^2 H = \lambda \frac{(2.4048)^2}{R^2} = \lambda \frac{2\pi^2}{H^2} \tag{17.105}$$

o

$$H = \frac{\sqrt{2}\pi R}{2.4048} = 1.847R. \tag{17.106}$$

para el volumen mínimo del reactor cilíndrico circular recto.

Desde un punto de vista estricto, hemos encontrado solamente un extremo. Su identificación como mínimo se deriva de la consideración de las ecuaciones originales.

EJERCICIOS

Los siguientes problemas deben resolverse mediante el uso de los multiplicadores lagrangianos.

17.6.1 La energía de estado básico de una partícula en una caja de píldoras (cilindro circular recto) está dada por

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(2.4048)^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2}\right),$$

en donde R es el radio y H es la altura de la caja de píldoras. Encuentre la relación entre R y H que reduce al mínimo la energía para un volumen fijo.

Respuesta. $\frac{R}{H} = 0.5413.$

17.6.2 Encuentre la relación de R(radio) a H(altura) que reduce el mínimo el área superficial total de un cilindro circular recto de volumen fijo.

17.6.3 Un reactor nuclear térmico se encuentra sujeto a una restricción

$$\varphi(a, b, c) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2 = B^2, \text{ una constante.}$$

Encuentre las relaciones entre los lados del reactor paralelepípedo rectangular de volumen mínimo.

Respuesta. $a = b = c$, cubo.

17.6.4 Para una lente simple de longitud focal f, la distancia al objeto p y la distancia de la imagen q se relacionan por medio de $1/p + 1/q = 1/f$.
Encuentre la distancia mínima objeto-imagen $(p + q)$ para una f fija. Suponga una imagen y objeto real (p y q ambas positivas).

17.6.5 Un paralelepípedo rectangular se encuentra inscrito en un elipsoide de semiejes a, b y c. Aumenta al máximo el volumen del paralelepípedo rectangular inscrito. Demuestre que la relación entre el volumen máximo y el del elipsoide es $2/\pi\sqrt{3} \approx 0.367$.

17.6.6 Una esfera *deformada* tiene un radio definido por $r = r_0\{\alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos\theta)\}$ en donde $\alpha_0 \approx 1$ y $\alpha_2 \approx 0$. De acuerdo con el Ejercicio 12.5.14 el área y el volumen son

$$A = 4\pi r_0^2 \alpha_0^2 \left\{1 + \frac{4}{5}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2\right\}$$

$$V = \frac{4\pi r_0^3}{3}\alpha_0^3 \left\{1 + \frac{3}{5}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right)^2\right\}.$$

Los términos del orden α_2^3 se han despreciado.
(a) Con la restricción de que el volumen encerrado se mantenga constante, es decir $V = 4\pi r_0^3/3$, demuestre que la superficie limitante del área mínima es una esfera, ($\alpha_0 = 1$, $\alpha_2 = 0$).
(b) Con la restricción de que el área de la superficie limitante se mantenga constante, es decir $A = 4\pi r_0^2$, demuestre que el volumen encerrado es máximo cuando la superficie es una esfera.

Nota concerniente a los siguientes ejercicios:

En un sistema mecánico cuántico se tienen g_i estados cuánticos diferentes entre las energías E_i y $E_i + dE_i$. El problema consiste en describir la forma en que n_i partículas se encuentran distribuidas entre estos estados sujetos a dos restricciones:

(a) Número fijo de partículas

$$\sum_i n_i = n.$$

(b) Energía total fija:

$$\sum_i n_i E_i = E.$$

17.6.7 Para partículas iguales que obedecen el principio de exclusión de Pauli, la probabilidad de cierto arreglo es

$$W_{FD} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}.$$

Demuestre que el aumento al máximo de W_{FD} sujeto a un número fijo de partículas y energía total fija origina

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\lambda_1 + \lambda_2 E_i} + 1}.$$

Con $\lambda_1 = -E_0/kT$ y $\lambda_2 = 1/kT$, esto da lugar a la estadística de Fermi-Dirac.
Sugerencia. Intente trabajar con $\ln W$ y utilizando la fórmula de Stirling. La justi-

ficación para la *diferenciación* es que en este caso estamos tratando con un gran número de partículas, $\Delta n_i/n_i \ll 1$.

17.6.8 Para partículas idénticas, pero sin la restricción en el número en cierto estado, la probabilidad de cierto arreglo es

$$W_{\mathrm{BE}} = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!\,(g_i - 1)!}.$$

Demuestre que aumentado al máximo W_{BE}, sujeto a un número fijo de partículas y energía fija total, origina

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\lambda_1 + \lambda_2 E_i} - 1}.$$

Con $\lambda_2 = 1/kT$, esto origina la estadística de Bose-Einstein.

Nota. Suponga que $g_i \gg 1$.

17.6.9 Los fotones satisfacen W_{BE} y la restricción de que la energía total sea constante. Evidentemente *no* satisfacen la restricción de un número fijo. Demuestre que al eliminar la restricción del número constante se origina el resultado anterior pero con $\lambda_1 = 0$.

17.7 Variación Sujeta a Restricciones

Del mismo modo que en las secciones anteriores, se intenta definir la "trayectoria" que establece la integral

$$J = \int f\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right) dx_j \tag{17.107}$$

como estacionaria. Este es el caso general en que x_j representa un conjunto de variables independientes y y_i, un conjunto de variables dependientes. Nuevamente,

$$\delta J = 0. \tag{17.108}$$

Ahora, sin embargo, se introducen una o más restricciones. La restricción puede tener la forma

$$\varphi_k(y_i, x_j) = 0, \tag{17.109}$$

del mismo modo que en la Sección 17.6. En este caso se puede multiplicar por una función de x_j, por ejemplo $\lambda_k(x_j)$, e integrar sobre el mismo intervalo como en la Ec. 17.107 para obtener

$$\int \lambda_k(x_j)\, \varphi_k(y_i, x_j)\, dx_j = 0. \tag{17.110}$$

Siendo así, es evidente

$$\delta \int \lambda_k(x_j)\, \varphi_k(y_i, x_j)\, dx_j = 0. \tag{17.111}$$

De manera alternativa, la restricción puede aparecer en la forma de una integral

$$\int \varphi_k(y_i, x_j)\, dx_j = \text{constante}. \tag{17.112}$$

Se puede introducir cualquier multiplicador lagrangiano *constante* y nuevamente se tiene la Ec. 17.111; ahora con λ una constante.

En cualquiera de los casos, mediante la suma de las Ecs. 17.108 y 17.111 se obtiene

$$\delta \int \left[f\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right) + \sum_k \lambda_k\, \varphi_k(y_i, x_j) \right] dx_j = 0. \tag{17.113}$$

El multiplicador lagrangiano λ_k puede depender de x_j cuando $\varphi(y_i, x_j)$ se proporciona en la forma de la Ec. 17.109.

Tratando todo el *integrando* como una función nueva

$$g\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right),$$

es decir

$$g\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right) = f + \sum_k \lambda_k \varphi_k, \tag{17.114}$$

se encuentra que g debe satisfacer las ecuaciones de Euler usuales

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial(\partial y_i/\partial x_j)} = 0, \tag{17.115}$$

existiendo una ecuación de tal tipo para cada variable dependiente y_i (cf. Ecs. 17.78 y 17.87). Las ecuaciones de Euler y las ecuaciones de la restricción se resuelven luego simultáneamente para encontrar el extremo.

Ecuaciones Lagrangianas. En ausencia de restricciones, se encuentra que las ecuaciones de Lagrange de movimiento (Ec. 17.66) son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

en donde t (tiempo) es una variable independiente y $q_i(t)$ (posición de la partícula) es un conjunto de variables dependientes. Normalmente, las coordenadas generalizadas q_i se seleccionan para eliminar las fuerzas de restricción, aunque esto no es necesario y no siempre conveniente. En presencia de las restricciones, el principio de Hamilton φ_k es

$$\delta \int \left[L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_k \lambda_k(t)\, \varphi_k(q_i, t) \right] dt = 0, \tag{17.116}$$

y las ecuaciones lagrangianas restringidas de movimiento son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k a_{ik}\lambda_k . \qquad (17.117$$

Normalmente $\varphi_k = \varphi_k(q_i, t)$, independiente de las velocidades generali zadas, $\dot{q}_i$. En este caso, el coeficiente a_{ik} está definido por

$$a_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}. \qquad (17.118$$

Si q_i es una longitud, entonces $a_{ik}\lambda_k$ (sin suma) representa la fuerza de la restricción número k en la dirección q_i, lo cual aparece en la Ec. 17.117 exactamente del mismo modo que $-\partial V/\partial q_i$.

EJEMPLO 17.7.1 PENDULO SIMPLE

Como ilustración, considere el péndulo simple, una masa m, restrin gida por un alambre de longitud l que oscila en un arco. En ausencia de una restricción

$$\varphi_1 = r - l = 0 \qquad (17.119$$

se tienen dos coordenadas generalizadas r y θ (movimiento en el plano vertical). El lagrangiano es

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta. \end{aligned} \qquad (17.120$$

Mediante la Ec. 17.117, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda_1, \qquad (a_{r_1} = 1,\ a_{\theta_1} = 0), \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \end{aligned} \qquad (17.121$$

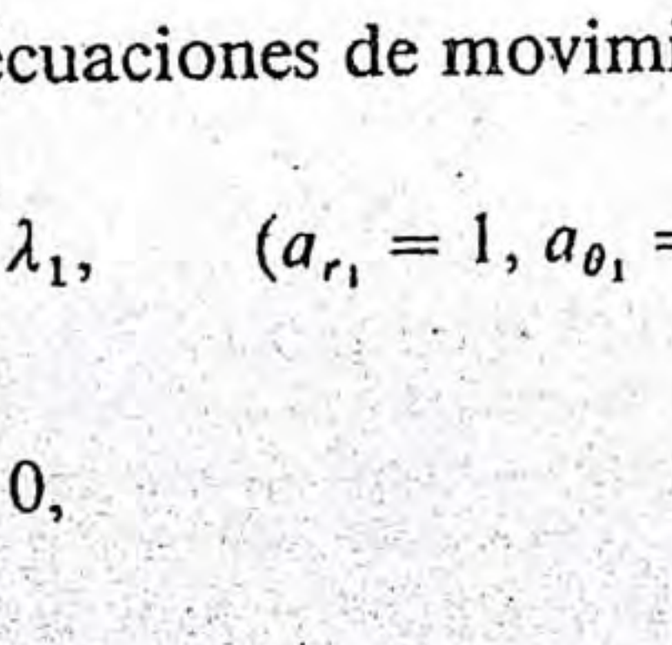


Fig. 17.10 Péndulo simple

o

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda_1,$$
$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{17.122}$$

Sustituyendo en la ecuación de restricción ($r = l$, $\dot{r} = 0$), se tiene

$$ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = -\lambda_1,$$
$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{17.123}$$

La segunda ecuación se puede resolver para $\theta(t)$ para proporcionar el movimiento armónico simple cuando la amplitud es pequeña (sen $\theta = \theta$), mientras que la primera ecuación representa $-\lambda_1$, la tensión en el alambre en términos de θ y $\dot{\theta}$.

EJEMPLO 17.7.2 DESLIZAMIENTO Y DESPRENDIMIENTO DE UNA PARTICULA

Estrechamente relacionado con esto se tiene el problema de una partícula deslizante sobre una superficie cilíndrica. El objeto consiste en encontrar el ángulo crítico θ_c al cual la partícula se desprende súbitamente de la superficie. Este es el punto en que la fuerza radial de restricción pasa a ser cero (Fig. 17.11).

Se tiene

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta \tag{17.124}$$

y la ecuación de restricción

$$\varphi_1 = r - l = 0. \tag{17.125}$$

Procediendo como en el Ejemplo 17.7.1 con $a_{r1} = 1$,

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1(\theta),$$
$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mgr\,\mathrm{sen}\,\theta = 0, \tag{17.126}$$

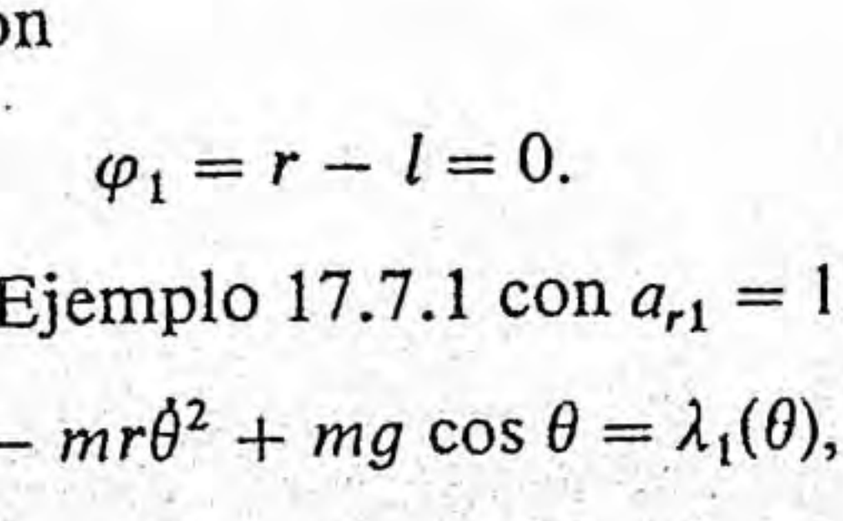


Fig. 17.11 Una partícula deslizante sobre una superficie cilíndrica

en que la fuerza de restricción $\lambda_1(\theta)$ es una función del ángulo θ.[1] Ya que $r = l, \ddot{r} = \dot{r} = 0$, la Ec. 17.126 se reduce a

$$-ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1(\theta), \tag{17.127a}$$

$$ml^2\ddot{\theta} - mgl\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{17.127b}$$

Diferenciando la Ec. 17.127a, con respecto al tiempo y recordando que

$$\frac{df(\theta)}{dt} = \frac{df(\theta)}{d\theta}\dot{\theta}, \tag{17.128}$$

se obtiene

$$-2ml\ddot{\theta} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{d\lambda_1(\theta)}{d\theta}. \tag{17.129}$$

Combinando esta ecuación con (17.127b) e integrando se tiene

$$\lambda_1(\theta) = 3mg\cos\theta + C. \tag{17.130}$$

$$\lambda_1(0) = mg, \tag{17.131}$$

$$C = -2mg. \tag{17.132}$$

La partícula m permanecerá en la superficie mientras la fuerza de restricción no sea negativa, es decir mientras la superficie tenga una fuerza de empuje hacia afuera sobre la partícula

$$\lambda(\theta) = 3mg\cos\theta - 2mg \geqslant 0. \tag{17.133}$$

El ángulo crítico se encuentra localizado en donde $\lambda(\theta_c) = 0$, en que la fuerza de restricción va hacia cero. De la Ec. 17.133

$$\cos\theta_c = \tfrac{2}{3}, \qquad \text{o} \quad \theta_c = 48^\circ\,11' \tag{17.134}$$

con respecto a la vertical. A este ángulo (despreciando cualquier fricción), la partícula se desprende.

Es de reconocerse que este resultado se puede obtener con mayor facilidad al considerar una fuerza centrípeta variable proporcionada por el componente radial de la fuerza gravitacional. El ejemplo ha sido seleccionado para ilustrar el uso del multiplicador indeterminado de Lagrange sin confundir al lector con un sistema físico complicado.

EJEMPLO 17.7.3 LA ECUACION DE ONDA DE SCHRÖDINGER

Como una ilustración final de un mínimo restringido, se puede proceder a encontrar las ecuaciones de Euler para el problema mecánico cuántico

[1] Observe cuidadosamente que λ_1 es la fuerza *radial* ejercida por el cilindro en la partícula. La consideración del problema físico debe demostrar que λ_1 debe depender del ángulo θ. Hemos permitido que $\lambda = \lambda(t)$. Ahora se ha sustituido la dependencia en el tiempo por una dependencia angular (desconocida).

$$\delta \iiint \psi^*(x, y, z) H \psi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0, \tag{17.135}$$

con la restricción

$$\iiint \psi^* \psi\, dx\, dy\, dz = 1. \tag{17.136}$$

La Ec. 17.135 es un enunciado de que la energía del sistema es estacionaria, siendo H la hamiltoniana mecánica cuántica para una partícula de masa m, un operador diferencial,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z). \tag{17.137}$$

La Ec. 17.136, la restricción, es la condición de que se tiene presente exactamente una partícula; ψ es la función de onda usual, una variable dependiente, y ψ^*, su conjugado complejo, se trata como una *segunda* variable[1] dependiente.

Integrando por partes, se tiene

$$\int \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, dx = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\bigg| - \int \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx. \tag{17.138}$$

Se supondrá que las condiciones de restricción son periódicas (del mismo modo que en la teoría de Sturm-Liouville, Capítulo 9) o que el volumen de integración es de tal modo grande que ψ y ψ^* desaparecen notablemente[2] en los límites. Siendo así, la parte integrada desaparece y la Ec. 17.135 puede volver a establecerse en la forma

$$\delta \iiint \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V\psi^*\psi\right] dx\, dy\, dz = 0. \tag{17.139}$$

La función g de la Ec. 17.114 es

$$\begin{aligned} g &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V\psi^*\psi - \lambda\psi^*\psi \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} (\psi_x^*\psi_x + \psi_y^*\psi_y + \psi_z^*\psi_z) + V\psi^*\psi - \lambda\psi^*\psi, \end{aligned} \tag{17.140}$$

utilizando nuevamente el subíndice x para designar $\partial/\partial x$. Ahora la Ec. 17.115 proporciona

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi + V\psi = \lambda\psi. \tag{17.141}$$

[1] Cf. Sección 6.1.
[2] $\lim_{r \to \infty} r^{1/2}\psi(r) = 0$.

El análisis de la Ec. 17.137 nos permite identificar a λ físicamente como energía del sistema mecánico cuántico. Con esta interpretación, la E 17.141 representa la ya conocida ecuación de onda de Schrödinger. Es procedimiento variacional más bien constituye una curiosidad académic Proporciona un método bastante poderoso para la obtención de solucion aproximadas de la ecuación de onda (método variacional de Rayleigh-Rit Sección 17.8).

EJERCICIOS

17.7.1 Una partícula de masa m se encuentra en una superficie horizontal sin fricción. S restringe a moverse de tal modo que $\theta = \omega t$ (brazo radial de rotación, sin fricción Con las condiciones iniciales

$$t = 0, \qquad r = r_0, \qquad \dot{r} = 0,$$

(a) Encuentre las posiciones radiales en función del tiempo

Respuesta. $r(t) = r_0 \cosh \omega$

(b) Encuentre la fuerza ejercida en la partícula debido a la restricción.

Respuesta. $F^{(c)} = 2m\dot{r}\omega = 2mr_0\omega^2 \operatorname{senh} \omega$

17.7.2 Un cable flexible se encuentra suspendido de dos puntos fijos. La longitud del cable e fija. Encuentre la curva que reduce al mínimo la energía potencial gravitacional de cable.

Respuesta. Coseno hiperbólic

17.7.3 Encuentre el valor máximo de la derivada direccional $\varphi(x, y, z)$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma,$$

sujeta a la restricción

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Respuesta. $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = |\nabla\varphi|.$

17.7.4 Un volumen fijo de agua gira en un cilindro con una velocidad angular ω constante. Encuentre la curva de la superficie de agua que reduce al mínimo la energía potencial del agua en el campo de fuerza gravitacional-centrífuga combinado.

Respuesta. Parábola.

17.7.5 (a) Demuestre que para un perímetro de longitud fija la figura de área máxima es un círculo.

(b) Demuestre que para un área fija la curva de perímetro mínimo es un círculo.

17.7.6 Demuestre que el hecho de requerir que J, definida por

$$J = \int_a^b (p(x)y_x^2 - q(x)y^2)\, dx,$$

para tener un valor estacionario sujeto a la condición de normalización

$$\int_a^b y^2\, w(x)\, dx = 1.$$

origina la ecuación de Sturm-Liouville del Capítulo 9:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy + \lambda wy = 0.$$

Nota. Es conveniente requerir que

$$py_xy\Big|_a^b = 0$$

sea una condición limitante.

17.7.7 Demuestre que el hecho de requerir que J, definida por

$$J = \int_a^b\int_a^b K(x,t)\varphi(x)\varphi(t)\, dx\, dt,$$

tenga un valor estacionario sujeto a la condición de normalización

$$\int_a^b \varphi^2(x)\, dx = 1$$

origina la ecuación integral de Hilbert-Schmidt, Ec. 16.89.
Nota. El núcleo $K(x, t)$ es simétrico.

17.8 Técnica Variacional de Rayleigh-Ritz

El Ejercicio 17.7.6 establece una relación entre el cálculo de las variaciones y los problemas de función propia-valores propios. La expresión del Ejercicio 17.7.6 se puede volver a establecer en la forma

$$F[y(x)] = \frac{\int_a^b (py_x^2 - qy^2)\, dx}{\int_a^b y^2 w\, dx}, \tag{17.142}$$

en donde la restricción aparece en el denominador como una condición de normalización usual. La cantidad F, una función de la función $y(x)$, se denomina algunas veces *funcional*. Ya que el denominador es constante (para las funciones normalizadas), los valores estacionarios de J corresponden a los valores estacionarios de F. Siendo así, de acuerdo con el Ejercicio 17.7.6, cuando $y(x)$ es tal que J y F adquieren un valor estacionario, la función óptima $y(x)$ satisface la ecuación de Sturm-Lioville

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy + \lambda wy = 0. \tag{17.143}$$

Integrando el numerador de la Ec. 17.142 por partes y haciendo uso de la *condición limitante*

$$py_x y\,|_a^b = 0, \tag{17.144}$$

$$F[y(x)] = -\frac{\int_a^b y\left\{\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy\right\} dx}{\int_a^b y^2 w\, dx}. \tag{17.145}$$

Luego, sustituyendo en la Ec. 17.143, los valores estacionarios de $F[y(x)]$ estarán definidos por

$$F[y_n(x)] = \lambda_n, \tag{17.146}$$

en donde λ_n es el valor propio correspondiente a la función propia y_n. La Ec. 17.146 con F definida ya sea mediante la Ec. 17.142 o 17.145 forma la base del método de Rayleigh-Ritz para el cómputo de las funciones propias y los valores propios.

Función Propia de Estado Básico. Suponga que se pretende computar la función propia de estado básico y_0 y el valor propio[1] λ_0 de algún sistema atómico o nuclear complicado. El ejemplo clásico para el cual no existe una solución exacta es el problema del átomo de helio. La función propia y_0 es *desconocida*, pero habremos de suponer que podemos establecer una conjetura bastante satisfactoria de la función aproximada y, de manera que matemáticamente se puede indicar

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i. \tag{17.147}$$

Los términos c_i son cantidades pequeñas. (El qué tan pequeño depende de lo satisfactorio de la conjetura.) Los términos y_i son funciones propias normalizadas (también desconocidas) y, consecuentemente, la función de ensaye y no es normalizada.

Sustituyendo la función aproximada y en la Ec. 17.145 y observando que

$$\int_a^b y_i\left\{\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_j}{dx}\right) + qy_j\right\} dx = -\lambda_i \delta_{ij}, \tag{17.148}$$

$$F[y(x)] = \frac{\lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2}. \tag{17.149}$$

[1] Esto significa que λ_0 es el valor propio más bajo. Es evidente de la Ec. 17.142 que cuando $p(x) \geqslant 0$ y $q(x) \leqslant 0$ (cf. Tabla 9.1), entonces $F[y(x)]$ tiene un límite inferior.

Si se desarrolla el denominador por medio del teorema binomial y se desechan los términos del orden c_i^4,

$$F[y(x)] = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2(\lambda_i - \lambda_0). \tag{17.150}$$

la Ec. 17.150 contiene dos resultados de importancia:

1. Aun cuando el error en la función propia y ha sido de $O(c_i)$, el error en λ es de $O(c_i^2)$. Independientemente de que la aproximación de las funciones propias sea baja, se puede lograr un cálculo preciso del valor propio.

2. Si λ_0 es el valor propio más bajo (estado básico) y considerando que $\lambda_i - \lambda_0 > 0$,

$$F[y(x)] = \lambda \geqslant \lambda_0, \tag{17.151}$$

o sea que la aproximación siempre se encuentra en lado alto volviéndose menor y siendo convergente en λ_0 a medida que se mejora y, la función propia aproximada, $(c_i \to 0)$.

EJEMPLO 17.8.1 CUERDA VIBRANTE

Una cuerda vibrante, sujeta en $x = 0$ y 1, satisface la ecuación de valor propio

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \tag{17.152}$$

y la condición limitante $y(0) = y(1) = 0$. Para este ejemplo simple, el estudiante habrá de reconocer de inmediato que $y_0(x) = \operatorname{sen} \pi x$ y $\lambda_0 = \pi^2$. Sin embargo, podemos ensayar con la técnica de Rayleigh-Ritz.

Considerando las condiciones limitantes, se ensaya con

$$y(x) = x(1 - x). \tag{17.153}$$

Luego con $p = 1$ y $w = 1$,

$$F[y(x)] = \frac{\int_0^1 (1 - 2x)^2\, dx}{\int_0^1 x^2(1 - x)^2\, dx}$$

$$= \frac{1/3}{1/30} = 10. \tag{17.154}$$

Este resultado, $\lambda = 10$ es una aproximación bastante satisfactoria (1.3% de error) para $\lambda_0 = \pi^2 = 9.8696$.

En el caso del cálculo científico usual, la función propia se podría mejorar al introducir más términos y parámetros ajustables tal como

$$y = x(1 - x) + a_2 x^2 (1 - x)^2. \tag{17.15}$$

Es conveniente disponer de términos ortogonales adicionales, aunque n necesario. El parámetro a_2 se ajusta para *reducir al mínimo* $F[y(x)]$. E este caso, al seleccionar $a_2 = 1.13$ $F[y(x)]$ se lleva a 9.87. Esto es bastan cercano al valor propio exacto.

EJERCICIOS

17.8.1 Una partícula de la mecánica cuántica que se encuentra en una esfera (Ejempl 11.7.1) satisface

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

con $k^2 = 2mE/\hbar^2$. La condición limitante es que $\psi(r = a) = 0$, en donde a es el radi de la esfera. Para el estado básico (en donde $\psi = \psi(r)$) intente establecer una funció de onda aproximada.

$$\psi_a(r) = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

y calcule el valor propio aproximado k_a^2.

Respuesta. $k_a^2 = \frac{10.}{a^2}$

$$k^2_{\text{exacto}} = \frac{\pi^2}{a^2}$$

REFERENCIAS

BLISS, G. A., *Calculus of Variations.* The Mathematical Association of America, Ope Court Publishing Company. Illinois: LaSalle (1925). Uno de los textos más antiguos pero qu aún resulta de utilidad como referencia para detalles relacionados con problemas tales com los de áreas mínimas.

COURANT, R. y H. ROBBINS, *What Is Mathematics?* 2a. ed. Nueva York: Oxfor University Press (1943). El Capítulo VII contiene una descripción detallada del cálculo de la variaciones, incluyendo las soluciones de la película de jabón para los problemas de áre mínima.

SAGAN, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics.* Nueva York Wiley (1961). Este maravilloso texto también puede incluirse como una referencia para l teoría de Sturm-Liouville, las funciones de Bessel y Legendre, y la serie de Fourier. El capítulo 1 es una introducción al cálculo de las variaciones con aplicaciones a la mecánica. El capítulo 7 trata nuevamente el cálculo de las variaciones y lo aplica a los problemas de valores propios.

WEINSTOCK, R., *Calculus of Variations.* Nueva York: McGraw-Hill (1952). Un desarroll detallado y sistemático del cálculo de las variaciones, aplicaciones a la teoría de Sturm-Liouville y a los problemas físicos de elasticidad, electrostática y mecánica cuántica.

YOURGRAU, W. y S. MANDELSTAM, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory.* 3a. ed. Filadelfia: Saunders (1968). Un tratado comprensible y autorizado acerca de los principios variacionales. La descripción del desarrollo histórico y de las muchas fallas metafísicas son de particular interés.

REFERENCIAS GENERALES

1. E. T. WHITTAKER y G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*. 4a. ed. Cambridge: Cambridge University Press (1962), en rústica. Esta es una de las referencias más antiguas (edición original de 1902); constituyendo una de las más clásicas. Se apoya fundamentalmente en las matemáticas puras, como en 1902, con completo rigor matemático.

2. P. M. MORSE y H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics* (2 vols.). Nueva York: McGraw-Hill Book Company (1953). Este trabajo presenta las matemáticas de gran parte de la física teoórica con detalles propios de un nivel avanzado. Se recomienda como una fuente sobresaliente de información para la lectura complementaria y el estudio avanzado.

3. H. S. JEFREYS y B. S. JEFREYS, *Methods of Mathematical Physics*, 3a. ed. Cambridge: Cambridge University Press (1966). Un tratado escolar bastante riguroso y amplio del análisis matemático, que cuida el rigor matemático. Se proporcionan aplicaciones a la física clásica y la geofísica.

4. R. COURANT y D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. I. Primera edición inglesa. Nueva York: John Wiley and Sons (Interscience) (1953). Una referencia de gran utilidad para la física matemática, particularmente para los teoremas de existencia y para descripciones de áreas, como son: los problemas de valor propio, ecuaciones integrales y el cálculo de variaciones.

5. J. IRVING y N. MULLINEUX, *Mathematics in Physics and Engineering*. Nueva York: Academic Press (1959). La selección de los temas y el énfasis son algo diferente del texto presente, pero la presentación se encuentra al nivel de lo que el estudiante no graduado puede comprender.

6. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied Mathematics Series .55 (AMS-55), National Bureau of Standards, Departamento de Comercio de los Estados Unidos (1964). Esto constituye una inmensa recopilación de lo que justamente indica el título. Una referencia de suma utilidad.

Referencias más especializadas se incluyen al final de cada capítulo.

INDICE

A

Abel, ecuación de, 842-843, 845
Adición, teorema de:
funciones Bessel, 560
polinomio de Legendre, armónico esférico, 264, 667, 875
Análisis de tensores, 153-190
cantidad escalar, 154
ley de transformación de tensores, 155
tensor isotrópico, 157, 159, 170
vector contravariante, 154
vector covariante, 155
Análisis numérico:
cómputo:
funciones de Bessel, 551-598
funciones de Bessel esféricas, 604
polinomios de Chebyshev, 719
polinomios de Laguerre, 711
polinomios de Legendre, 622
ecuaciones diferenciales:
método de Runge-Kutta, 485
métodos del predictor-corrector, 486
primer orden, 485
segundo orden, 487
función factorial, 536
serie asintótica, 338
función de error de Gauss, 343
integral exponencial, 338
integrales de coseno, seno, 340
truncamiento de Chebyshev, 723
Angular, operador de momento, 60, 63, 115, 446
armónicos esféricos vectoriales, 698
ecuación de Legendre asociada, 446
Análisis Vectorial, 21-100
escalares, 35
estructura recíproca, 47, 224
ley del triángulo de adición, 22
rotación de coordenadas, 26, 213
vector, definiciones de, 21, 27, 31
vector, componentes, 24
vector, ley de transformación, 28, 154, 212
vectores ortogonales, 35
véase también: Análisis tensorial
Armónicos:
Sectoral, teseral, zonal, 658
tensor esférico, 173, 698
vector esférico, 694
véase también: Armónicos esféricos
Armónicos esféricos, 654
coeficientes de Slatter, 675
fase de Condon-Shortley, 655, 665
integrales, 673
operadores escalonados, 657-667
ortogonalidad, 655
sectoral armónico, 658
esférico vectorial 694
esférico tensorial, 174, 698
teseral, 658
zonal, 658
serie de Laplace, 656
teorema de adición, 264, 667, 875
Armónicos esféricos vectoriales, 694

B

Bernoulli, funciones de, 328
Bernoulli, números de, 325, 337, 418, 534
Bessel, desigualdad, 511
Bessel, ecuación de, 124
esférica, 599
forma autoadjunta; 490
función de Green, 870
singularidades, 447
solución de la transformada de Laplace, 809
solución de serie, 455, 469
Bessel, funciones de, 550-613
ceros, 559
desarrollo asintótico, 592
esféricas, 599
definiciones, 600
formas asintóticas, 602
modificada, 611
ortogonalidad, 605
relación Wronskiana, 609, 612
relaciones de recurrencia, 603
transformada de Laplace, 707
forma en serie, 550
fórmulas Wronskianas, 575
función generadora, 550, 561
funciones de Hankel, *véase:* Hankel, funciones
guía de onda cilíndrica, 576
modificada, *véase:* Funciones de Bessel modificadas
orden no integral, 560
ortogonalidad, 566
primera clase, 550
productos infinitos, 572

relaciones de recurrencia, 552
representación hipergeométrica confluente, 733
representación integral, 554, 564
segunda clase, *véase:* Newmann, funciones
serie de Bessel, 568
transformada de Fourier, 778, 813
transformada de Laplace, 813
Bessel, integral, 563
Beta, función, 538
convolución de Laplace, 821
incompleta, 294, 319, 541, 730
Biot y Savart, ley, 648
Boltzman, ecuación de, 833
Born, aproximación de, 881, 884
Bose-Einstein, estadística de, 913
Bromwich, integral, 822

C

Cálculo de residuos, 401-439
evaluación de integrales definidas, 409
lema de Jordan, 412
Cálculo de variaciones, 885, 923
braquistócrono, 895
ecuaciones de Euler, 888, 889
ecuaciones Lagrangianas, 901, 914
multiplicadores Lagrangianos, 908
principio de Hamilton, 901
restricciones, 913
superficie de revolución, 891
Campo magnético de un circuito de corriente, 325, 646-653
Capacitancia, 133
cilindros, 393
plano y, 133, 390
disco, 140, 635, 694
esfera y plano, 148
esferoide oblato, 694
esferoide prolato, 694
placas, finita en paralelo, 395
Cauchy, fórmula de la integral, 362
derivadas de funciones analíticas, 365
Cauchy, Integral de, 428
Cauchy-Riemann, condiciones de, 352
coordenadas polares, 356
ecuación de Laplace, 355
flujo de fluídos, 64
Cauchy, teorema de la integral de, 356
cálculo de residuos, 407
demostración de Cauchy-Goursat, 359
Cauchy, valor principal de, 407, 416, 876
Cavidad, cilíndrica resonante, 123, 558, 567
Cayley-Klein parámetros, 257
Chebyshev, funciones, 717-727
construcción de Schmidt, 508
convergencia de la solución en serie de la ecuación de, 461
funciones generadoras, 718
ortogonalidad, 722
relación Wronskiana, 724
relaciones de recurrencia, 719, 721
representaciones hipergeométricas, 729
Chebyshev, ecuación, 721
forma de autounión, 491
singularidades, 449
Cierre, 517
armónicos esféricos, 657
funciones de Bessel, 569
Condición de ortogonalidad, 214, 215
Condiciones Limitantes, 493
anillo de carga eléctrica, 632
campo magnético de circuito de corriente, 646
cilindro hueco, 568, 590
ecuaciones integrales y, 833, 838
esfera en campo eléctrico uniforme, 630
esferoide oblato en campo eléctrico uniforme, 690-691
guía de onda, cable coaxial, 576
Confluencia de singularidades, ecuación hipergeométrica confluente, 450
Continuación analítica, 370
función gamma, 526
integral de Bromwich, 823
relación de reflexión factorial, 417
Contracción de tensores, 159
Convergencia, 283
continuación analítica y, 370
de la ecuación de Gegenbauer, 294
de la ecuación de Legendre, 290, 294, 460
solución en serie de la ecuación de Chebyshev, 294
véase también: Serie Infinita
Conversión de suma, 157, 160
Coordenadas biesféricas, 147
Coordenadas bipolares, 128
Coordenadas cilíndricas circulares, 121
Coordenadas cilíndricas elípticas, 125
Coordenadas cónicas, 150
Coordenadas curvilíneas, 102
factores de escala, 103
operaciones de vector diferencial, 104
Coordenadas elipsoidales confocales, 149
Coordenadas paraboloidales confocales, 151
Coordenadas polares esféricas, 110
Coordenadas toroidales, 144
Cosenos de dirección, 24
condición de ortogonalidad, 31, 214, 215
identidades, 42
véase también: Matrices ortogonales
Cuaterniones, 40, 208

D

D'Alembertiano, 161, 185, 441
Degeneración, valores propios, 500, 502
Degradación radioactiva, 802, 803
Del, 51
  aplicaciones sucesivas, 65
DeMoivre, fórmula de, 349
Densidad de vector, *véase:* Pseudotensores
Descendentes de gran pendiente, método, 431
  funciones de Bessel modificadas, 438
  funciones de Hankel, 434
  funciones factoriales, 436
Despolarización, factor de:
  esferoide oblato, 317, 691
  esferoide prolato, 318, 692
Determinantes, 192
  desarrollo Laplaciano por menores, 193
  ecuación secular, 236, 851
  solución de conjuntos
    de ecuaciones homogéneas, 195, 237
    de ecuaciones no homogéneas, 196
      eliminación de Gauss, 196
      eliminación de Gauss-Jordan, 198
Deuterón, función propia-valor propio, 492, 789
Diádica, 170
Dirac, función delta de, *véase:* Función Delta de Dirac
Dirac, matrices de, 228
Dipolo eléctrico, 64, 617
  desarrollo de Legendre, 616, 652
Dipolo magnético, 64, 116, 650
Dipolos:
  campos de radiación, 116
  energía de interacción, 38
  véase también: Dipolo eléctrico, dipolo magnético
Dirichlet, integral de, 542
Dispersión anómala, 825
Dispersión, mecánica cuántica, función de Green, 877
Divergencia, 55, 72
  coordenadas cartesianas, 55, 110
    cilíndricas circulares, 121
    curvilíneas, 106
    polares esféricas, 111
  solenoidales, 58, 66, 95, 183

E

Escalar, producto de vectores, *véase:* Producto escalar de vectores
Ecuación de continuidad, 58
Ecuación de Laguerre asociada, polinomio; *véase:* Ecuación de Laguerre, Funcion de Laguerre.
Ecuación de Legendre asociada, funcione *véase:* Ecuación de Legendre, Funcion de Legendre
Ecuación de onda:
  derivación a partir de las ecuaciones (Maxwell, 67
  dispersión anómala, 825
  solución de la transformada de Fourie 779
Ecuación hipergeométrica confluente, 731
  segunda solución, 732
  singularidades, 449
Ecuación indicial, 452
Ecuación secular, 236, 851
Ecuaciones diferenciales, 440-488
  funciones propias-valores propios, 490
  no homogéneas:
    solución de la función de Green, 47
    solución particular, 451, 475
  segunda solución, 463, 497
    término logarítmico, 469
  segundo orden, ausencia de tercera sol ción, 473
  separación de variables, 117, 442
  solución en serie (Frobenius), 451
  soluciones numéricas, 485
Ecuaciones diferenciales autoadjuntas, 489
Ecuaciones diferenciales parciales, 440
  condiciones limitantes, 494
Ecuaciones integrales, 832-884
  ecuación de Fredholm, 832
  ecuación de Volterra, 832
  ecuación integral no homogénea, 856
  función delta de Dirac, 869
  funciones propias ortogonales, 855
  núcleo separable, 849
  serie de Neumann, 846
  solución por funciones generadoras, 84
  teoría de Hilbert-Schmidt, 853
  transformación de la ecuación diferencia ecuación integral, 836
  transformadas integrales, 841
Efecto de Stark, 142, 462, 717
Elasticidad, 174
  ley de Hooke, 179, 181
  simetría cúbica, 182
  sólido isotrópico, 182
Error, integrales, 546
  desarrollo asintótico, 343
  representación hipergeométrica confluer te, 731
Escalar, 34, 154
  definición de, 27, 35
Escalar, producto de vectores, 33
Estabilidad de circuitos amplificadores, 42

Euler, ángulos de, 216, 222, 256, 261
Euler, ecuación de, 888, 889
Euler-Maclaurin, fórmula de integración de, 329, 382, 533
Euler-Mascheroni, constante, 287, 529
Exponencial, función integral, 338, 544
transformada de Laplace, 813

F

Fermat, principio de, 899
Fermi-Dirac, estadística de, 912
Fórmula de duplicación para funciones factoriales, *véase:* Legendre, fórmula de duplicación
Fórmula de la raíz descubierta de Newton, 311
Fourier-Bessel, series de, 568
Fourier-Mellin, integral de, 823
Fourier, series de, 739-766
convergencia uniforme, 304
diferenciación, 755
factores de convergencia de Lanczos, 756, 765
fenómeno de Gibbs, 761
integración, 754
integridad, 741
intervalo, cambio del, 746
onda cuadrada, 501, 747, 761
ortogonalidad, 500
teoría de Sturm-Liouville, 500, 741
ventajas, 744
Fourier, transformada de 365, 767-790
derivación de la función delta, 772
derivación de variable compleja, 365
derivada de la transformada, 779
integral de Fourier, 770
representación del momento, 785
teorema de convolución, 782
teorema de inversión, 773
tren de onda finita, 774
Fracciones parciales, 793
Franhofer, difracción de, funciones de Bessel, 556
Fredholm, ecuación integral de, 832, *véase también:* Ecuaciones integrales
Fresnel, integrales de, 343, 609
Frobenius, método de, *véase:* Solución en serie de ecuaciones diferenciales
Fuchs, teorema de, 459, 467
Función delta de Dirac, 97, 476
coordenadas polares esféricas, 484
desarrollo de función propia, 514
fuente puntal, 868
función de Green y, 868
de impulso, 801
al de Fourier, 772
representación de Bessel, 770
secuencias, 478, 483, 759, 777, 778
teoría cuántica, 786
teoría de distribuciones, 479
transformada de Laplace, 799
Función factorial, 519-549
desarrollo de Mac Laurin, 530
fórmula de duplicación de Legendre, 535, 540
función digamma, 528, 573
funciones poligamma, 529
fórmula asintótica del descendente de gran pendiente, 437
notación de factorial doble, 528
relación de reflexión
integrales de contorno, 417, 422
relación integral, 524
serie de Stirling, 533
véase también: función gamma
Función gamma, 436, 519-549
argumento complejo, 529, 531
definición de límite infinito (Euler), 519
definición de producto infinito (Weierstrass), 521
definición de integral definida (Euler), 520
función digamma, 529
función poligamma, 529
identidad de reflexión, 522
relación de recurrencia, 520
véase también: Función factorial
Función gamma incompleta, 319, 338, 543
relaciones de recurrencia, 547
representaciones hipergeométricas confluentes, 732
Función integral logarítmica, *véase:* Función integral exponencial
Funciones analíticas, 354
fórmula de la integral de Cauchy y, 362
teorema de la integral de Cauchy y, 357
representación conformal y, 384
Funciones de Bessel modificadas, 593
desarrollo asintótico, 594, 596
forma en serie, 585, 587
función generadora, 590
función de Green, 588
relación Wronskiana, 591
relaciones de recurrencia, 585, 591
representación integral, 590, 592
transformada de Fourier, 778
transformada de Laplace, 813
Funciones de Legendre, 624
asociadas, 644
operador diferencial, 455
segunda clase, 685
Funciones esféricas de Bessel, *véase:* Bessel, funciones

Funciones hipergeométricas confluentes, 731-737
desarrollos asintóticos, 736
funciones de Bessel, 733, 735
funciones de Hermite, 734
funciones de Laguerre, 734
relación Wronskiana, 737
Funciones propias, 490
desarrollo de la función delta de Dirac, 514
de la función de Green, 515
de la onda cuadrada, 501
ecuaciones integrales, 850
operadores diferenciales Hermitianos, 496
ortogonalidad, 498
plenitud, 510, 856
Funciones propias ortogonales:
ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville, 498
ecuaciones integrales de Hilbert-Schmidt, 854

G

Gauss, ecuación diferencial, *véase:* ecuación hipergeométrica
Gauss, función de error, desarrollo asintótico, 343
Gauss, ley de, 90, 390, 480
caso bidimensional, 93
Gauss, teorema de, 74, 91, 105
diádica, 173
Gegenbauer, polinomios de, 619, 717
Generadora, función:
para funciones de Bessel, 550
para funciones de Legendre asociadas, 642
para polinomios Laguerre asociados, 712
modificada, 590
para polinomios de Chebyshev, 718
para polinomios de Gegenbauer, 619, 117
para polinomios de Hermite, 700
para polinomios de Laguerre, 709
para polinomios de Legendre, 615
Generadores, grupos de, 365, 275
Gibbs, fenómeno de, 761
Gradiente, 51, 72
coordenadas cartesianas, 51, 110
cilíndricas circulares, 121
curvilíneas, 104
polares esféricas, 111
derivada restringida, 919
relación fuerza-potencial, 54
Green, funciones de, 860-883
desarrollo de función propia, 515
ecuación de Helmholtz, 484, 870, 874
ecuación de Helmholtz modificada, 870, 873
equivalencia de ecuación integral-ecuación diferencial, 864
función de Bessel modificada, 589
funciones de Bessel esféricas, 611, 613
operador de Laplace, 873
desarrollo cilíndrico circular, 875
desarrollo polar esférico, 874
propiedad de simetría, 482
relaciones de fuente planar, puntal y lineal, 592
Green, teorema de, 75, 94
Grupo unitario especial, SU (2), 256, 270
homomorfismo O_3^+, 259
matrices de espines de Pauli, 268
Grupo unitario especial, SU (3), 270
Grupos, teoría de,
caracter, 247
continuos, 255
grupo de Lorentz, 275
grupo ortogonal, O_3^+, 255
grupo unitario especial, SU (2), 256
homomorfismo, SU (2)-O_3^+, 259
matriz de rotación, 262
definiciones, 244
grupos discretos, 248
grupos dihedrales, 252
representaciones irreducibles, 246
Guía de onda:
alambre paralelo, 133
coaxial, 125

H

Hamilton, principio de, y ecuaciones de Lagrange del movimiento, 902
Hankel, funciones de, 579
desarrollo en serie, 580
esféricas, 600
formas asintóticas, 436, 596
fórmulas de Wronskian, 580, 584
representaciones integrales, 581
Hankel, transformadas de, 768, 769
Heaviside, función de etapa unitaria, 479, 483
véase también: Función sucesiva o escalonada
Helmholtz, ecuación de, 68, 117, 440
función de Green, 484, 869, 873
Helmholtz, teorema de, 95

Hermite, ecuación de:
convergencia de la solución en serie, 461
forma autoadjunta, 490
singularidades, 449
Hermite, funciones de, 700-709
construcción de Schmidt, 508
función generadora, 700
ortogonalidad, 702
representación hipergeométrica confluente, 734
Hermitiano, operador diferencial, 496, 498
funciones propias, ortogonales, 498
intervalo de integración, 497
plenitud de las funciones propias, 510
valores propios reales, 498
Hidrógeno, átomo de:
coordenadas parabólicas, 144
ecuación de Laguerre asociada, 713
potenciales electrostáticos, 548, 671
representación del momento, 786
Hidrógeno, ion molecular, 137, 462
Hilbert, espacio de, 32, 510
Hipergeométrica, ecuación, 726
formas alternas, 728
singularidades, 449
solución independiente secundaria, 728
Hipergeométricas, funciones, 726-732
funciones de Chebyshev, 729
funciones de Legendre, 729

I

Impulso, función de, *véase:* función delta, Dirac
Inercia, momento de, 233, 241
Integración, vector:
integrales de línea, 69
integrales de superficie, 70
integrales de volumen, 71
Integral de coseno, 545
desarrollo asintótico, 340
representación hipergeométrica confluente, 735
Integral de seno:
desarrollo asintótico, 340, 546
representación hipergeométrica confluente, 736
transformada de Laplace, 813
Integrales:
contorno, 356
diferenciación, 473
evaluación:
por funciones beta, 539
por integración de contorno, 409
Riemann, 500
Stieltjes, 479
Integrales elípticas, 320
primera clase, 321
representaciones hipergeométricas, 728
segunda clase, 322
Inversión de las series de potencia, 316, 423

J

Jacobiano, 55, 104
Jacobi-Anger, desarrollo de, 561
Jacobi, identidad de, 207
Jordan, lema de, 412

K

Kirchhoff, teoría de difracción, 845, 884
Kronecker, delta de, 31
tensor de segunda clase mixto, 137
Kummer, ecuación de, *véase:* Ecuación hipergeométrica confluente
Kummer, primera fórmula, 733

L

Lagrangiano, 901
Lagrangianos, multiplicadores, 908
Laguerre, ecuación de:
asociada, forma autoadjunta, 490
forma autoadjunta, 491
singularidades, 449
Laguerre, funciones de, 708-718
construcción de Schmidt, 509
función generadora, 709
polinomios de Laguerre asociados, 710
construcción de Schmidt, 509
ortogonalidad, 713
relaciones de recurrencia, 712
representación hipergeométrica confluente, 733
representación integral, 708
transformada de Laplace, 813
Lamé, constantes de, 180
Lanczos, factores de convergencia, 756, 764
Laplace, ecuación de, 65, 94, 440, 476
energía mínima, 906
representación conformal, 384
soluciones, 445
unicidad de, 95
Laplace, transformada de, 789-831
derivada de la transformada, 808
integración de transformadas, 810
sustitución, 804
tabla de operaciones, 829
de transformadas, 830
teorema de convolución, 815, 842

transformación inversa, 822
transformada de las derivadas, 796
transposición, 807
Laplaciano:
escalar, 65, 76
coordenadas cartesianas, 65, 110
circular cilíndricas, 121
curvilíneas, 106
esféricas polares, 111, 113
vector, 66
coordenadas cartesianas, 6 /
circular cilíndricas, 123
esféricas polares, 113
Laurent, desarrollo de, 368, 372
Legendre, ecuación de, 444, 623
asociada, 120
forma autoadjunta, 490
convergencia de la solución en serie, 461
forma autoadjunta, 490
singularidades, 449
Legendre, fórmula de duplicación, 535, 540, 601
Legendre, funciones de, 614-699
anillo de carga eléctrica, 632
armónicos esféricos, *véase:* armónicos
construcción de Schmidt, 506
ecuación de Legendre asociada, 642
ecuación diferencial de Legendre, 623
esfera en campo uniforme, 630
fórmula de Rodrígues, 636
función generadora, 616
funciones de Legendre asociadas, 113, 641
ortogonalidad, 644, 652
relación entre +M y −M, 643, 651
relaciones de recurrencia, 643
Integral de Schlaefi, 636
multipolos eléctricos, 618
ortogonalidad, 627
paridad, 624
polinomios de Legendre, 615
polarización de dieléctrico, 634
relación Wronskiana, 684
relaciones de recurrencia, 621
representaciones hipergeométricas, 729
representación integral de Laplace, 638
segunda clase, 676
representaciones integrales, 685
soluciones en forma cerrada, 682
serie de Legendre, 628
solución de serie de la ecuación de Legendre, 677
Legendre, teorema de adición polinomial
derivación a partir de la función de Green, 874
dos sistemas coordenados polares esféricos, 668
teoría de grupos, 264
Leibnitz, fórmula de:
para integral de diferenciación, 473
para producto de diferenciación,
para π, 318, 742, 754
Levi-Civita, símbolo de, 165, 167, 193
L'Hospital, regla de, 312
Lie, grupos de, 255
generadores, 264, 275
Liouville, teorema de, 349, 367
Lommel, integrales de, 570
Lorentz, relación de, 184
Lorentz, transformación de, 187, 275

M

MacLaurin, teorema de, 306
Madelung, constante de, 300
Mathieu, ecuación de, 127
Matrices, 192-279
adjunta, 226
cuaterniones, 208
definición, 199
diagonalización, 233, 238
Dirac, 228
Hermitiana, 226, 234
relación unitaria, 231, 243, 264
inversa, 204, 215
inversión de matriz de Gauss-Jor 204
ley de transformación vectorial, 200
matrices de momento angular, 209, 2
multiplicación de matrices, 200
operadores escalonados, 209
ortogonal, 211
producto directo, 201
relación con los tensores, 221
spin de Pauli, 208, 227
transformación de similaridad, 220
transposición, 215
traza, 203
unitaria, 226
Matrices Hermitianas, 234
valores propios reales, vectores pro ortogonales, 235
Maxwell, ecuaciones de:
covariancia de Lorentz, 183
derivación de la ecuación de onda,
Lagrangiana para, 908
relación de la ley de Gauss, 91
Mecánica cuántica:
átomo de hidrógeno:
polinomios de Laguerre asociad 713
representación del momento, 786
deuterón, 492
dispersión, 414, 877
ion molecular de hidrógeno, 137, 462

momento angular, *véase:* Momento angular, operador
partícula, *véase:* Partícula, mecánica cuántica
paquete de onda, 789
representación de Schrödinger, 787
valores promedio, 785
Mellin, transformadas de, 768, 770
Membrana circular, funciones de Bessel, 566
Métrica, 103, 225
Minkowski, espacio, 167, 183, 275
Mittag-Leffler, desarrollo, 426
Modelo de gota líquida, 653
Momento, representación, ecuación de onda de Schrödinger, 835
Morera, teorema de, 364

N

Neumann, funciones de, 572
forma asintótica, 595
forma en serie, 573
fórmulas Wronskianas, 575
funciones de Neumann esféricas, 602
relaciones de recurrencia, 575
transformada de Fourier, 778
Neutrón, teoría de difusión:
ecuaciones de transporte de Boltzmann, 833
funciones de Bessel modificadas, 587
Núcleos de ecuaciones integrales de la forma $k(x - t)$, 841-845
separabale, 849
Nyquist, criterio de estabilidad, 429

O

Oblatas, coordenadas esferoidales, 139
ecuación de Laplace, 444
electrostática, 688
Oblicuas, coordenadas, 47, 223, 542
Olber, paradoja, 293
Operador adjunto, 489
Operador diferencial autoadjunto, *véase:* operador diferencial Hermitiano
Operador inverso, unicidad, 792
Operador lineal:
operador diferencial, 118
transformadas de integral, 768
Operadores:
adjunto, 489
del, 51
diferencial lineal, 118, 489
escalonado:
armónicos esféricos, 658-667
funciones de Hermite, 705
matrices, 209
integral, *véase:* transformadas integrales
véase también: Operador de momento angular
Ortogonalización, método de Schmidt, 504
Oscilador lineal:
amortiguamiento:
fuerza de impulsión incluida, solución de transformada de Laplace, 817
incluido, solución de la transformada de Laplace, 804, 812
desarrollo mecánico cuántico, 705
ecuación autoadjunta, 490
ecuaciones integrales, 838, 867
función de la onda de momento, 788, 789
singularidades en la ecuación, 449
solución en serie de la ecuación, 451
soluciones de la transformada de Laplace, 797
tridimensional, 717

P

Parabólicas, coordenadas, 141
ecuación de Laplace, 444
Parabólicas, coordenadas cilíndricas, 128
Paridad, 114, 143
armónicos esféricos, 656
armónicos esféricos de vector, 696
funciones de Bessel, 560
funciones de Chebyshev, 720
funciones de Bessel esféricas modificadas, 612
funciones de Hermite, 702
Parseval, identidad de, 758
Parseval, relación de, 783-786
Partícula, mecánica cuántica:
en caja rectangular, 121
en cilindro circular recto, 563, 910
en esfera, 606, 653, 923
multiplicadores Lagrangianos, 909
Partícula relativística, Lagrangiana, 904
Pauli, matrices de spin, 208, 227
grupo unitario especial, SU (2), 268
Plenitud:
funciones propias de la ecuación integral de Hilbert-Shmidt, 855
funciones propias de Sturm-Liouville, 510
serie de Fourier, 740
Pochhammer, símbolo de, 532, 727
Poisson, ecuación de, 92, 440, 860
función de Green, 475, 873
Poisson, relación (razón) de, 179, 182
Potencial de trabajo, 69, 84

Potencial de vector magnético, *véase:* Teoría Potencial, potencial de vector
Principio de la incertidumbre de la teoría cuántica, 607, 704, 776
Principio de reciprocidad, funciones de Green, 482
Principios variacionales, *véase:* cálculo de variaciones
Producto vectorial de vectores, 37
Productos infinitos, 334
cálculo de residuos, 424
convergencia, 335
funciones Bessel, 572
Prolatas, coordenadas esferoidales, 134
ecuación de Laplace, 444
electrostática, 693
Pseudoescalar, 164
Pseudotensor, 163
Pseudovector, 163
Punto de apoyo, *véase:* método de los descendentes de gran pendiente
Puntos de ramificación, 402

R

Rayleigh, ecuación de, 640, 883
Rayleigh, fórmula de, 604
Rayleigh-Ritz, método variacional, 921
Regla del cociente, 161, 169
Relaciones de recurrencia:
función integral exponencial, 548
función gamma incompleta, 547
funciones de Bessel, 551
esféricas, 603
funciones de Bessel modificadas, 585
esféricas, 608, 612
funciones de Chebyshev, 719, 720
funciones de Hankel, 580
funciones de Hermite, 700
funciones de Laguerre, 710
asociadas, 712
funciones de Legendre, 621-622
asociadas, 642
segunda clase, 680, 681
funciones de Neumann, 575
funciones factoriales, 523
funciones gamma, 519
funciones hipergeométricas, 727
funciones hipergeométricas confluentes, 732
funciones poligamma, 532
Representación conformal, 384
ecuación de Laplace, 385
transformación de Schwarz-Christoffel, 395
Residuos:
cálculo de, 406
integral de Bromwich, 823
teorema, 406
Riemann-Christoffel, tensor de la curvatura, 159
Reimann, función zeta de, 286, 330, 530, 753
evaluación de la serie de Fourier, 750
tabla de valores, 530
Rodríguez representación de:
funciones de Legendre, 636
asociadas, 655
polinomios de Chebyshev, 720-725
polinomios de Hermite, 702
polinomios de Laguerre, 710
asociados, 712
Rotación:
de coordenadas, 26, 155, 211, 216, 264
de funciones, 267
de vectores, 220
momento angular, 264
Rotacional, 59, 65
coordenadas cartesianas, 60, 110
cilíndricas circulares, 121
curvilíneas, 107
polares esféricas, 111
irrotacional, 62, 66, 84, 95, 183

S

Schmidt, ortogonalización, 504
Schwarz-Christoffel, transformación de, 395
Schwarz, desigualdad de, 517
generalizada, 517
Schwarz, principio de reflexión, 369, 532
Semiconvergente, serie, *véase:* serie asintótica
Seno x, representación de producto infinito, 335, 426
Separación de variables, 117, 442
Serie Asintótica, 338
aplicaciones de la computación, 343
desarrollo de la representación integral 593, 736
descendente de gran pendiente, 431
función gamma incompleta, 338
funciones de Bessel, 596
funciones hipergeométricas confluentes 736
método de Stokes, 593
Serie de Stirling, 437, 533, 537
Series de potencias:
inversión, 316, 423
teorema de la unicidad, 315, 320
Series infinitas, 280-344
algebra de las series, 296
series dobles, 298
convergencia absoluta, 295
convergencia uniforme, 301

criterio de Leibnitz, 295
pruebas:
Abel, 303
comparación, 284
convergencia, 283
Gauss, 289, 293
integral de Cauchy, 285
integral de Mac Laurin, 285
Kummer, 287
Raabe, 289
raíz de Cauchy, 284
relación de Cauchy, 241, 284
relación de D'Alembert, 284
Weierstrass M, 302
serie alternante, 294
serie de potencias, 313
serie geométrica, 281
sumas parciales, 280
teorema de Riemann, 298
truncamiento de Chebyshev, 723
Series, solución de ecuaciones diferenciales, 451
ecuación de Legendre, intervalo de convergencia, 290, 294
función beta incompleta, 294
relación de recurrencia, 453
serie de Chebyshev, intervalo de convergencia, 294
serie de Gegenbauer, intervalo de convergencia, 294
serie hipergeométrica, intervalo de convergencia, 293, 296
Simetría:
diádica, 172
funciones, 456
matrices, 219
núcleos, 853
operadores diferenciales, 455
tensores, 157
Singularidad:
ecuación diferencial, 447
polo, 401
punto de ramificación, 402
Serie de Laurent, 401
Singularidad esencial, 448
Sistemas coordenados, 101-152
condiciones de simetría, 108
véase también: sistema de coordenadas específico
Solución en serie de potencias descendentes, 679

T

Tautocrono, 819
Taylor, desarrollo de, 305, 368
mas de una variable, 310
Tensor contravariante, 155
Tensor covariante, 155
Tensor doble, 163 190
véase también: Pseudotensor
Tensor esférico, 169
Tensor mezclado, 155
Tensores de esfuerzo-deformación, 174-182
Teorema binomial, 308
Teorema de Stokes, 77, 81, 106
aplicación del teorema de la integral de Cauchy, 358
Teoría de Sturm-Lioville, 489-518, 682, 861
análogo variacional, 920
Teorema de convolución:
transformadas de Fourier, 782
transformadas de Laplace, 814
Teoría potencial:
fuerza conservativa, 81
potencial escalar, 81, 95
electrostática, 568, 632, 752
potencial vectorial, 68, 86, 95, 112, 116, 325, 326
circuito de corriente, 325, 646, 695
Transformación de norma, 90, 189
Transformadas integrales, 767-831
Fourier, 767-790
Hankel, 768, 769
Laplace, 789-831
Mellin, 768, 770
véase también: transformada de Fourier, transformada de Hankel, transformada de Laplace, y transformada de Mellin
Triple producto escalar de vectores, 45
Triple producto vectorial de vectores, 48
regla BAC-CAB, 48, 62, 66, 68
Tschebyscheff, véase: Chebyshev

U

Ultra esféricos, *véase:* Gengenbauer, polinomios de
Unicidad:
desarrollo de Laurent, 375
desarrollo de Legendre, 633
operador inverso, 793
serie de potencias, 315, 319, 452
serie de potencias descendentes, 649
soluciones de la ecuación de Laplace, 95

V

Valores propios, 490
ecuaciones integrales de Hilbert-Schmidt, 855
matrices Hermitianas, 234

operadores diferenciales Hermitianos, 498
principio variacional, 922
reales, 236
Variables complejas, 345-439
álgebra compleja, 346
cálculo de residuos, 401
fórmula integral de Cauchy, 362
integrales de contorno, 356
representación, 275
conformal, 384
teorema de la integral de cauchy, 356
Vector axial, *véase:* Pseudovector
Vectores polares, 163
Vectores propios, matrices Hermitianas, 235
Vierergruppe, 207, 248, 250
Volterra, ecuación integral, 832
véase también: ecuaciones integrales

W

Wallis, fórmula de, para π, 236
Weiertrass, teorema del factor, 426
Whittaker, funciones de, 735
Wronskiano:
ausencia de una tercera solución, 473
función de Green, construcción, 863
funciones de Bessel, 576
esféricas, 608, 611
funciones de Chebyshev, 724
funciones de Legendre, 685
funciones hipergeométricas confluen 737
independencia lineal de las fun nes, 464
segunda solución de la ecuación difer cial, 465, 497
solución de la ecuación diferen adjunta, 497

Y

Young, módulo de, 179, 182